Autour de la formule de équerre pour les arbres

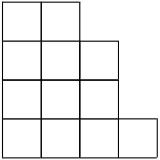
F. Chapoton, F. Hivert, J.-C. Novelli,
V. Reiner, and J.-Y. Thibon

Avril, 2011

Origine : la Formule des équerres classique

Diagramme de Ferrer

$$(4, 3, 3, 2) \longmapsto$$



Tableaux Standards

8	12		
5	9	11	
3	6	10	
1	2	4	7

11	12		
8	9	10	
3	5	7	
1	2	4	6

9	10		
4	8	12	
2	7	11	
1	3	5	6

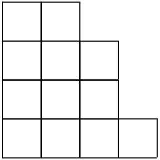
Problème

Compter le nombre de tableaux standards

Origine : la Formule des équerres classique

Diagramme de Ferrer

$(4, 3, 3, 2) \longmapsto$



Tableaux Standards

8	12		
5	9	11	
3	6	10	
1	2	4	7

11	12		
8	9	10	
3	5	7	
1	2	4	6

9	10		
4	8	12	
2	7	11	
1	3	5	6

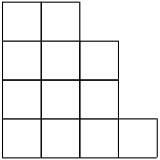
Problème

Compter le nombre de tableaux standards

Origine : la Formule des équerres classique

Diagramme de Ferrer

$(4, 3, 3, 2) \longmapsto$



Tableaux Standards

8	12		
5	9	11	
3	6	10	
1	2	4	7

11	12		
8	9	10	
3	5	7	
1	2	4	6

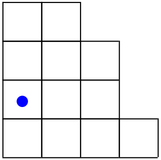
9	10		
4	8	12	
2	7	11	
1	3	5	6

Problème

Compter le nombre de tableaux standards

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :



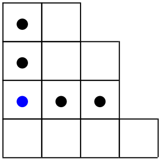
Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \text{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :



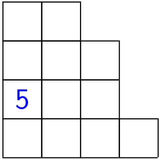
Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :



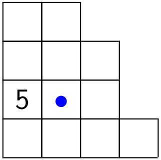
Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} \text{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :



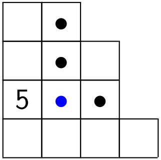
Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :



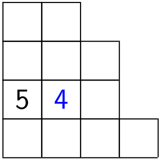
Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \text{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :



Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :

2	1		
4	3	1	
5	4	2	
7	6	4	1

Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :

2	1		
4	3	1	
5	4	2	
7	6	4	1

Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :

2	1		
4	3	1	
5	4	2	
7	6	4	1

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 1}$$

Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :

2	1		
4	3	1	
5	4	2	
7	6	4	1

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 4}$$

Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :

2	1		
4	3	1	
5	4	2	
7	6	4	1

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 2 \cdot 4}$$

Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Origine : la Formule des équerres classique

Longueurs des équerres :

2	1		
4	3	1	
5	4	2	
7	6	4	1

$$3 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 2970$$

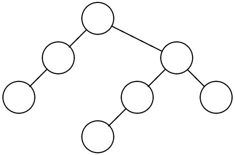
Théorème (Frame-Robinson-Thrall 1954)

Le nombre de tableaux standards de forme λ est donné par

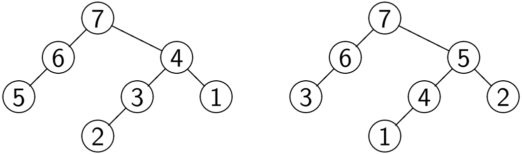
$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \textit{longueur d'équerre en } c}$$

Formule des équerres pour les arbres

arbre binaire (BT) :



arbres décroissants (DT) :

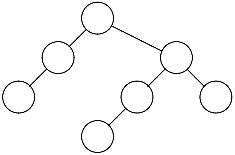


Problème

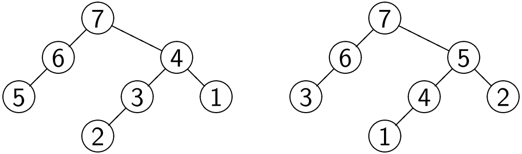
Compter le nombre de d'arbres décroissants

