Crible cyclique pour des partitions non croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes

Christian Krattenthaler

Universität Wien

Crible cyclique (Reiner, Stanton, White)

Crible cyclique (Reiner, Stanton, White)

Ingrédients :

— un ensemble M des *objets combinatoires*,

— un *groupe cyclique* $C = \langle g \rangle$ agissant sur M,

— un *polynôme* $P(q)$ en q à coefficients entiers positifs.

Crible cyclique (Reiner, Stanton, White)

Ingrédients :

- un ensemble M des *objets combinatoires*,
- un *groupe cyclique* $C = \langle g \rangle$ agissant sur M,
- un *polynôme* $P(q)$ en q à coefficients entiers positifs.

Definition

Le triplet (M, C, P) satisfait au *phénomène du crible cyclique* si

$$|\operatorname{Fix}_M(g^p)| = P\left(e^{2\pi i p/|C|}\right).$$

Exemple :

Exemple :

$$M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$$

$$g : i \mapsto i+1 \pmod 4$$

$$P(q) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

Exemple :

$$M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$$

$$g : i \mapsto i+1 \pmod 4$$

$$P(q) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

$$|\operatorname{Fix}_M(g^0)| = 6 = P(1) = P\left(e^{2\pi i \cdot 0/4}\right),$$

Exemple :

$$M = \big\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,4\}\big\}$$

$$g : i \mapsto i+1 \pmod 4$$

$$P(q) = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

$$|\operatorname{Fix}_M(g^0)| = 6 = P(1) = P\left(e^{2\pi i\cdot 0/4}\right),$$
$$|\operatorname{Fix}_M(g^1)| = 0 = P(i) = P\left(e^{2\pi i\cdot 1/4}\right),$$

EXEMPLE :

$$M=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$$

$$g: i \mapsto i+1 \pmod 4$$

$$P(q)=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q=1+q+2q^2+q^3+q^4$$

$$|\operatorname{Fix}_M(g^0)|=6=P(1)=P\left(e^{2\pi i\cdot 0/4}\right),$$
$$|\operatorname{Fix}_M(g^1)|=0=P(i)=P\left(e^{2\pi i\cdot 1/4}\right),$$
$$|\operatorname{Fix}_M(g^2)|=2=P(-1)=P\left(e^{2\pi i\cdot 2/4}\right),$$

EXEMPLE :

$$M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$$

$$g : i \mapsto i+1 \pmod 4$$

$$P(q) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

$$|\operatorname{Fix}_M(g^0)| = 6 = P(1) = P\left(e^{2\pi i \cdot 0/4}\right),$$
$$|\operatorname{Fix}_M(g^1)| = 0 = P(i) = P\left(e^{2\pi i \cdot 1/4}\right),$$
$$|\operatorname{Fix}_M(g^2)| = 2 = P(-1) = P\left(e^{2\pi i \cdot 2/4}\right),$$
$$|\operatorname{Fix}_M(g^3)| = 0 = P(-i) = P\left(e^{2\pi i \cdot 3/4}\right).$$

Crible cyclique : caractérisations équivalentes

Crible cyclique : caractérisations équivalentes

Fait

Le triplet (M, C, P) *satisfait au* phénomène du crible cyclique *si et seulement si*

$$P(q) \equiv \sum_{j=0}^{|C|-1} a_j q^j \mod q^{|C|} - 1,$$

où a_j *est le nombre des* C*-orbites dont l'ordre du stabilisateur divise* j.

Crible cyclique : caractérisations équivalentes

Fait

Le triplet (M, C, P) *satisfait au* phénomène du crible cyclique *si et seulement si*

$$P(q) \equiv \sum_{j=0}^{|C|-1} a_j q^j \mod q^{|C|} - 1,$$

où a_j *est le nombre des* C*-orbites dont l'ordre du stabilisateur divise* j.

Fait

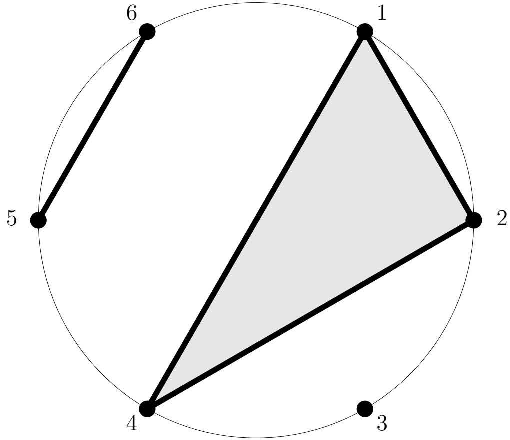
Soit g *un générateur du groupe cyclique* C*, et* $V^{(j)}$ *la réprésentation irréductible de* C *(de dimension* 1*) donnée par* $g \cdot v = e^{2\pi i j/|C|} v$*. De plus, soit* $P(q) = \sum_{j \geq 0} p_j q^j$*. Alors, le triplet* (M, C, P) *satisfait au* phénomène du crible cyclique *si et seulement si* $\mathbb{C}M$ *est isomorphe à* $\bigoplus_{j \geq 0} p_j V^{(j)}$.

Histoire du crible cyclique

Histoire du crible cyclique

- $\sim$ 1995 : "(-1)-phénomène" pour des partitions planes (John Stembridge)
- 2004 : "Le phénomène du crible cyclique" (Vic Reiner, Dennis Stanton, Dennis White)
- Des occurrences du crible cylique ont été découvert pour des permutations, des tableaux, des couplages non croisées, des partitions non croisées, des triangulations, des dissections de polygones, des amassées, des faces dans le complexe amassé, ...

