Développements récents dans le modèle combinatoire du tas de sable sur un graphe

Robert Cori, Labri Bordeaux

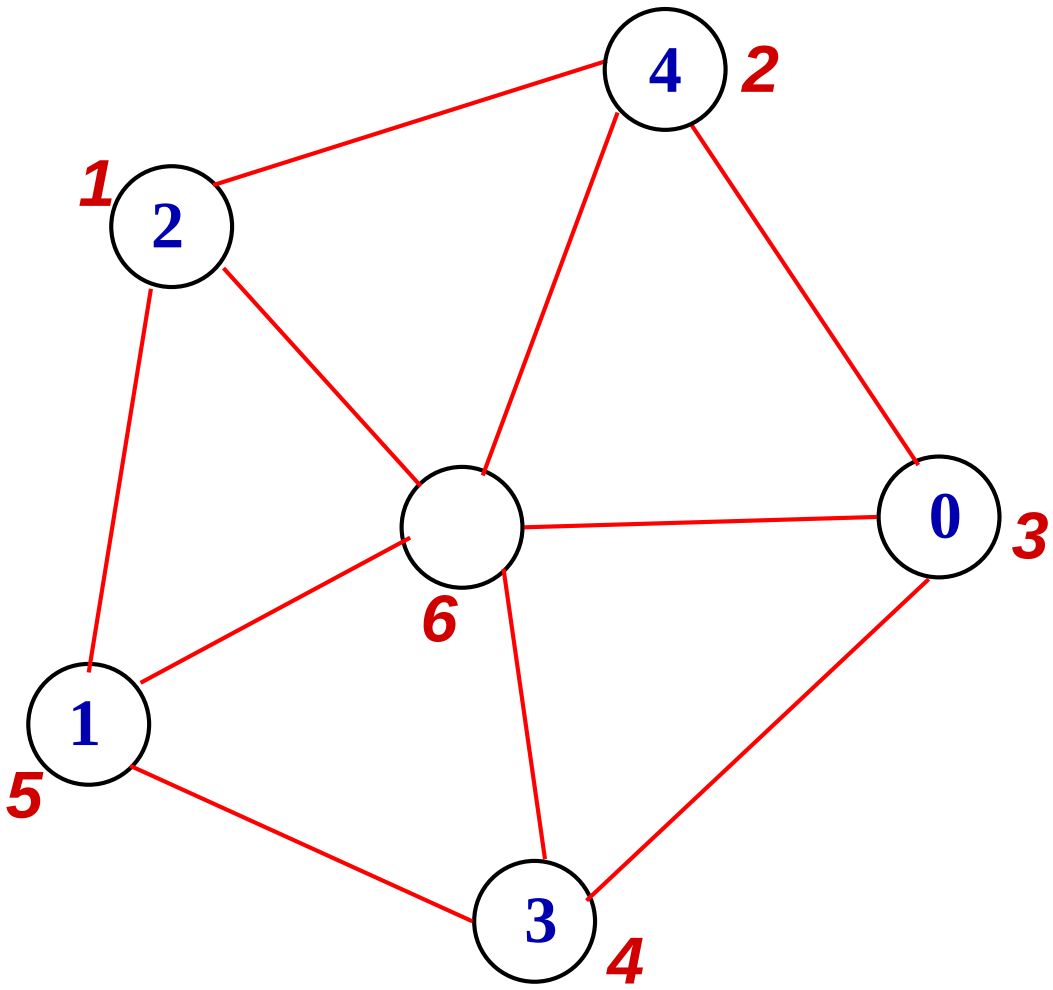
Tas de sable sur un graphe (Dhar, Biggs, C. et Rossin)

- Un graphe connexe $G = (X, E)$, sans boucle mais les arêtes multiples sont autorisées.
- Les sommets sont au nombre de n : $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on note m le nombre d'arêtes.
- Chaque sommet contient un certain nombre de grains.
- Il se produit des éboulements sauf sur un des sommets (le puits).

Configurations

- Une configuration décrit le nombre de grains en chaque sommet
- On la considère comme une somme formelle:

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} f_i x_i, \quad f_i \in \mathbb{N}$$



$$f = 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 + x_5$$

Eboulements

- Un sommet i contenant un nombre de grains supérieur ou égal à son degré donne un grain à chacun de ses voisins
- Ceci s'écrit algébriquement par:

  $f \rightarrow g$

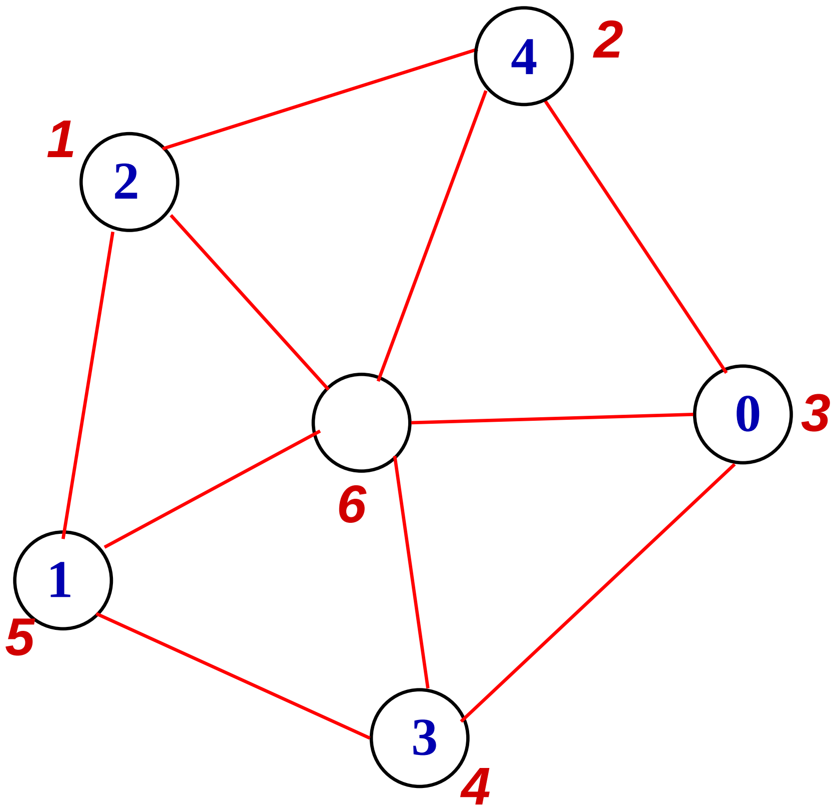
  $$\begin{cases} g_i = f_i - d_i \\ g_j = f_j + e_{i,j} \quad \text{(nombre d'arêtes entre } x_i \text{ et } x_j \text{)} \end{cases}$$

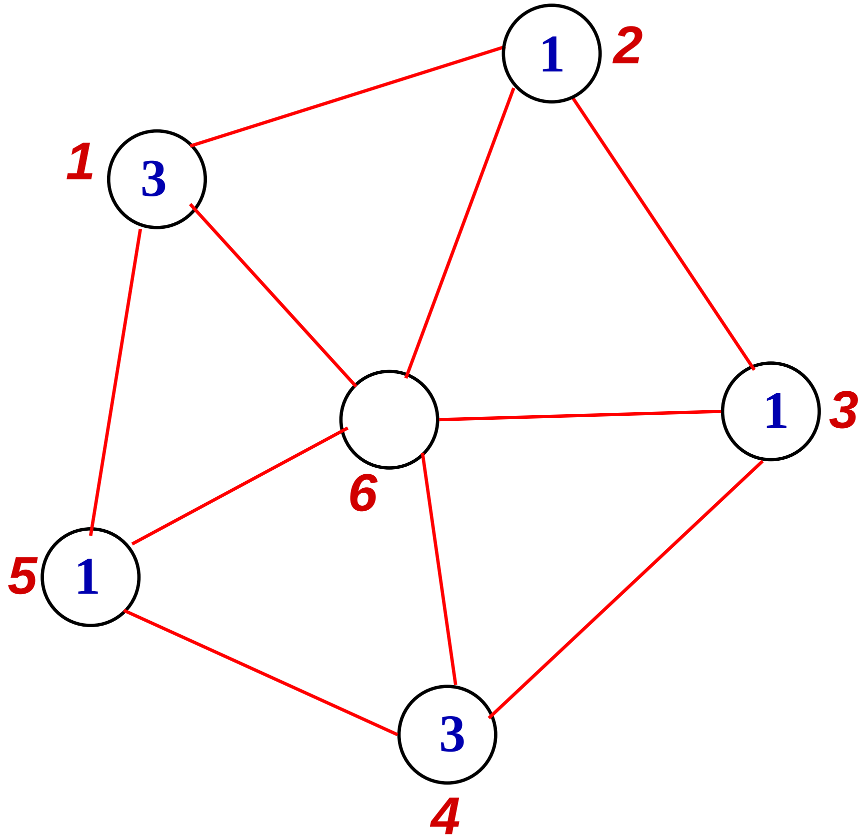
- Soit:

  $$g = f - \Delta^{(i)}$$

  où

  $$\Delta^{(i)} = d_i x_i - \sum_{j=1}^{n-1} e_{i,j} x_j$$

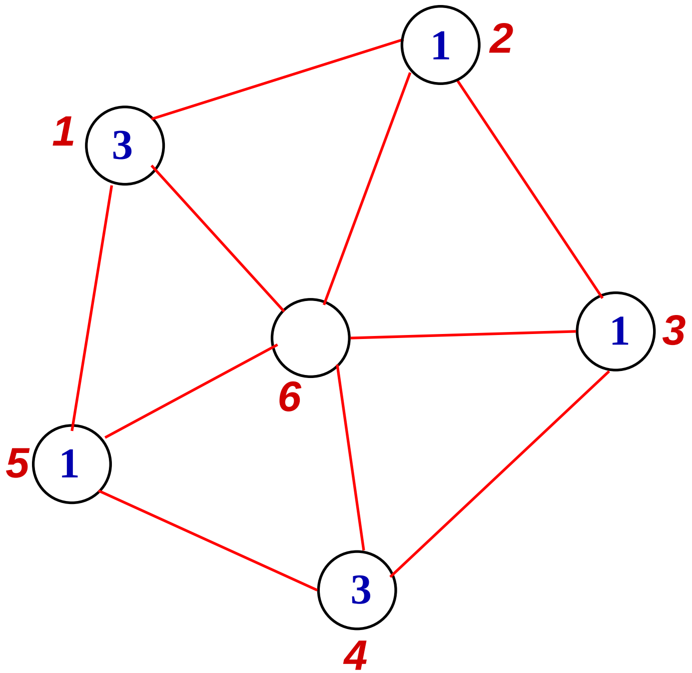


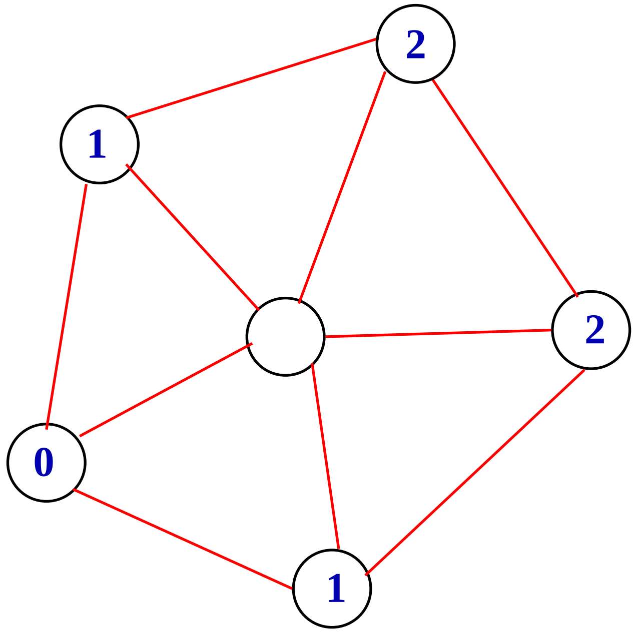


$$f = 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 + x_5$$

$$g = 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = f - \Delta^{(2)}$$

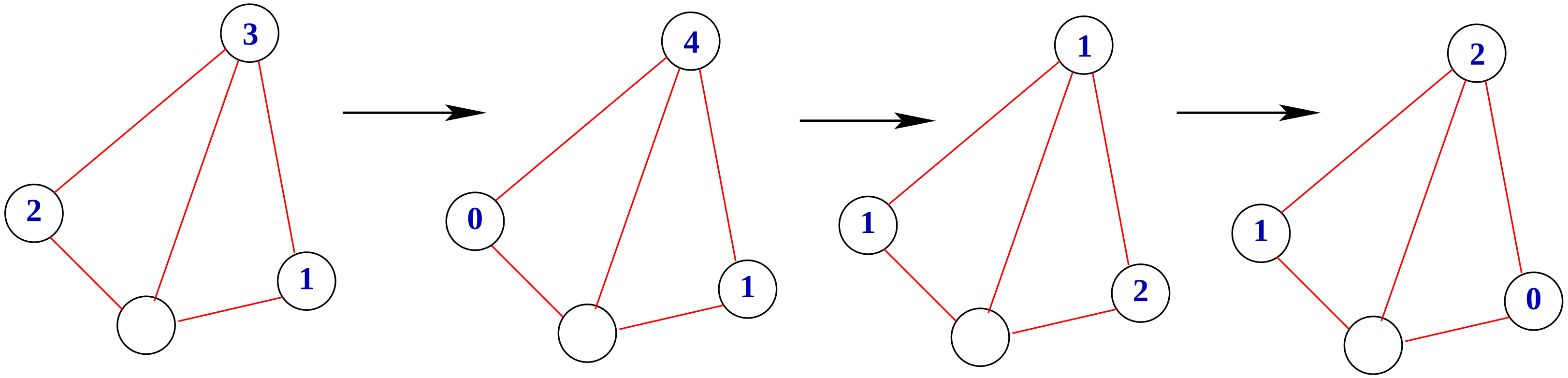
Configurations stables





- Une configuration f est stable si $f_i < d_i$ pour tout i
- A partir d'une configuration quelconque f une configuration stable est atteinte après un certain nombre d'éboulements
- Cette configuration stable ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont effectués les éboulements

Exemple



Suite d'éboulements:

$$g \xrightarrow{*} f$$

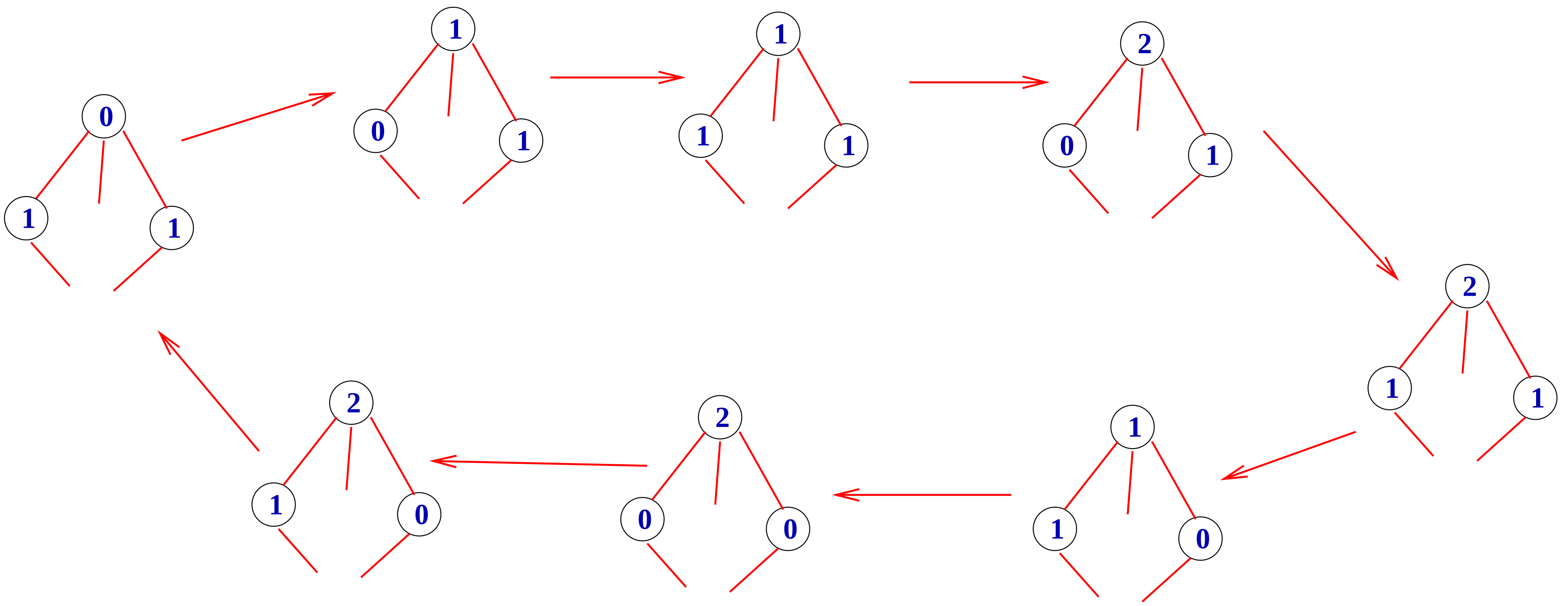
Configurations récurrentes

- Une configuration stable u est *récurrente* si on peut l'obtenir à partir d'elle même par une suite (non vide) d'operations d'ajout de grains suivi d'éboulements.
- **Théorème** Le nombre de configurations récurrentes est égal au nombre d'arbres recouvrants du graphe.
- **Algorithme de Dhar**