Formule des équerres pour les arbres

arbre binaire (BT) :



arbres décroissants (DT) :



Problème

Compter le nombre de d'arbres décroissants

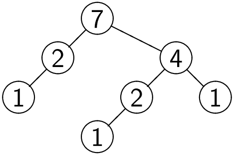
formule de équerre pour les arbres

Théorème (Knuth - AOCP3)

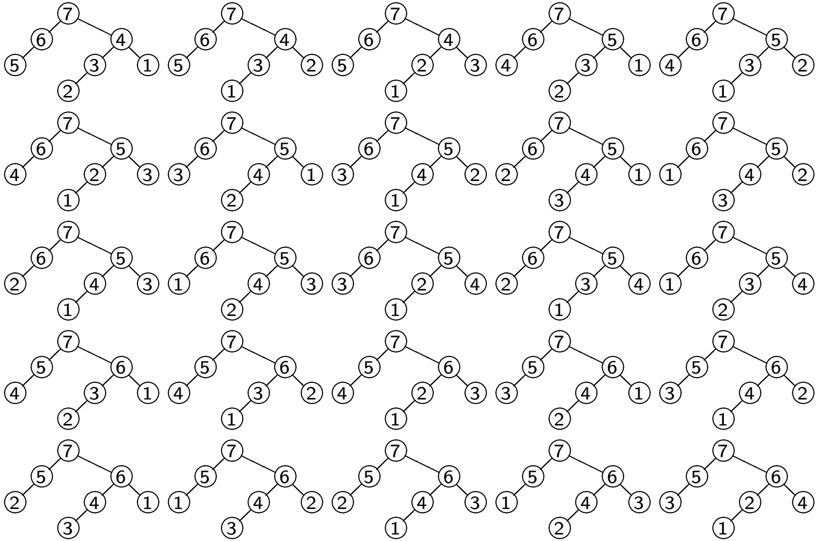
Le nombre d'arbre décroissant standard de forme T est donné par

$$c_T = \frac{n!}{\prod_{o \in T} HL(o)}$$

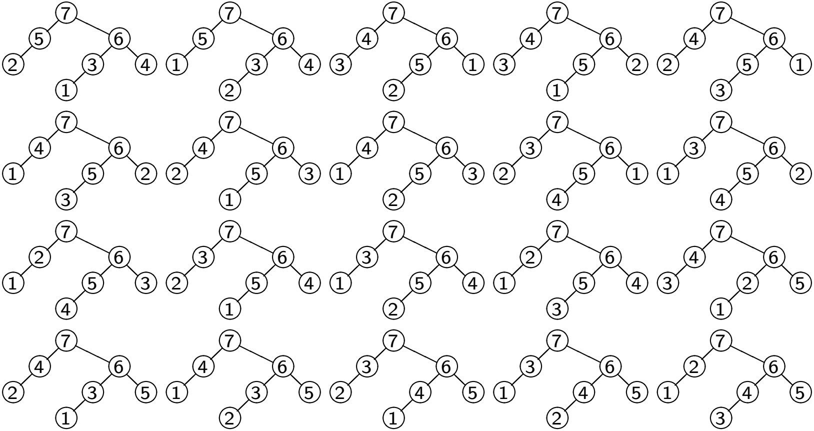
où $HL(o)$ est la taille du sous arbre enraciné en o



$$\frac{7!}{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = 3{\cdot}5{\cdot}3 = 45$$

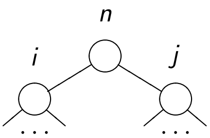


7
6
4
5
3
1
2



Preuve de la formule des équerres pour les arbres

Par induction sur la structure des arbres :



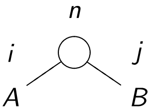
$$n = i + j + 1$$

Pour choisir un arbre décroissant avec les symboles $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$:

- on met a_n à la racine ;
- on sépare les $n - 1$ éléments restants $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}\}$ en i éléments I à gauche et j-éléments à droite J ;
- on choisi un arbre sur I à gauche et un arbre sur J à droite ;