Partitions non croisées (Kreweras)



Une partition non croisée de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Partitions non croisées (Kreweras)

Partitions non croisées (Kreweras)

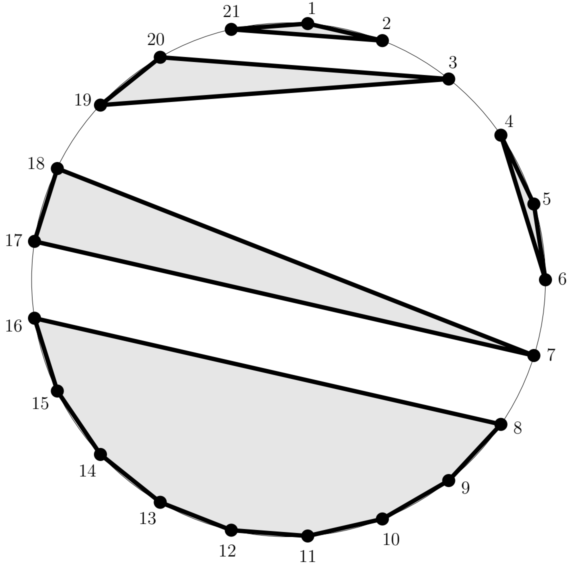
L'ensemble des partitions non croisées de $\{1, 2, \ldots, n\}$, disons $NC(n)$, peut être ordonné par raffinement.

Partitions non croisées (Kreweras)

L'ensemble des partitions non croisées de $\{1, 2, \dots, n\}$, disons $NC(n)$, peut être ordonné par raffinement.

- $NC(n)$ est un *ensemble partiellement ordonné gradué*.
- $NC(n)$ est en fait un *treillis*.
- $NC(n)$ est *auto-dual* ($\rightarrow$ complément de Kreweras).
- $|NC(n)| = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.
- Il y a des formules jolies pour la *fonction de Möbius*, le *zêta polynôme*, ...

Partitions non croisées m-divisibles (Edelman)



Une partition non croisée 3-divisible de $\{1, 2, \ldots, 21\}$

Partitions non croisées m-divisibles (Edelman)

Partitions non croisées m-divisibles (Edelman)

L'ensemble des partitions non croisées m-divisibles de $\{1, 2, \ldots, mn\}$, disons $NC^m(n)$, peut encore être ordonné par raffinement.

Partitions non croisées m-divisibles (Edelman)

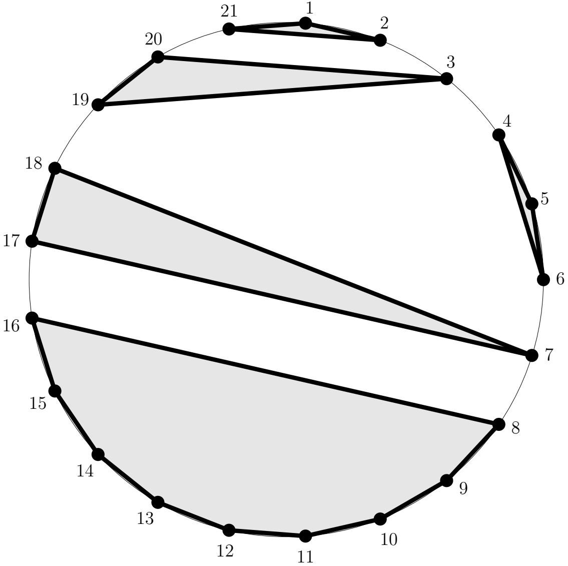
L'ensemble des partitions non croisées m-divisibles de $\{1, 2, \ldots, mn\}$, disons $NC^m(n)$, peut encore être ordonné par raffinement.

- $NC^m(n)$ est un *ensemble partiellement ordonné gradué*.
- $NC^m(n)$ est un *semi-treillis*.
- $|NC^m(n)| = \frac{1}{n}\binom{(m+1)n}{n-1}$.
- Il y a des formules jolies pour la *fonction de Möbius*, le *zêta polynôme*, ...
- En particulier, le nombre d'éléments de $NC^m(n)$ dont toutes les tailles de blocs sont *égales* à m est