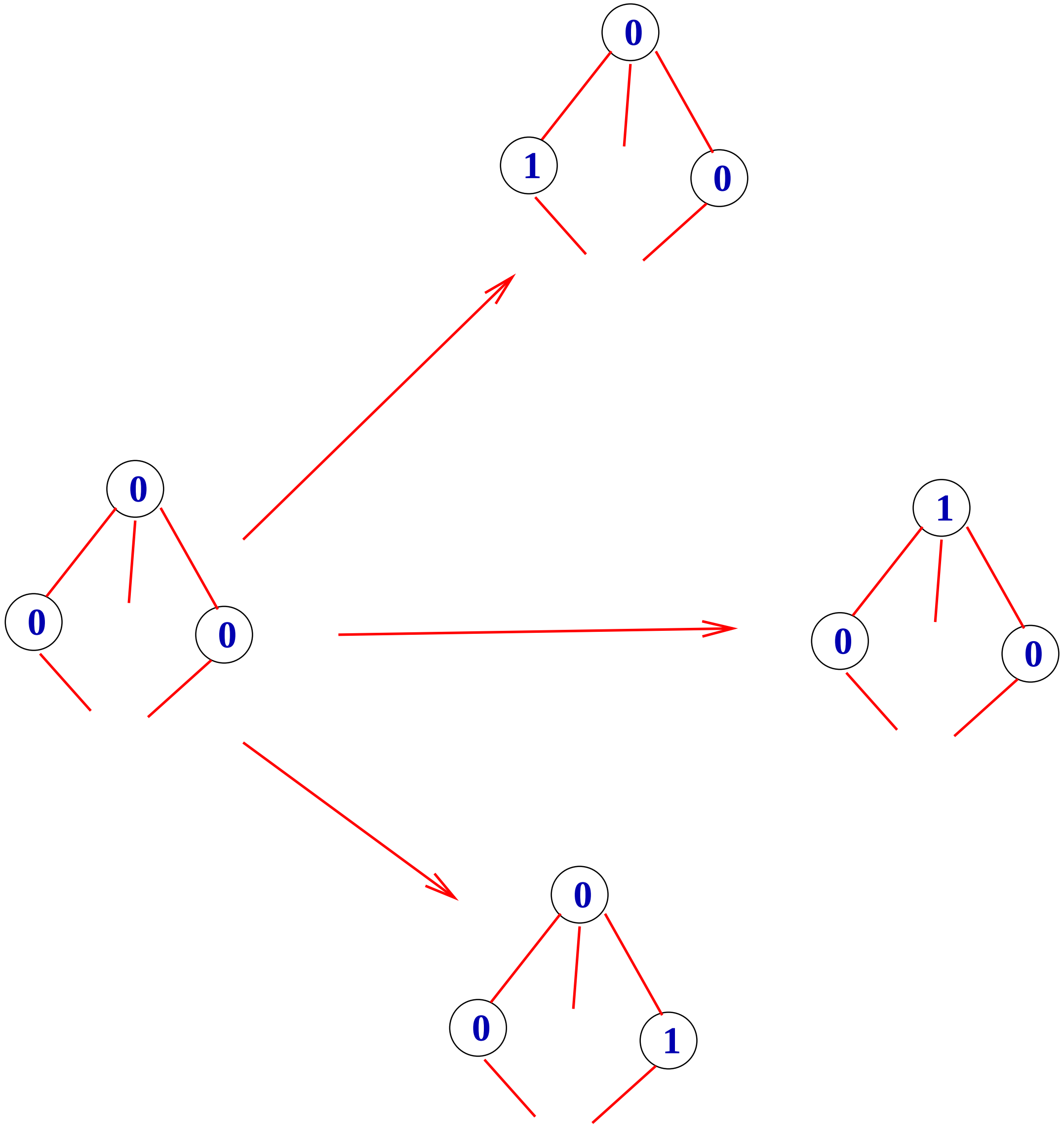
  Une configuration f est récurrente si et seulement si la configuration $g = f - \Delta^{(n)}$, où n est le puits, satisfait:

$$g \xrightarrow{*} f$$

Configurations récurrentes



Configurations transientes



Relation d'équivalence

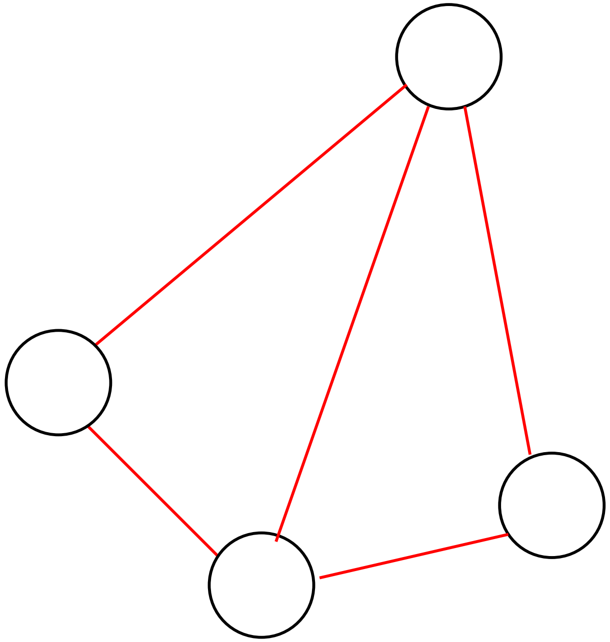
- Deux configurations sont équivalentes si leur différence est une combinaison linéaire des $\Delta^{(i)} = d_i x_i - \sum_{j=1}^{n-1} e_{i,j} x_j$
- Ceci définit une relation d'équivalence telle que:

Théorème Toute classe contient exactement une configuration récurrente.

Matrice Laplacienne

- Les $\Delta^{(i)}$ constituent les lignes d'une matrice appelée la Laplacienne (en fait c'est un mineur de celle-ci)
- Le nombre de classes est égal au déterminant de ce mineur

Exemple:

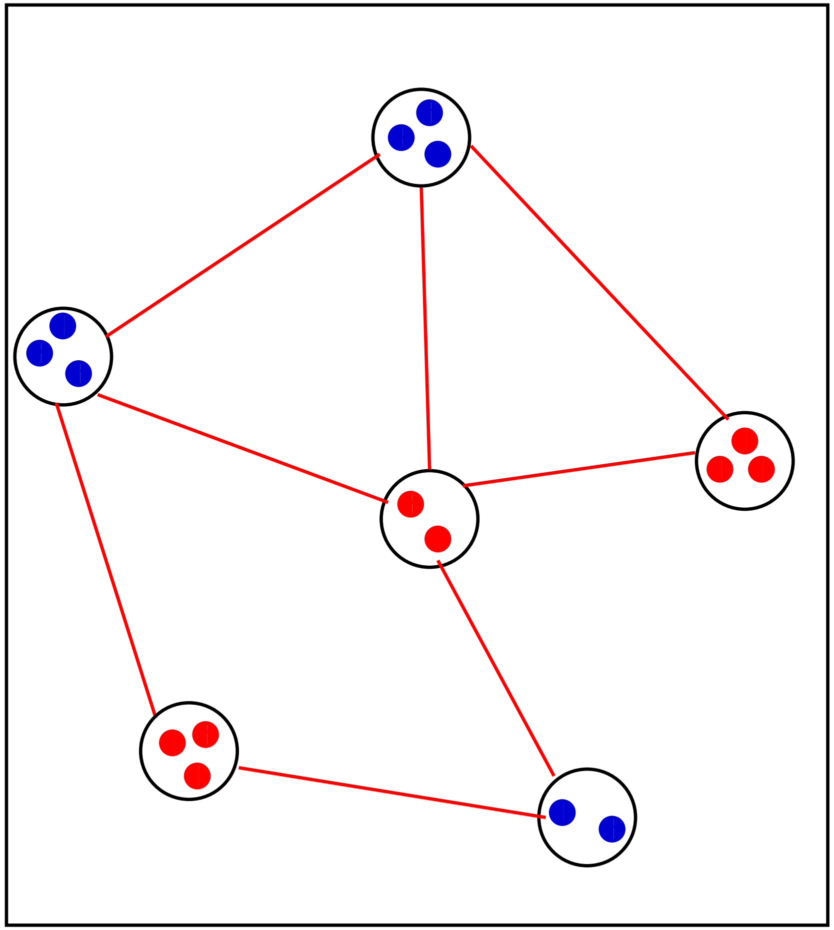


$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tas de sable bicolore

- Un graphe connexe $G = (X, E)$
- Chaque sommet contient des grains bleus ou des grains rouges.
- Il se produit des éboulements.