Preuve de la formule des équerres pour les arbres

$T =$



$n = i + j + 1$

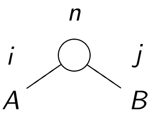
Lemma

$$C_T = \binom{n-1}{i} C_A C_B = \frac{(n-1)!}{i!\,j!} C_A C_B$$

$$C_T = \frac{n!}{n\; i!\; j!} \frac{i!}{\prod_{a \in A} HL(a)} \frac{j!}{\prod_{b \in B} HL(a)} = \frac{n!}{HL(\mathrm{root}) \prod_{a \in A} HL(a) \prod_{b \in B} HL(a)}$$

Preuve de la formule des équerres pour les arbres

$T =$



$n = i + j + 1$

Lemma

$$C_T = \binom{n-1}{i} C_A C_B = \frac{(n-1)!}{i!\, j!} C_A C_B$$

$$C_T = \frac{n!}{n\, i!\, j!} \frac{i!}{\prod_{a \in A} HL(a)} \frac{j!}{\prod_{b \in B} HL(a)} = \frac{n!}{HL(\mathrm{root}) \prod_{a \in A} HL(a) \prod_{b \in B} HL(a)}$$

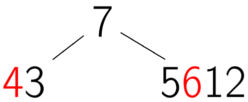
Arbre décroissant d'une permutation

$$4375612$$

Proposition

Bijection : $Permutations_n \longleftrightarrow ArbreDecroissants_n$.

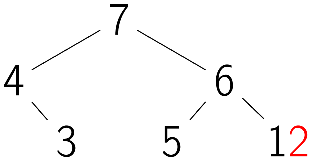
Arbre décroissant d'une permutation



Proposition

Bijection : $Permutations_n \longleftrightarrow ArbreDecroissants_n$.

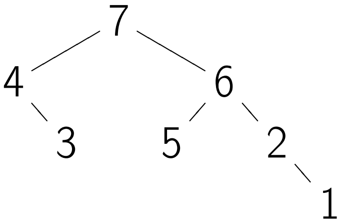
Arbre décroissant d'une permutation



Proposition

Bijection : $Permutations_n \longleftrightarrow ArbreDecroissants_n.$

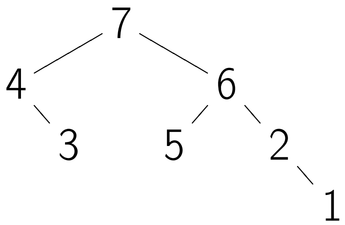
Arbre décroissant d'une permutation



Proposition

Bijection : $Permutations_n \longleftrightarrow ArbreDecroissants_n$.

Arbre décroissant d'une permutation



Proposition

Bijection : Permutations$_n$ $\longleftrightarrow$ ArbreDecroissants$_n$.

Inversions et longueur

Définition

Une *inversion* d'un mot $w = l_1 l_2 \dots l_n$ est un couple (i,j) tel que

$$i < j \quad \text{and} \quad l_i > l_j \, .$$

Nombre d'inversions : $\ell(\sigma)$

$$\begin{array}{lccccccccc} \sigma = & 3 & 6 & 8 & 1 & 5 & 2 & 9 & 7 & 4 \\ & 2 & 4 & 5 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\ell(368152974) = 2 + 4 + 5 + 0 + 2 + 0 + 2 + 1 + 0 = 16.$$

Descentes et indice majeur

Définition

Une *descente* d'un mot $w = l_1 l_2 \dots l_n$ est un entier $i < n$ tel que

$$l_i > l_{i+1} \, .$$

Indice Majeur (Mac-Mahon) = Somme des descentes : $\mathrm{Maj}(\sigma)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma =$	3	6	8	1	5	2	9	7	4
descent position			3		5		7	8	

$$\mathrm{Maj}(368152974) = 3 + 5 + 7 + 8 = 23.$$

Équirépartition de Mac-Mahon

q-entier : $[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Théorème (Mac-Mahon 1915)

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\ell(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{Maj}(\sigma)} = [1]_q[2]_q \ldots [n]_q = [n]_q!$$

Raffinements

q-entier : $[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Théorème (Björner-Wachs 1989)

$$\sum_{\mathcal{AD}(\sigma)=T} q^{\ell(\sigma)} = \sum_{\mathcal{AD}(\sigma)=T} q^{\mathrm{Maj}(\sigma^{-1})} = [n]_q! \prod_{o \in T} \frac{q^{\delta_o}}{[h_o]_q},$$

où δ_o est le nombre de noeuds du sous arbre droit de o

Note : $\ell(\sigma) = \ell(\sigma^{-1})$.