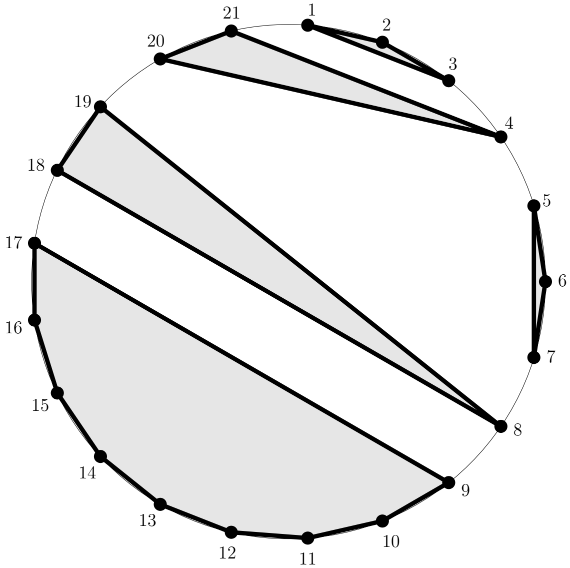
$$\frac{1}{n}\binom{mn}{n-1}.$$

Une action cyclique : rotation

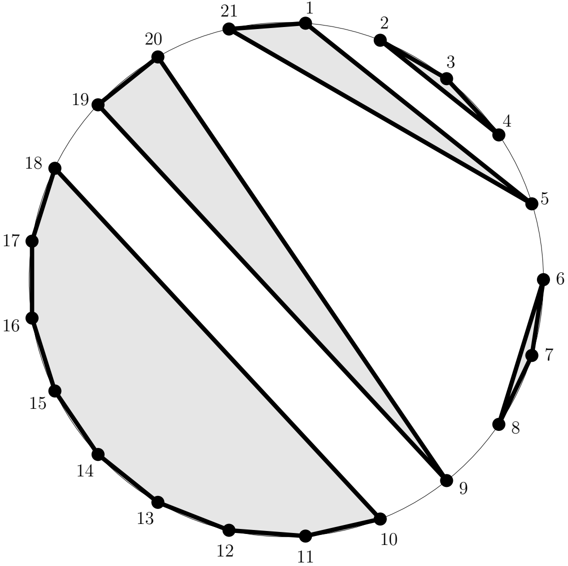
Une action cyclique : rotation



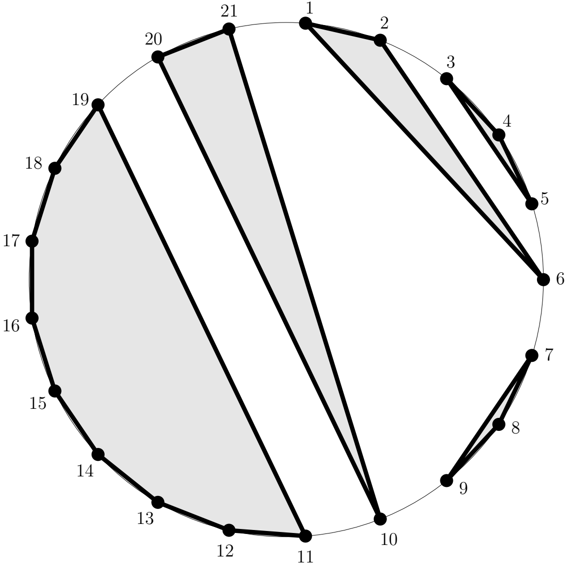
Une action cyclique : rotation



Une action cyclique : rotation



Une action cyclique : rotation



Partitions non croisées et crible cyclique I

Partitions non croisées et crible cyclique I

Prenons :

Partitions non croisées et crible cyclique I

Prenons :

- $M =$ partitions non croisées m-divisibles de $\{1, 2, \ldots, mn\}$,
- $C = \langle\text{rotation}\rangle$,
- $$P(q) = \frac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} (m+1)n \\ n-1 \end{bmatrix}_q ,$$
  où $[\alpha]_q := (1 - q^\alpha)/(1 - q)$.

Partitions non croisées et crible cyclique I

Prenons :

- $M =$ partitions non croisées m-divisibles de $\{1, 2, \ldots, mn\}$,
- $C = \langle \text{rotation} \rangle$,
- $P(q) = \dfrac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} (m+1)n \\ n-1 \end{bmatrix}_q$,
  où $[\alpha]_q := (1 - q^\alpha)/(1 - q)$.

Alors : Le triplet (M, C, P) satisfait au phénomène du crible cyclique.

Partitions non croisées et crible cyclique II

Partitions non croisées et crible cyclique II

Prenons :

Partitions non croisées et crible cyclique II

Prenons :

— M = partitions non croisées de $\{1, 2, \ldots, mn\}$ dont toutes les tailles de blocs sont *égales* à m,

— $C = \langle \text{rotation} \rangle$,

— $P(q) = \dfrac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} mn \\ n-1 \end{bmatrix}_q$,
où $[\alpha]_q := (1 - q^{\alpha})/(1 - q)$.

Partitions non croisées et crible cyclique II

Prenons :

— M = partitions non croisées de $\{1, 2, \ldots, mn\}$ dont toutes les tailles de blocs sont *égales* à m,

— $C = \langle \text{rotation} \rangle$,

— $P(q) = \dfrac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} mn \\ n-1 \end{bmatrix}_q$,
où $[\alpha]_q := (1 - q^\alpha)/(1 - q)$.

Alors : Le triplet (M, C, P) satisfait au phénomène du crible cyclique.

Partitions non-croisées m-divisibles associées aux groupes de réflexion complexes !

(Armstrong, Brady, Watt, Bessis)

Un point de vue algebrique

Un point de vue algebrique

Définissons la *longeur absolue* $\ell_T(\sigma)$ d'une permutation $\sigma \in S_n$ par le plus petit k tel que

$$\sigma = t_1 t_2 \cdots t_k,$$

où tous les t_i sont des transpositions.

Un point de vue algebrique

Définissons la *longeur absolue* $\ell_T(\sigma)$ d'une permutation $\sigma \in S_n$ par le plus petit k tel que

$$\sigma = t_1 t_2 \cdots t_k,$$

où tous les t_i sont des transpositions.

Définissons l'*ordre absolu* $\leq_T$ par

$$\sigma \leq_T \pi \quad \text{si et seulement si } \ell_T(\sigma) + \ell_T(\sigma^{-1}\pi) = \ell_T(\pi).$$

Un point de vue algebrique

Définissons la *longeur absolue* $\ell_T(\sigma)$ d'une permutation $\sigma \in S_n$ par le plus petit k tel que

$$\sigma = t_1 t_2 \cdots t_k,$$

où tous les t_i sont des transpositions.