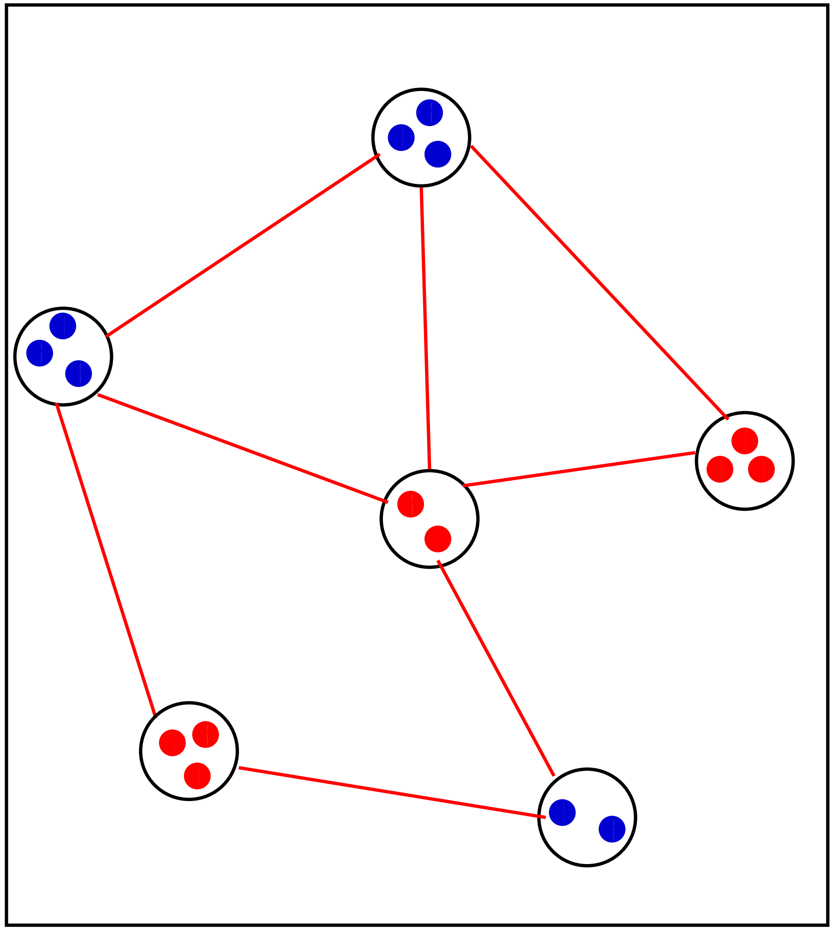
Exemple



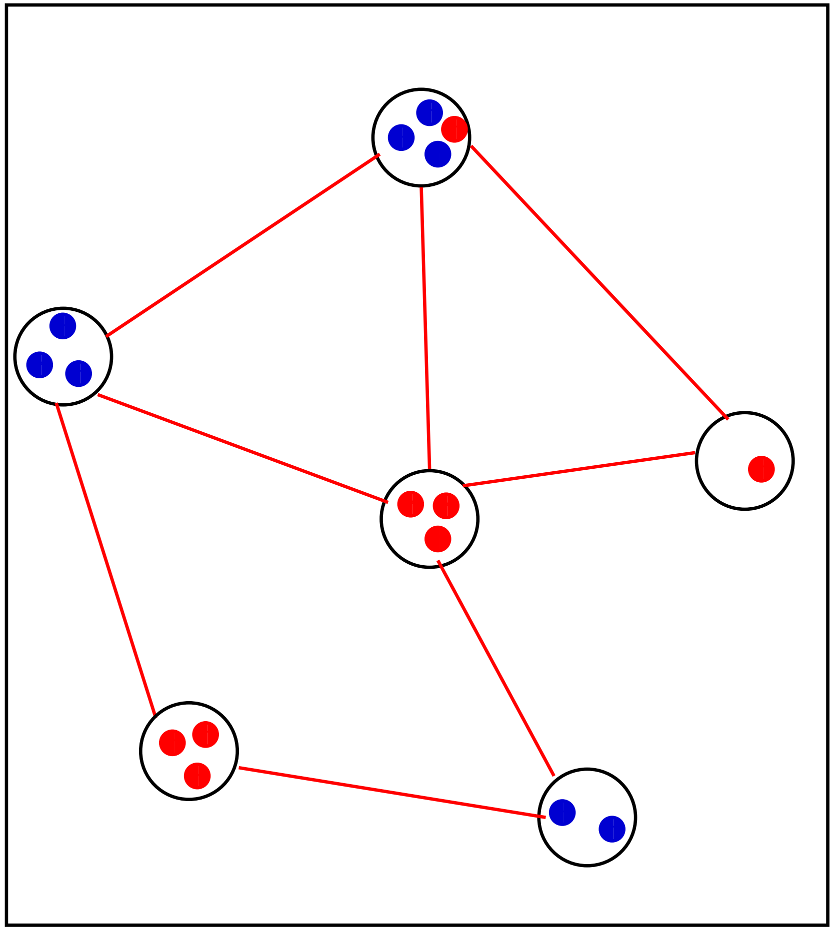
Règle d'éboulement

- Un sommet peut s'ébouler s'il contient un nombre de grains supérieur ou égal à son degré d_i
- Le sommet i perd alors d_i grains,
- Les sommets voisins de i gagnent chacun un des grains de i,
- Deux grains de couleurs différentes sur un même sommet se détruisent mutuellement.