Raffinements

q-entier : $[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Théorème (Björner-Wachs 1989)

$$\sum_{\mathcal{AD}(\sigma)=T} q^{\ell(\sigma^{-1})} = \sum_{\mathcal{AD}(\sigma)=T} q^{\mathrm{Maj}(\sigma^{-1})} = [n]_q! \prod_{o \in T} \frac{q^{\delta_o}}{[h_o]_q},$$

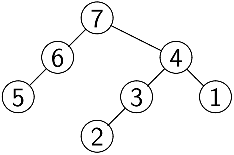
où δ_o est le nombre de noeuds du sous arbre droit de o

Note : $\ell(\sigma) = \ell(\sigma^{-1})$.

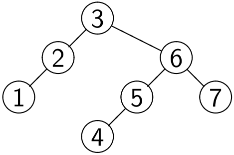
Inversons les permutations !

$$\sigma = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

On remplace une lettre par sa position :



arbre décroissant

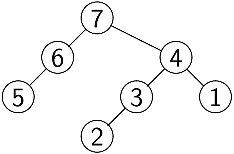


arbre de recherche

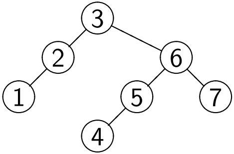
Inversons les permutations !

$$\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{matrix}$$

On remplace une lettre par sa position :



arbre décroissant



arbre de recherche

Recherches et insertions binaires

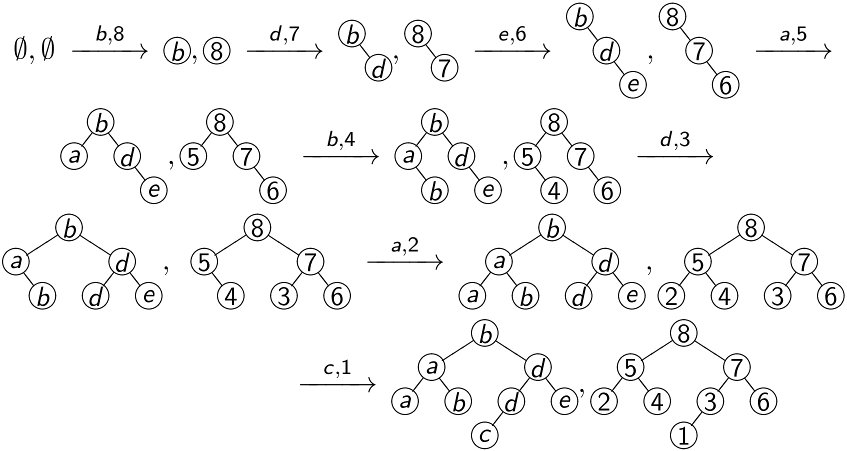
Proposition

Si T est un arbre binaire de recherche et a une lettre, il existe une unique position où l'on peut ajouter une feuille étiquetée a telle que l'arbre résultat $a \to T$ soit un arbre binaire de recherche.

Algorithme

- si T est vide, alors *retourner* l'arbre a ;
- comparer a avec la racine de T ;
- s'il est plus petit ou égal, on insère récursivement a dans le sous-arbre *gauche* ;
- s'il est strictement plus grand, on insère récursivement a dans le sous-arbre *droit*.