Définissons l'*ordre absolu* $\leq_T$ par

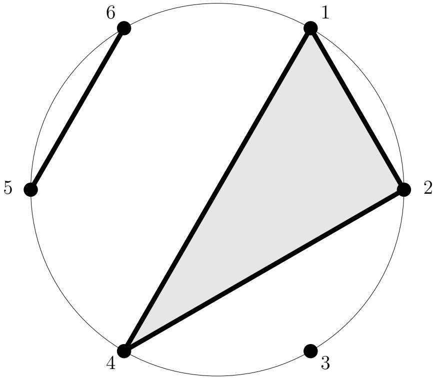
$$\sigma \leq_T \pi \quad \text{si et seulement si } \ell_T(\sigma) + \ell_T(\sigma^{-1}\pi) = \ell_T(\pi).$$

Par exemple,

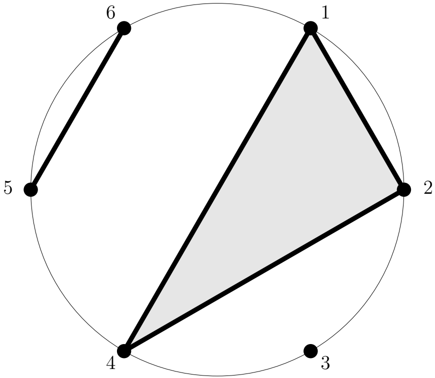
$$(1,2,4)(3)(5,6) \leq_T (1,2,3,4,5,6).$$

Par exemple, $$(1,2,4)(3)(5,6) \le_T (1,2,3,4,5,6).$$

Par exemple,
$$(1,2,4)(3)(5,6) \le_T (1,2,3,4,5,6).$$



Par exemple, $$(1,2,4)(3)(5,6) \le_T (1,2,3,4,5,6).$$



En effet, on peut montrer que les partitions non croisées de $\{1,2,\dots,n\}$ sont en bijection avec

$$\{\sigma \in S_n : \sigma \le_T (1,2,\dots,n)\}.$$

Groupes de réflexion complexes

Groupes de réflexion complexes

Une *réflexion complexe* est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ qui fixe un hyperplan, et qui est d'ordre fini. Autrement dit, une réflexion complexe est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ dont les valeurs propres sont 1 avec multiplicité $n-1$, et dont la valeur propre restante est une racine de l'unité.

Groupes de réflexion complexes

Une *réflexion complexe* est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ qui fixe un hyperplan, et qui est d'ordre fini. Autrement dit, une réflexion complexe est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ dont les valeurs propres sont 1 avec multiplicité $n-1$, et dont la valeur propre restante est une racine de l'unité.

Un *groupe de réflexion complexe* W est un groupe engendré par des réflexions (complexes).

Groupes de réflexion complexes

Une *réflexion complexe* est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ qui fixe un hyperplan, et qui est d'ordre fini. Autrement dit, une réflexion complexe est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ dont les valeurs propres sont 1 avec multiplicité $n-1$, et dont la valeur propre restante est une racine de l'unité.

Un *groupe de réflexion complexe* W est un groupe engendré par des réflexions (complexes). Ici, nous considérons toujours des groupes de réflexion complexes *finis*.

La classification des groupes de réflexion complexes finis

(Shephard et Todd)

Tous les groupes de réflexion complexes finis sont connus !

Tous les groupes de réflexion complexes finis *irréductibles* sont :

— la famille infini $G(d, e, n)$, où d, e, n sont des entiers strictement positifs tels que $e \mid d$,

— les groupes exceptionnels $G_4, G_5, \ldots, G_{37}$.

La classification des groupes de réflexion complexes finis

(Shephard et Todd)

Tous les groupes de réflexion complexes finis sont connus !

Tous les groupes de réflexion complexes finis *irréductibles* sont :

— la famille infini $G(d, e, n)$, où d, e, n sont des entiers strictement positifs tels que $e \mid d$,

— les groupes exceptionnels $G_4, G_5, \ldots, G_{37}$.

Tout groupe de réflexion complexe fini est un produit des groupes irréductibles.

Les groupes $G(d, e, n)$

Soit d, e, n des entiers strictement positifs tels que $e \mid d$. Le groupe $G(d, e, n)$ est constitué des matrices $n \times n$, où :

- *exactement* un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne est non nul ;
- cet élément non nul est toujours une racine d-ième de l'unité ;
- le produit de tous éléments non nuls est égal à une racine (d/e)-ième de l'unité.

Les groupes $G(d, e, n)$

Soit d, e, n des entiers strictement positifs tels que $e \mid d$. Le groupe $G(d, e, n)$ est constitué des matrices $n \times n$, où :

- *exactement* un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne est non nul ;
- cet élément non nul est toujours une racine d-ième de l'unité ;
- le produit de tous éléments non nuls est égal à une racine (d/e)-ième de l'unité.

Cas spéciaux :

- $G(1, 1, n) = S_n$.

Les groupes $G(d, e, n)$

Soit d, e, n des entiers strictement positifs tels que $e \mid d$. Le groupe $G(d, e, n)$ est constitué des matrices $n \times n$, où :

- *exactement* un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne est non nul ;
- cet élément non nul est toujours une racine d-ième de l'unité ;
- le produit de tous éléments non nuls est égal à une racine (d/e)-ième de l'unité.

Cas spéciaux :

- $G(1, 1, n) = S_n$.
- $G(2, 1, n) = B_n$.

Les groupes $G(d,e,n)$

Soit d, e, n des entiers strictement positifs tels que $e \mid d$. Le groupe $G(d,e,n)$ est constitué des matrices $n \times n$, où :

- *exactement* un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne est non nul ;
- cet élément non nul est toujours une racine d-ième de l'unité ;
- le produit de tous éléments non nuls est égal à une racine (d/e)-ième de l'unité.