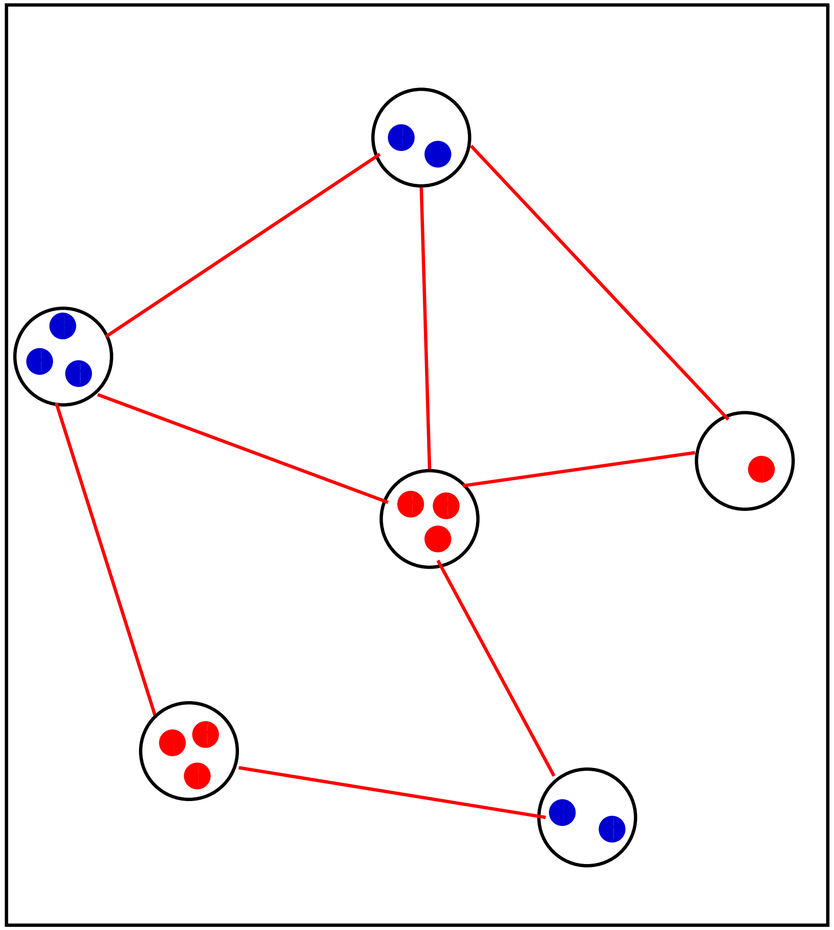
Exemple



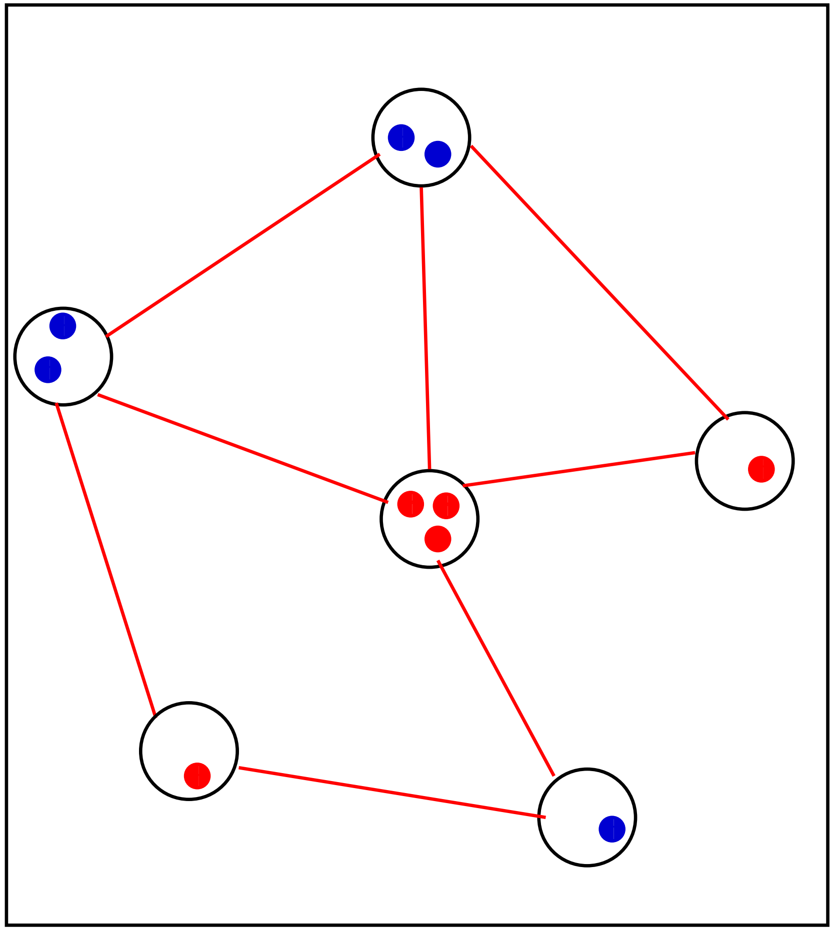
Exemple



Exemple

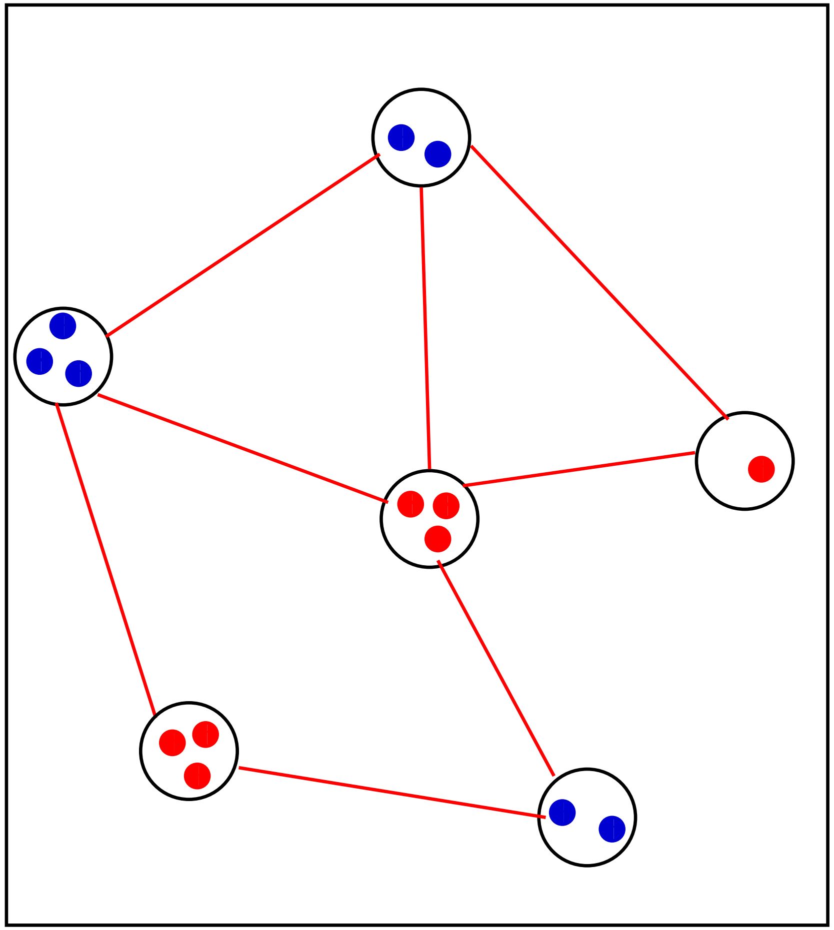


Exemple

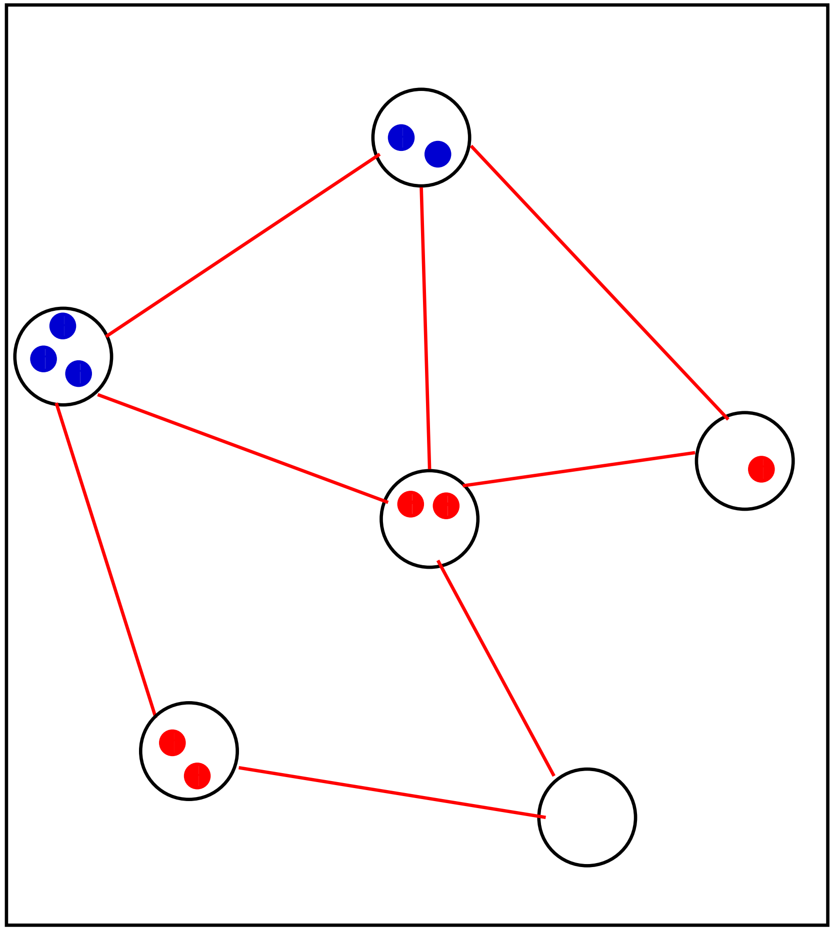


Le résultat peut dépendre de l’ordre dans lequel sont effectués les éboulements

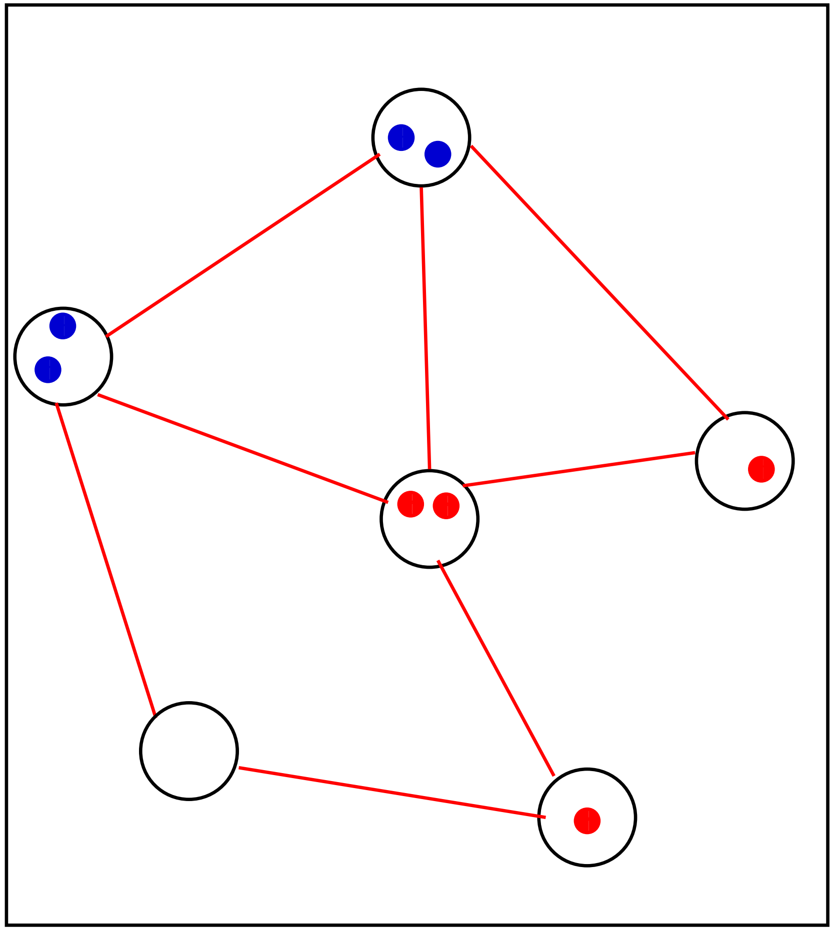
Exemple



Exemple

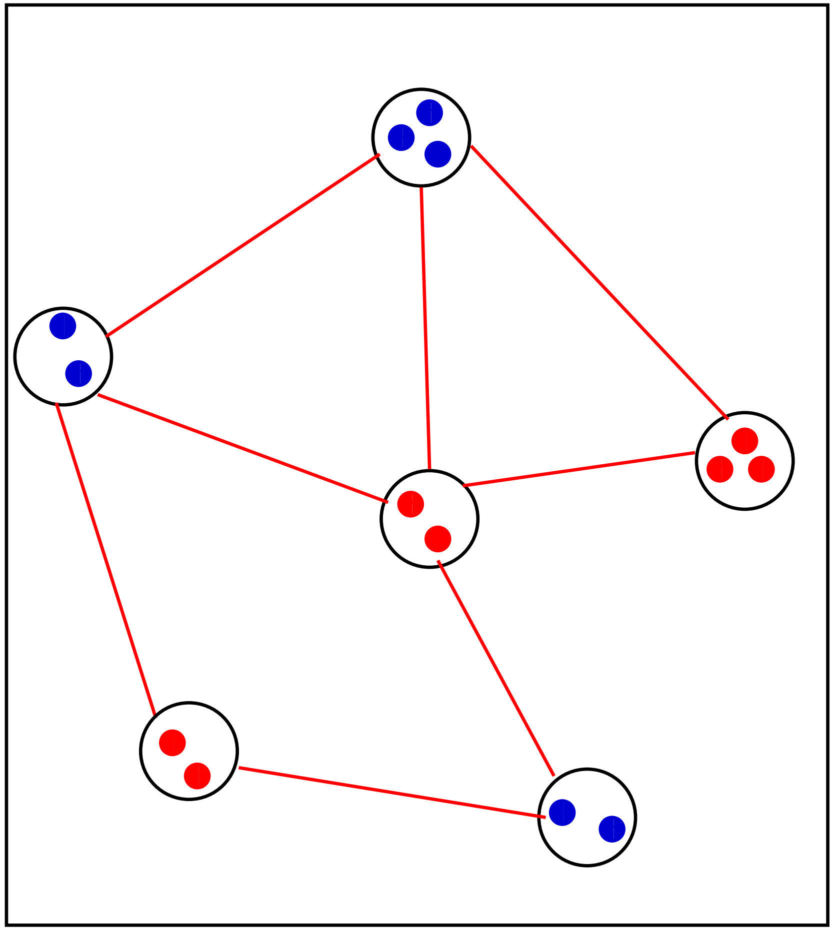


Exemple

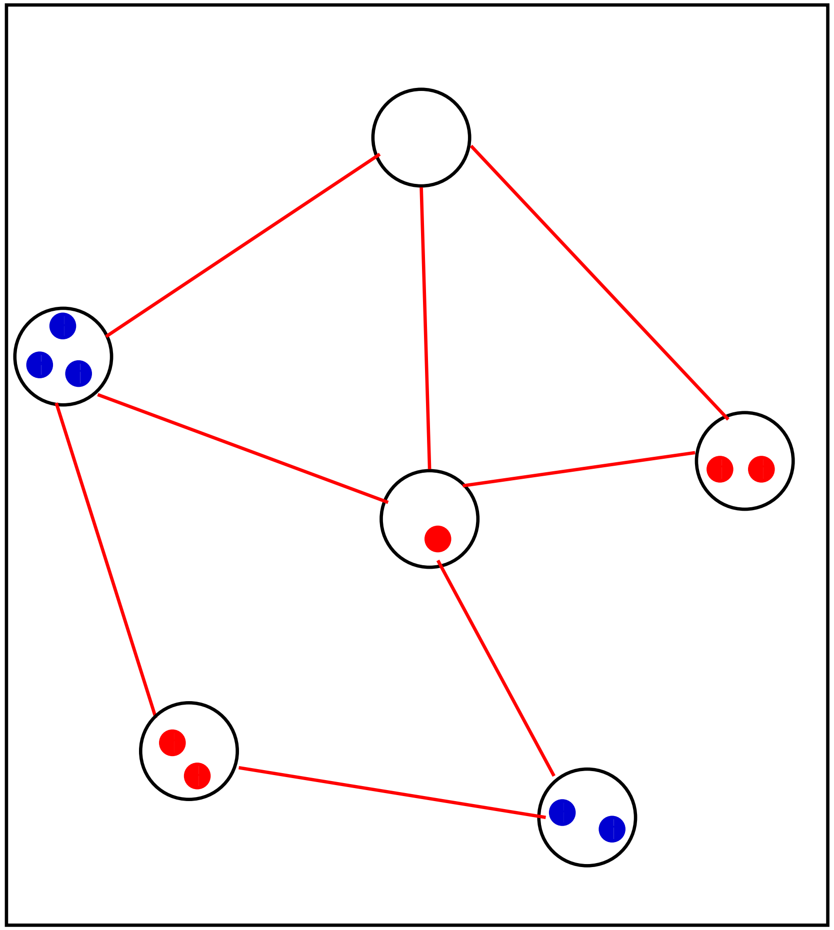


Peut-on faire disparaître tous les grains?

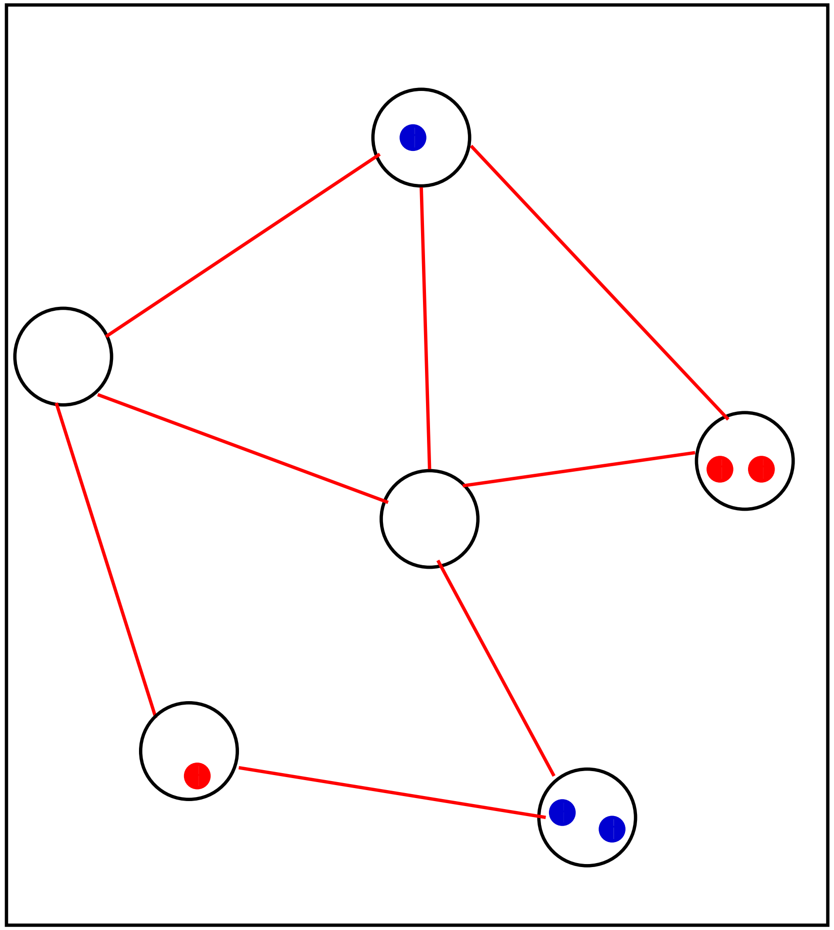
Exemple



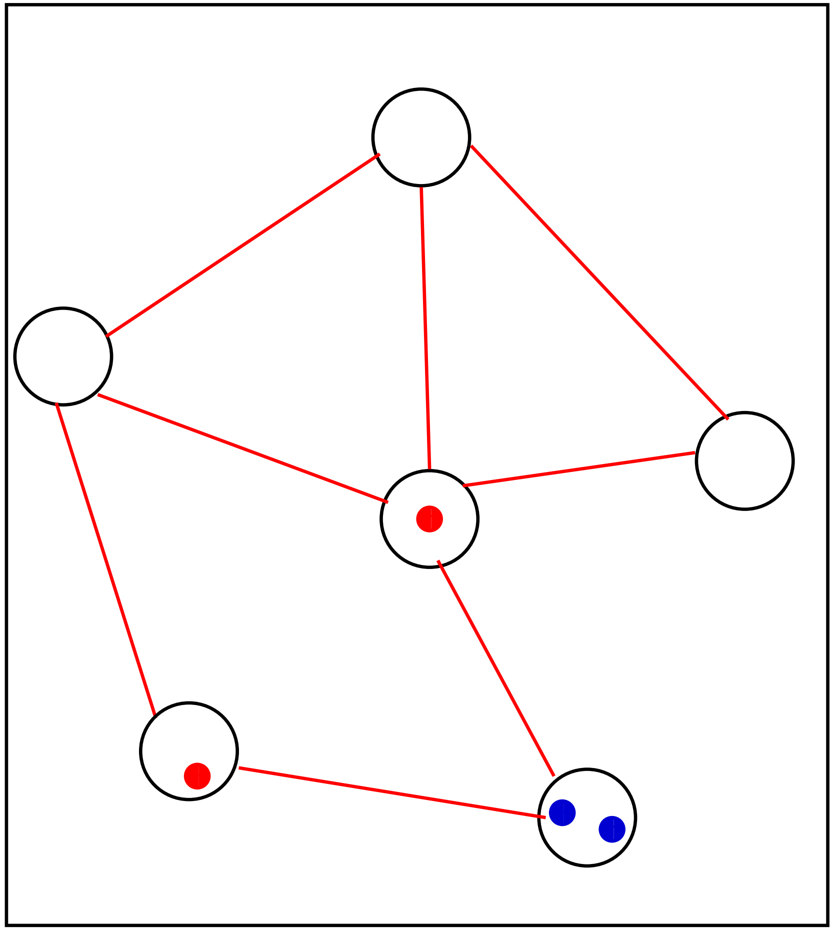
Exemple



Exemple



Exemple



Questions

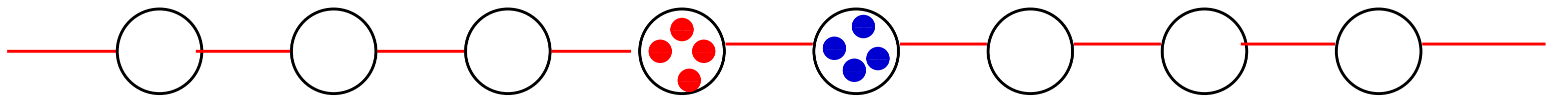
Une configuration est *stable* si aucun éboulement ne peut se produire.

- Combien de configurations stables différentes obtient-on à partir d'une configuration donnée?
- Peut-on obtenir la configuration sans aucun grain?
- On se donne deux configurations stables, peuvent-elles être obtenues à partir d'une même configuration?

Un résultat

- On considère le graphe constitué d'un chemin de longueur $4n$
- La configuration initiale est constituée de n grains rouges et n grains bleus sur deux sommets voisins au milieu du chemin
- Le nombre de configurations stables différentes obtenues est:

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$$



Retour à la notation algébrique

- Une configuration sur $G = (X, E)$ est représentée par une somme formelle

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \qquad u_i \in \mathbb{Z}$$

- Si i contient a grains rouges alors $u_i = a$
- Si i contient b grains bleus alors $u_i = -b$
- Un éboulement d'un sommet i contenant des grains bleus revient à ajouter à la configuration u la configuration $\Delta^{(i)}$
  $\Delta^{(i)}_i = d_i \quad \Delta^{(i)}_j = -e_{i,j}$ (nombre d'arêtes entre i et j)
- Un éboulement d'un sommet i contenant des grains rouges revient à soustraire à la configuration u la configuration $\Delta^{(i)}$

Un théorème de style Riemann-Roch pour les graphes

- Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe où les arêtes multiples sont autorisées, ayant n sommets et m arêtes.