Insertion du mot *cadbaedb*

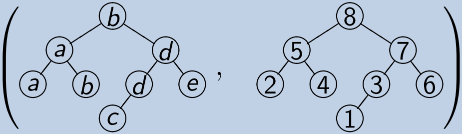


Bijection sylvestre

Proposition (bijection sylvestre)

mot $\longleftrightarrow$ *(arbre de recherche , arbre décroissant)*

cadbaedb $\longleftrightarrow$



Corollaire

Soit A un arbre binaire de recherche de forme T

$$C_T = \text{nombre de mots dont l'arbre de recherche est } A$$

Le produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$

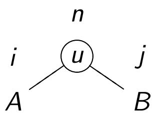
$$w \sqcup\!\sqcup 1 = 1 \sqcup\!\sqcup w = w \qquad 1 : \text{mot vide},$$
$$Ux \sqcup\!\sqcup Vy = (U \sqcup\!\sqcup Vy)x + (Ux \sqcup\!\sqcup V)y \qquad x, y \in A, \qquad U, V \in A^*.$$

$$\begin{aligned} aba \sqcup\!\sqcup cb &= abacb + abcab + abcba + acbab + acbba \\ &\quad + acbba + cabab + cabba + cabba + cbaba \\ &= abacb + abcab + abcba + acbab + acbba \\ &\quad + acbba + cabab + 2\,cabba + cbaba \end{aligned}$$

($\binom{5}{3} = 10$ mots).

Comment obtenir un arbre de recherche

$T =$



$n = i + j + 1$

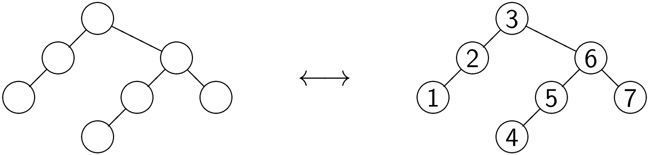
$\mathcal{C}(T)$: l'ensemble des dont l'arbre de recherche est T

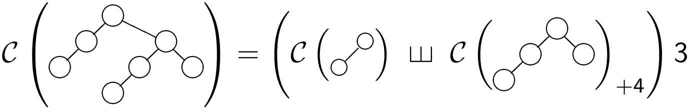
Lemma

$$\mathcal{C}(T) = (\mathcal{C}(A) \sqcup \mathcal{C}(B))u$$

Arbre de recherche standard

Les valeurs des lettres de l'arbre de recherche n'interviennent pas.





Mélange décalé

$$21 \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} 123 = 34521 + 34251 + 34215 + 32451 + 32415 + 32145 + 23451 + 23415 + 23145 + 21345$$

$$\begin{aligned} B(312, 21) &= (312 \mathbin{\sqcup\!\sqcup} 65)4 \\ &= 312654 + 316254 + 316524 + 361254 + 361524 + \\ &\quad 365124 + 631254 + 631524 + 635124 + 653124 \end{aligned}$$

Des permutations aux séries génératrices

Si $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ et $\beta \in \mathfrak{S}_n$. Alors, il y a exactement $\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ termes dans le mélange $\alpha \sqcup\!\sqcup \beta$.

Par conséquent :

Proposition

$$\Phi \;:\; \alpha \longmapsto \frac{t^n}{n!} \qquad \textit{pour toute permutation } \alpha \in \mathfrak{S}_n,$$

vérifie

$$\Phi(\alpha \sqcup\!\sqcup \beta) = \Phi(\alpha)\Phi(\beta)$$

$$B(312, 21) = (312 \sqcup\!\sqcup 65)4$$
$$= 312654 + 316254 + 316524 + 361254 + 361524 +$$
$$365124 + 631254 + 631524 + 635124 + 653124$$

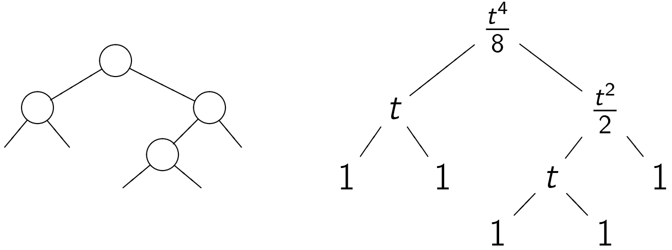
$$\Phi \ : \ \alpha \longmapsto \frac{t^n}{n!} \qquad \text{pour } \alpha \in \mathfrak{S}_n,$$