Cas spéciaux :

- $G(1,1,n) = S_n$.
- $G(2,1,n) = B_n$.
- $G(2,2,n) = D_n$.

Groupes de réflexion complexes bien engendrés

Groupes de réflexion complexes bien engendrés

Un groupe de réflexion complexe W de rang n est appelé *bien engendré*, s'il est engendré par n réflexions (complexes).

La classification des groupes de réflexion complexes bien engendrés

(Shephard et Todd)

Tous les groupes de réflexion complexes bien engendrés *irréductibles* sont :

- les deux familles infinis $G(d, 1, n)$ et $G(e, e, n)$, où d, e, n sont des entiers strictement positifs,
- les groupes exceptionnels
$G_4, G_5, G_6, G_8, G_9, G_{10}, G_{14}, G_{16}, G_{17}, G_{18}, G_{20}, G_{21},$
$G_{23} = H_3, G_{24}, G_{25}, G_{26}, G_{27},\ G_{28} = F_4, G_{29}, G_{30} = H_4, G_{32},$
$G_{33},\ G_{34}, G_{35} = E_6,\ G_{36} = E_7,\ G_{37} = E_8.$

Ordre absolu pour des groupes de réflexion complexes

Ordre absolu pour des groupes de réflexion complexes

Donné un groupe de réflexion complexe W, définissons la *longeur absolue* $\ell_T(w)$ d'un élément $w \in W$ par le plus petit k tel que

$$w = t_1 t_2 \cdots t_k,$$

où tous les t_i sont des réflexions (complexes).

Ordre absolu pour des groupes de réflexion complexes

Donné un groupe de réflexion complexe W, définissons la *longeur absolue* $\ell_T(w)$ d'un élément $w \in W$ par le plus petit k tel que

$$w = t_1 t_2 \cdots t_k,$$

où tous les t_i sont des réflexions (complexes).

Définissons l'*ordre absolu* $\leq_T$ par

$$u \leq_T w \quad \text{si et seulement si } \ell_T(u) + \ell_T(u^{-1}w) = \ell_T(w).$$

Partitions non croisées associées aux groupes de réflexion

Partitions non croisées associées aux groupes de réflexion

Les *degrés* $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ d'un groupe de réflexion (complexe) W sont les degrés d'un système des générateurs polynomials homogènes de l'anneau des invariants de W. Le plus large degré, d_n, est appelé *nombre de Coxeter*, et il est noté h.

Partitions non croisées associées aux groupes de réflexion

Les *degrés* $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ d'un groupe de réflexion (complexe) W sont les degrés d'un système des générateurs polynomials homogènes de l'anneau des invariants de W. Le plus large degré, d_n, est appelé *nombre de Coxeter*, et il est noté h.

Un *élément régulier* (au sens de Springer) est un élément $w \in W$ qui a une valeur propre, disons ζ, telle que le vecteur propre correspondant n'est pas contenu dans un hyperplan de réflexion. Si cette valeur propre ζ est une racine h-iéme de l'unité primitive, alors w est appelé *élément de Coxeter*. Nous écrivons toujours c pour un élément de Coxeter.

Partitions non croisées associées aux groupes de réflexion

Les *degrés* $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ d'un groupe de réflexion (complexe) W sont les degrés d'un système des générateurs polynomials homogènes de l'anneau des invariants de W. Le plus large degré, d_n, est appelé *nombre de Coxeter*, et il est noté h.

Un *élément régulier* (au sens de Springer) est un élément $w \in W$ qui a une valeur propre, disons ζ, telle que le vecteur propre correspondant n'est pas contenu dans un hyperplan de réflexion. Si cette valeur propre ζ est une racine h-iéme de l'unité primitive, alors w est appelé *élément de Coxeter*. Nous écrivons toujours c pour un élément de Coxeter.

Les partitions non croisées associées à un groupe de réflexion complexe bien engendré W sont définies par

$$NC(W) := \{w \in W : w \le_T c\},$$

où c est un élément de Coxeter dans W.

Partitions non croisées associées aux groupes de réflexion

Toutes les propriétés des partitions non croisées de Kreweras se généralisent à $NC(W)$:

— *relation d'ordre* : $\le_T$

— $NC(W)$ est un ensemble partiellement ordonné *gradué* :

$$\text{rang de } w \;=\; \ell_T(w)$$

— $NC(W)$ est un *treillis*

— $NC(W)$ est *auto-dual* :
"complément de Kreweras" est $w \mapsto cw^{-1}$

— *nombre de Catalan* pour W : si W est irréductible, alors

$$|NC(W)| = \prod_{i=1}^{n} \frac{h+d_i}{d_i}$$

Partitions non croisées m-divisibles associées aux groupes de réflexion (Armstrong)

Partitions non croisées m-divisibles associées aux groupes de réflexion (Armstrong)

Les partitions non croisées m-divisibles associées au groupe de réflexion complexe W sont définies par

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et } \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

où c est un élément de Coxeter dans W.

Partitions non croisées m-divisibles associées aux groupes de réflexion (Armstrong)

Les partitions non croisées m-divisibles associées au groupe de réflexion complexe W sont définies par

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et } \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

où c est un élément de Coxeter dans W.

En particulier,

$$NC^1(W) \cong NC(W).$$

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et } \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et } \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3,\ W = A_6$

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et } \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3,\ W = A_6 (= S_7)$:

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et } \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3$, $W = A_6 (= S_7)$:
$w_0 = (4, 5, 6)$, $w_1 = (3, 6)$, $w_2 = (1, 7)$, et $w_3 = (1, 2, 6)$.