- Une configuration u est une somme formelle:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \qquad u_i \in \mathbb{Z}$$

- Le *degré* d'une configuration u est la somme des u_i :

$$deg(u) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} u_i$$

- Une configuration est *positive* si $u_i \geq 0$ pour tout i.

Relation Laplacienne

- On considère les configurations *Laplaciennes:*

$$\Delta^{(i)} = d_i x_i - \sum_{j=1}^{n} e_{i,j} x_j$$

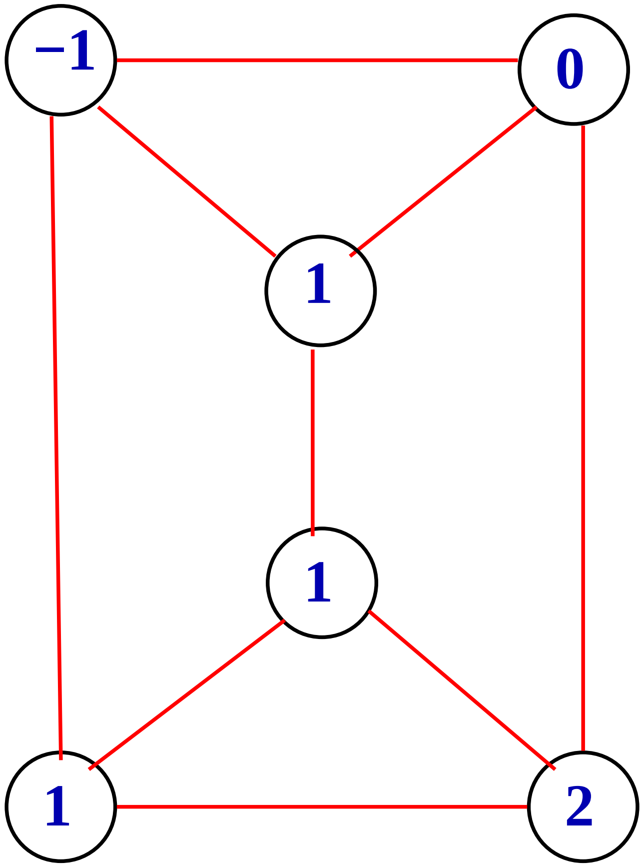
- On définit une relation d'équivalence notée $\sim$ par:

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow u - v \in < \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(n)} >$$

- Une configuration est **effective** si elle est équivalente à une positive

Question principale: Déterminer si une configuration donnée est effective

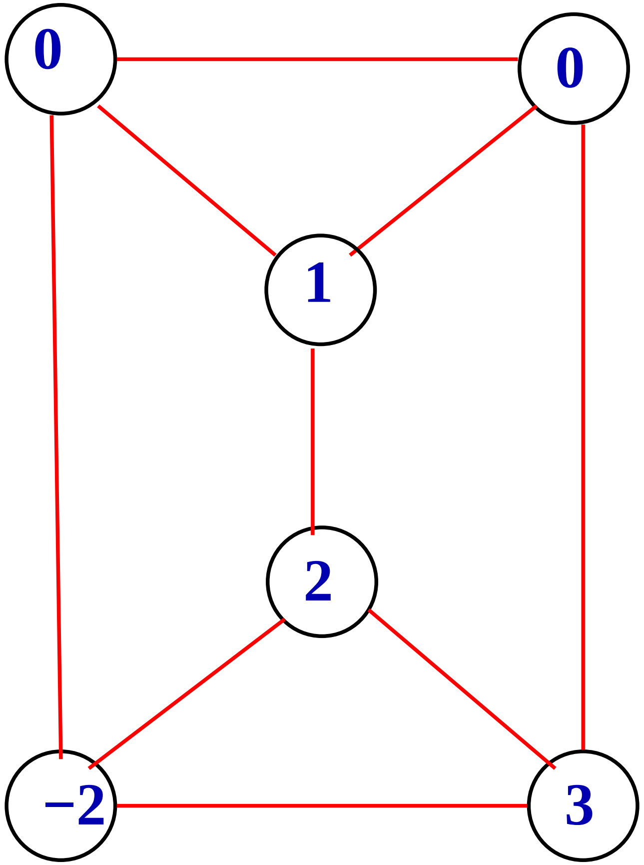
Une configuration effective



$$u = -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6$$

v

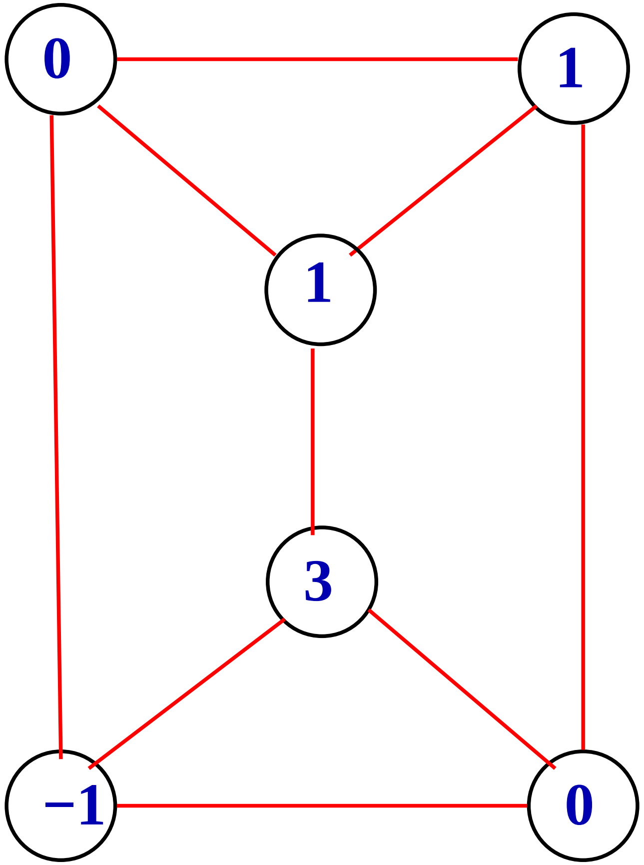
Une configuration effective



$$u = -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6$$

$$u - \Delta^{(5)} = x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 3x_6$$

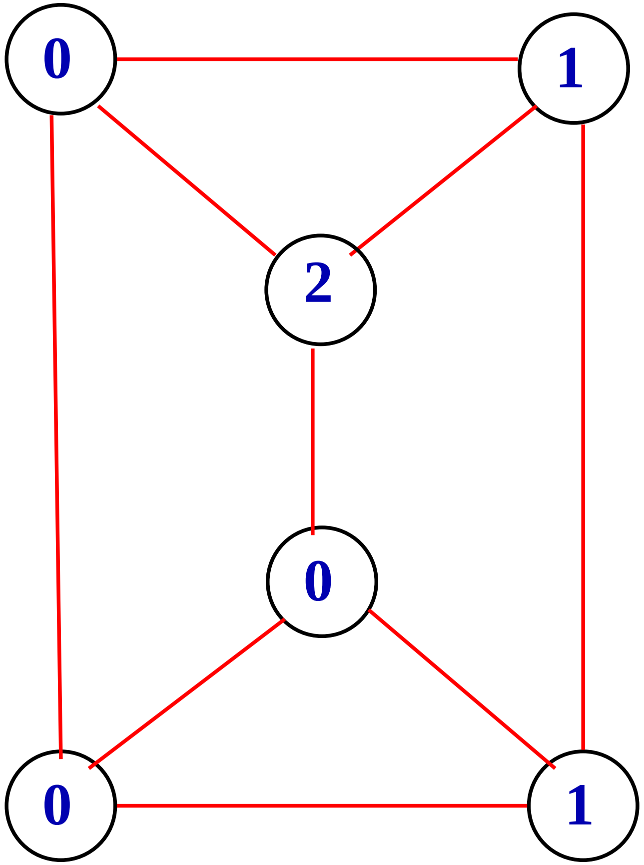
Une configuration effective



$$u - \Delta^{(5)} = x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 3x_6$$

$$u - \Delta^{(5)} - \Delta^{(6)} = x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5$$

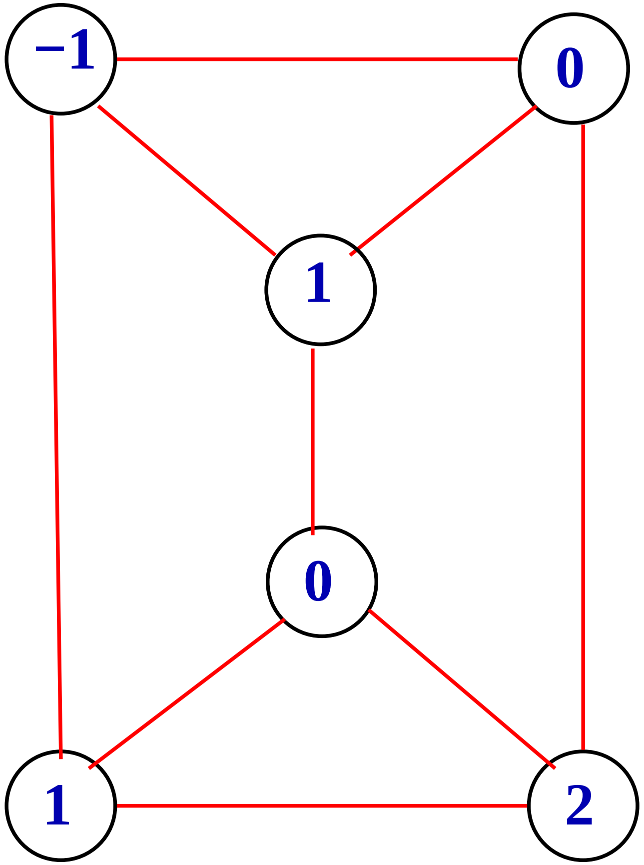
Une configuration effective



$$u - \Delta^{(5)} - \Delta^{(6)} = x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5$$

$$u - \Delta^{(5)} - \Delta^{(6)} - \Delta^{(4)} = x_2 + 2x_3 + x_6$$

Une configuration non effective



$$v = -x_1 + x_3 + x_5 + 2x_6$$

Propriétés élémentaires des configurations effectives

- Pour u tel que $u \in \mathbb{E}$ on a:

$$deg(u) \geq 0$$

- Pour $u \sim v$:

$$u \in \mathbb{E} \;\Leftrightarrow\; v \in \mathbb{E}$$

- Relation d'ordre entre les configurations:

$$\forall i, u_i \leq v_i,\; u \in \mathbb{E} \;\Rightarrow\; v \in \mathbb{E}$$

- La somme de deux configurations effectives est effective.