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et}$$
$$\ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3$, $W = A_6 (= S_7)$:
$w_0 = (4, 5, 6)$, $w_1 = (3, 6)$, $w_2 = (1, 7)$, et $w_3 = (1, 2, 6)$.
Maintenant "gonflez" w_1, w_2, w_3 :

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et}$$
$$\ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3$, $W = A_6 (= S_7)$:
$w_0 = (4,5,6)$, $w_1 = (3,6)$, $w_2 = (1,7)$, et $w_3 = (1,2,6)$.
Maintenant "gonflez" w_1, w_2, w_3 :

$$(7,16) \quad (2,20) \quad (3,6,18)$$

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et} \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3$, $W = A_6 (= S_7)$:
$w_0 = (4, 5, 6)$, $w_1 = (3, 6)$, $w_2 = (1, 7)$, et $w_3 = (1, 2, 6)$.
Maintenant "gonflez" w_1, w_2, w_3 :

$$(7, 16)^{-1}\,(2, 20)^{-1}\,(3, 6, 18)^{-1}$$

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et} \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

Exemple pour $m = 3$, $W = A_6 (= S_7)$:
$w_0 = (4, 5, 6)$, $w_1 = (3, 6)$, $w_2 = (1, 7)$, et $w_3 = (1, 2, 6)$.
Maintenant "gonflez" w_1, w_2, w_3 :

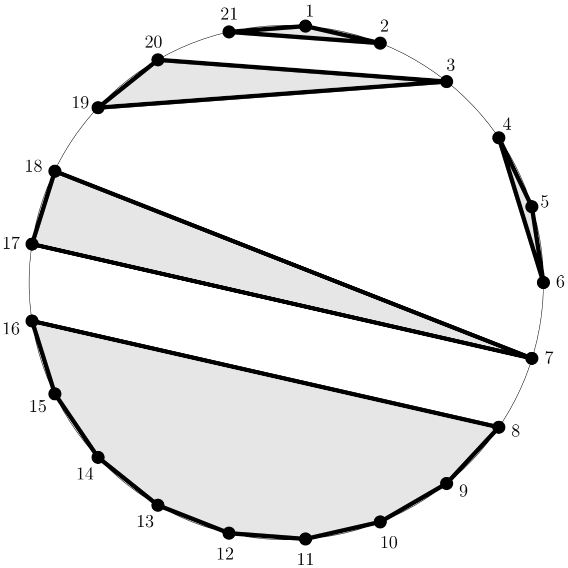
$$(1, 2, \dots, 21)\,(7, 16)^{-1}\,(2, 20)^{-1}\,(3, 6, 18)^{-1}$$

Réalisation combinatoire pour le type A (Armstrong)

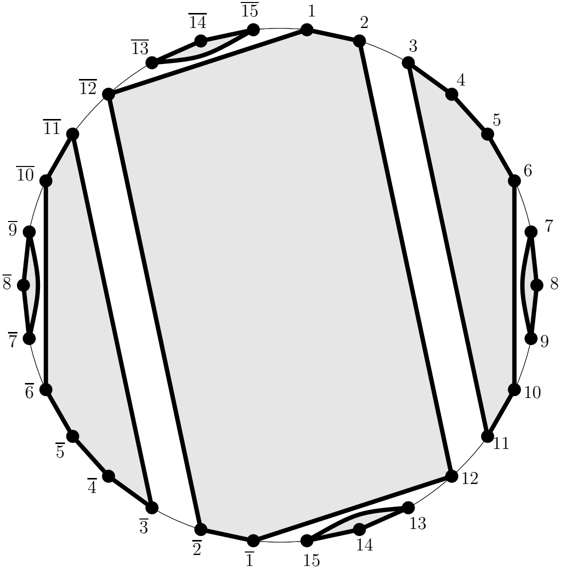
$$NC^m(W) = \big\{(w_0; w_1, \dots, w_m) : w_0 w_1 \cdots w_m = c \text{ et} \\ \ell_T(w_0) + \ell_T(w_1) + \cdots + \ell_T(w_m) = \ell_T(c)\big\},$$

EXEMPLE POUR $m = 3$, $W = A_6 (= S_7)$:
$w_0 = (4, 5, 6)$, $w_1 = (3, 6)$, $w_2 = (1, 7)$, et $w_3 = (1, 2, 6)$.
Maintenant "gonflez" w_1, w_2, w_3 :

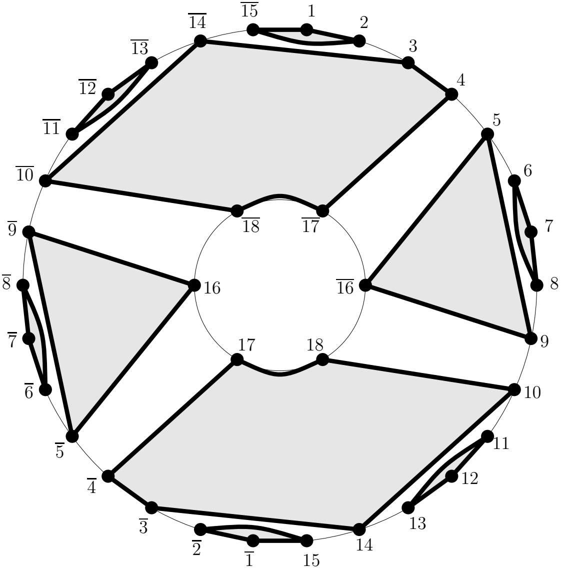
$$(1, 2, \dots, 21)\,(7, 16)^{-1}\,(2, 20)^{-1}\,(3, 6, 18)^{-1} \\ = (1, 2, 21)\,(3, 19, 20)\,(4, 5, 6)\,(7, 17, 18)\,(8, 9, \dots, 16).$$



Une partition non croisée 3-divisible du type A_6



Une partition non croisée 3-divisible du type B_5



Une partition non croisée 3-divisible du type D_6

Propriétés de $NC^m(W)$

— *relation d'ordre* :

$$(u_0; u_1, \ldots, u_m) \le (w_0; w_1, \ldots, w_m)$$

si et seulement si $u_1 \ge w_1$, ..., $u_m \ge w_m$;

— $NC^m(W)$ est un *semi-treillis* ;

— $NC^m(W)$ est *gradué* :

$$\text{rang de } (w_0; w_1, \ldots, w_m) = \ell_T(w_0)$$

Les nombres de Fuß–Catalan associés aux groupes de réflexion

Théorème (Athanasiadis, Bessis, Corran, Chapoton, Edelman, Reiner)

Si W est irréductible, alors

$$|NC^m(W)| = \prod_{i=1}^{n} \frac{mh + d_i}{d_i}.$$

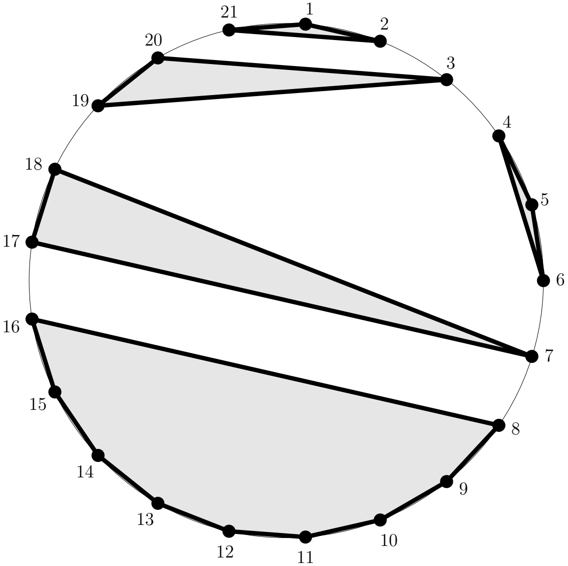
Soit $\phi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \\ \mapsto \big((cw_m c^{-1}) w_0 (cw_m c^{-1})^{-1}; cw_m c^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}\big).$$

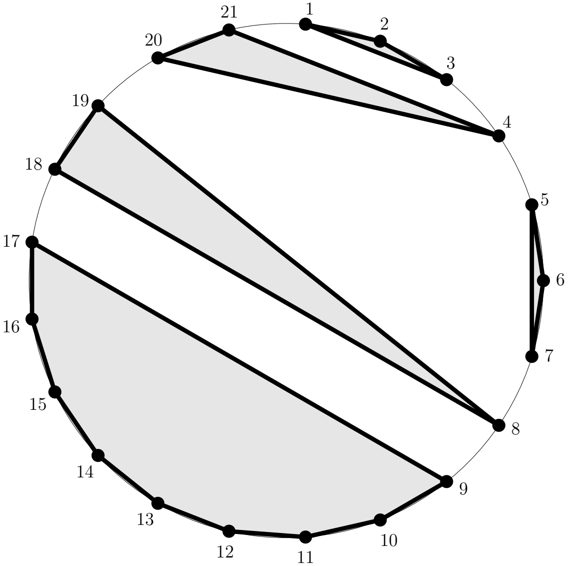
Elle engendre un groupe cyclique d'ordre mh.

Réalisation combinatoire de l'action (type A)

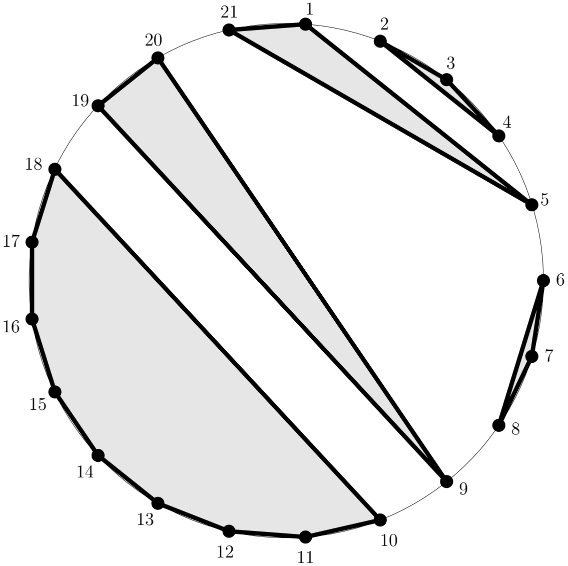
Réalisation combinatoire de l'action (type A)