$$u, v \in \mathbb{E} \;\Rightarrow\; u + v \in \mathbb{E}$$

Elément canonique dans une classe : Configurations récurrentes

- Un des sommets p est distingué
- Une configuration est p-stable si pour tout $i \neq p$ on a:

$$0 \leq u_i < d_i$$

- Une configuration p-stable u est p-*récurrente* si on peut l'obtenir à partir d'elle même par une suite (non vide) d'ajouts de grains sur des sommets autres que p, suivis d'éboulements.
- **Théorème**

  Pour chaque p, toute classe contient exactement une configuration p-récurrente.
- **Algorithme de Dhar**

  Une configuration u est p-récurrente si et seulement si :

$$u - \Delta^{(p)} \quad \xrightarrow{*} u$$

Algorithme de calcul de la configuration récurrente dans une classe

Etant donnée une configuration quelconque u *et un sommet* p *on construit configuration équivalente* p*-récurrente*

1. Ebouler le puits p autant de fois que nécessaire pour obtenir une configuration v telle que $v_i \geq 0$ pour tout $i \neq p$.
2. Ebouler encore le puits jusqu'à obtenir une configuration w telle que:

$$w - \Delta^{(p)} \quad \xrightarrow{*} w$$

Elément canonique dans une classe : Configurations de parking

- Soit p un sommet distingué dans le graphe G
- Une configuration est dite G_p-parking si dans tout sous-ensemble X de $\{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n\}$ il existe un sommet i tel que u_i est inférieur au nombre d'arêtes entre i et $\{1, 2, \ldots, n\} - X$.
- Les classiques fonctions de parking sont les K_{n+1}-parking

Configurations de parking

- A toute configuration p-stable u on associe $\tilde{u}$ donnée par :
  - Pour $i \neq p$ $\quad \tilde{u}_i = d_i - 1 - u_i$
  - Pour $i = p$

$$\tilde{u}_p = d_p - 1 - u_p + 2deg(u) + n - 2m$$

- On a $u \sim v$ si et seulement si $\tilde{u} \sim \tilde{v}$

  En effet, $\tilde{u} = \delta - u$

  avec

$$\delta_i = d_i - 1 \text{ pour } i \neq p \text{ et } \delta_p = d_p - 1 + 2deg(u) + n - 2m$$

- **Proposition** Une configuration u est G_p-parking si et seulement si $\tilde{u}$ est G_p-récurrente. Ainsi toute classe contient une configuration G_p-parking et une seule.

Algorithme de calcul de la configuration G_p-parking dans une classe

Etant donnée une configuration quelconque u et un sommet p on construit configuration équivalente G_p-parking

1. Calculer $v = \delta - u$
2. Appliquer l'algorithme du paragraphe précédent afin d'obtenir la configuration récurrente w dans la classe de v
3. La configuration cherchée est $\tilde{w}$

Les configurations critiques

- Une configuration est *critique* si son degré est $m - n$ et si elle n'est pas effective
- On va montrer que c'est le degré maximal pour une non effective (conséquence du théorème principal). Ce sont donc bien des configurations critiques
  On note Γ l'ensemble des configurations critiques.

Configurations associées à une permutation

- Soit α une permutation des sommets: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$
- On note d_i^- le nombre d'arêtes reliant j à des sommets situés avant lui i dans α.
- Soit γ^α la configuration telle que:

$$\gamma_i^\alpha = d_i^- - 1$$

Proposition Pour toute permutation α sur les sommets, la configuration γ^α est critique

On vérifie facilement que:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^\alpha = \sum_{i=1}^{n} (d_i^- - 1) = m - n$$

Preuve

- On montre que $u = \gamma^\alpha + \sum_{j=1}^n a_j \Delta^{(j)}$ ne peut pas être positive

$$u_i = d_i^- - 1 + a_i d_i - \sum_{j=1}^n a_j e_{i,j}$$

- Or on a:

$$d_i^- = \sum_{\alpha^{-1}(j)<\alpha^{-1}(i)} e_{i,j}, \quad d_i = \sum_{j=1}^n e_{i,j}$$

- Ainsi

$$u_i = -1 + \sum_{\alpha^{-1}(j)<\alpha^{-1}(i)} (1 + a_i - a_j)e_{i,j} + \sum_{\alpha^{-1}(j)>\alpha^{-1}(i)} (a_i - a_j)e_{i,j}$$

- En choisissant i tel que a_i soit minimal (et celui qui minimise $\alpha^{-1}(i)$ en cas d'égalité) on obtient un u_i négatif.

Rôle des configurations critiques

Théorème 2. Pour toute configuration u une et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite :

$$u \in \mathbb{E}$$

il existe une permutation α telle que $\gamma^\alpha - u \in \mathbb{E}$

Preuve:

- Si $u \notin \mathbb{E}$ alors la configuration G_p-parking w dans la classe de u satisfait $w_p < 0$.
- soit d'autre part α la permutation des sommets correspondant à l'ordre des éboulements pour $\tilde{w} - \Delta^{(p)}$
- On vérifie alors pour $\alpha(i) \neq p$: $\gamma^\alpha_{\alpha(i)} \geq w_{\alpha(i)}$ ainsi $\gamma^\alpha - w \in \mathbb{E}$, et $\gamma^\alpha - w \sim \gamma^\alpha - u$
- Si les deux assertions étaient satisfaites on aurait: $\gamma^\alpha - u, u \in \mathbb{E}$ et donc aussi leur somme qui contredit la Propostion précédente.

Conséquences

Rappel

Une et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite

$$u \in \mathbb{E}$$

il existe une permutation α telle que $\gamma^\alpha - u \in \mathbb{E}$

- Une configuration u de degré $m - n$ qui n'est pas effective est équivalente à une configuration de la forme γ^α (car alors $\gamma^\alpha - u = 0$)
- Tester si une configuration u est effective revient à calculer la configuration G_p-parking w de sa classe et à tester si $w_p \geq 0$

Autre conséquence

Rappel

Une et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite

$$u \in \mathbb{E}$$

il existe une permutation α telle que $\gamma^{\alpha} - u \in \mathbb{E}$

- Si $deg(u) > m - n$ alors u est effective.

Le rang d'une configuration

- Le rang (noté $\rho(u)$) d'une configuration non effective est égal à -1
- Pour une configuration effective c'est un de moins que le degré minimal d'une configuration positive qui soustraite de u donne une configuration non effective.
- On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des configurations positives et $\mathbb{E}$ l'ensemble des configurations effectives.

$$\rho(u) + 1 = Min_{u-f \notin \mathbb{E}, f \in \mathbb{P}} \quad deg(f)$$

- Ainsi si f est une configuration positive telle que $deg(f) < \rho(u)$ alors $u - f$ est effective.

Propriétés du rang

- Pour u tel que $deg(u) \geq 0$ on a:

$$\rho(u) \quad \leq deg(u)$$

- *Sur-Additivité.* Pour $u, v \in \mathbb{E}$ on a:

$$\rho(u+v) \quad \geq \quad \rho(u) + \rho(v)$$

Enoncé du théorème (Baker, Norine 2007)

- Soit K la configuration telle que $K_i = d_i - 2$. Ainsi: $deg(K) = 2(m-n)$.
- Pour toute configuration u on a :

$$\rho(u) - \rho(K-u) \quad = \quad deg(u) + n - m$$

Comparaison avec Riemann-Roch classique

- Les configurations sont appelées *diviseurs* notés D
- D_i d'un zéro ou l'opposé du degré d'un pôle.
- La formule:

$$\rho(D) - \rho(K - D) \;=\; deg(D) + 1 - g$$

- $\rho(D)$ est la dimension de l'espace des fonctions méromorphes sur la surface de genre g qui ont des pôles et zéros de degrés supérieurs à D.
- K est un diviseur canonique de degré $2g - 2$ (correspondant à une forme différentielle)

Conséquence du théorème

$$\rho(u) - \rho(K-u) \;=\; deg(u) + n - m$$

- Si $deg(u) > m - n$ alors u est effective.
- La formule implique que si u est est critique alors il en est de même pour $K - u$
- On a $\rho(K) = m - n$

Perspectives

- Génération aléatoire d'arbres recouvrants
- Mieux comprendre les tas bicolores
- pour quels graphes la détermination du rang est-elle polynomiale?
- Les cartes??