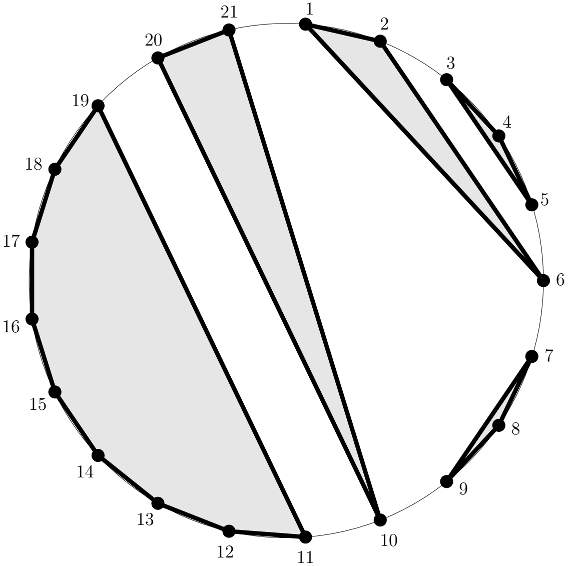
Réalisation combinatoire de l'action (type A)



Réalisation combinatoire de l'action (type A)



Réalisation combinatoire de l'action (type A)



Soit $\phi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \\ \mapsto \big((cw_mc^{-1})w_0(cw_mc^{-1})^{-1}; cw_mc^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}\big).$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre mh.

Soit $\phi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$\begin{aligned}&(w_0; w_1, \dots, w_m)\\ &\qquad \mapsto \big((cw_mc^{-1})w_0(cw_mc^{-1})^{-1}; cw_mc^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}\big).\end{aligned}$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre mh.
De plus, soit

$$\mathrm{Cat}^m(W;q) := \prod_{i=1}^{n} \frac{[mh+d_i]_q}{[d_i]_q},$$

où $[\alpha]_q := (1-q^\alpha)/(1-q)$.

Soit $\phi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \\ \mapsto \big((cw_mc^{-1})w_0(cw_mc^{-1})^{-1}; cw_mc^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}\big).$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre mh.
De plus, soit

$$\mathrm{Cat}^m(W;q) := \prod_{i=1}^{n} \frac{[mh+d_i]_q}{[d_i]_q},$$

où $[\alpha]_q := (1-q^\alpha)/(1-q)$.

Théorème (avec T. W. Müller)

Le triplet $(NC^m(W), \langle\phi\rangle, \mathrm{Cat}^m(W;q))$ satisfait au phénomène du crible cyclique.

(Originellement conjecturé par Armstrong, Bessis et Reiner)

Soit $\psi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$\big(w_0; w_1, \dots, w_m\big) \mapsto \big(c w_m c^{-1}; w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\big).$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre $(m+1)h$.

Soit $\psi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \mapsto \big(c w_m c^{-1}; w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\big).$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre $(m+1)h$.

(Si l'on fait le plongement

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \mapsto \big(\mathrm{id}; w_0, w_1, \dots, w_m\big).$$

alors, pour les types A, B et D, nous parlons des partitions non croisées dont toutes les tailles de blocs sont égales à $m+1$, et cette action est encore la rotation.)

Soit $\psi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \mapsto \big(c w_m c^{-1}; w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\big).$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre $(m+1)h$.

(Si l'on fait le plongement

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \mapsto \big(\mathrm{id}; w_0, w_1, \dots, w_m\big).$$

alors, pour les types A, B et D, nous parlons des partitions non croisées dont toutes les tailles de blocs sont égales à $m+1$, et cette action est encore la rotation.)

De plus, soit

$$\mathrm{Cat}^m(W; q) := \prod_{i=1}^{n} \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q},$$

où $[\alpha]_q := (1 - q^\alpha)/(1 - q)$.

Soit $\psi : NC^m(W) \to NC^m(W)$ l'application définie par

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \mapsto \left(cw_m c^{-1}; w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\right).$$

Elle engendre un groupe cyclique d'ordre $(m+1)h$.

(Si l'on fait le plongement

$$(w_0; w_1, \dots, w_m) \mapsto \left(\mathrm{id}; w_0, w_1, \dots, w_m\right).$$

alors, pour les types A, B et D, nous parlons des partitions non croisées dont toutes les tailles de blocs sont égales à $m+1$, et cette action est encore la rotation.)

De plus, soit

$$\mathrm{Cat}^m(W; q) := \prod_{i=1}^{n} \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q},$$

où $[\alpha]_q := (1 - q^\alpha)/(1 - q)$.

Théorème (avec T. W. Müller)

Le triplet $(NC^m(W), \langle \phi \rangle, \mathrm{Cat}^m(W; q))$ satisfait au phénomène du crible cyclique.

(Originellement conjecturé par Bessis et Reiner)

Les deux phénomènes du crible cycliques pour $NC^m\big(G(d,1,n)\big)$ sont une conséquence du résultat suivant.

Théorème

Soit m, n, r des entiers strictement positifs tels que $r \geq 2$ et $r \mid mn$. Pour des entiers positifs $b_1, b_2, \dots, b_n$, le nombre de partitions non croisées m-divisibles de $\{1, 2, \dots, mn\}$ (au sens d'Edelman) qui sont invariantes sous la rotation $i \mapsto i + \frac{mn}{r}$ mod mn et qui ont éxactement rb_i blocs "non-nuls" de taille mi, $i = 1, 2, \dots, n$, est donné par

$$\binom{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{b_1, b_2, \dots, b_n} \binom{mn/r}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

si $b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n \leq \lfloor n/r \rfloor$, et il est zero sinon.

Pour montrer le phénomène du crible cyclique pour $NC^m\big(G(e,e,n)\big)$, on démontre des résultats d'énumeration analogues pour des partitions non croisées m-divisibles sur une couronne.

Pour montrer le phénomène du crible cyclique pour $NC^m\big(G(e,e,n)\big)$, on démontre des résultats d'énumeration analogues pour des partitions non croisées m-divisibles sur une couronne.

Pour les groupes exceptionnels, nous procédons par une vérification (longue) utilisant un ordinateur.