Alors $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ $\beta \in \mathfrak{S}_n$

$$\Phi(B(\alpha, \beta)) = \binom{n+m}{m} \frac{t^{n+m+1}}{(n+m+1)!}$$
$$= \frac{t^{n+m+1}}{(n+m+1)m!n!} = \int_t \frac{t^n}{m!n!}\, dt = \int_t \Phi(\alpha)\Phi(\beta)\, dt$$

Exemple d'un terme

$$B(x, y) := \int_0^t x(s)y(s)ds$$



$\longmapsto$ Preuve de la formule des équerres.

Tri rapide (QuickSort)

3	1	9	2	7	8	4	0	5	6

Tri rapide (QuickSort)

3	1	9	2	7	8	4	0	5	6

Tri rapide (QuickSort)

3	1	2	4	0	5	6	9	7	8

Tri rapide (QuickSort)

3	1	2	4	0	5	6	9	7	8

Tri rapide (QuickSort)

3	1	2	4	0	5	6	9	7	8

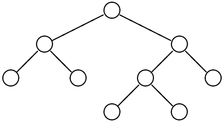
Intégration et tri rapide.

$B(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des permutations telles que si l'on choisit le dernier élément comme pivot, la partition du tri rapide stable est (α, m, $\beta[m+1]$).

312, 4, 65

312654	316254	316524	361254	361524
365124	631254	631524	635124	653124

Arbre binaire complets

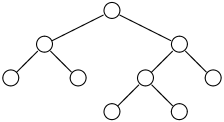


on résout l'équation

$$F(t) = t + B(f(t), f(t)) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

on compte l'ensemble des permutations pour lesquelles l'algorithme du tri rapide fait toujours, lors des appels récursifs, une partition non triviale en choisissant le dernier élément comme pivot.

Arbre binaire complets et Tangente



$$F(t) = t + B(f(t), f(t)) = \int_t f(t)^2 dt$$

est équivalent à

$$F'(t) = 1 + f(t)^2$$

Intégration et tri rapide.

Théorème

Le coefficient de x^n de la fonction tangente est la probabilité qu'une permutation prise uniformément au hasard, ne donnera jamais de partition triviale lors des appels récursifs du tri rapide.

Intégration et tri rapide.

Théorème

Le coefficient de x^n de la fonction tangente est la probabilité qu'une permutation prise uniformément au hasard, ne donnera jamais de partition triviale lors des appels récursifs du tri rapide.

On peut donc calculer π avec le tri rapide !

Calcul dendriforme

$$w \sqcup\!\sqcup 1 = 1 \sqcup\!\sqcup w = w \qquad 1 : \text{mot vide,}$$

$$Ux \sqcup\!\sqcup Vy = (U \sqcup\!\sqcup Vy)x + (Ux \sqcup\!\sqcup V)y \qquad x, y \in A, \qquad U, V \in A^*.$$

Définition

On coupe le mélange en deux :

$$Ux \prec Vy = (U \sqcup\!\sqcup Vy)x \qquad et \qquad Ux \succ Vy = (Ux \sqcup\!\sqcup V)y$$

Relations dendriformes

Définition

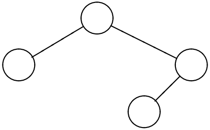
On coupe le mélange en deux :

$$Ux \prec Vy = (U \sqcup\!\sqcup Vy)x \qquad et \qquad Ux \succ Vy = (Ux \sqcup\!\sqcup V)y$$

- $(u \prec v) \prec w = u \prec (v \sqcup\!\sqcup w)$
- $u \succ (v \succ w) = (u \sqcup\!\sqcup v) \succ w$
- $(u \succ v) \prec w = u \succ (v \prec w)$

Calcul dendriforme et formule des équerres

$$B(\alpha,\beta) = \alpha \succ (1) \prec \beta$$



$$= \quad ((1) \succ (1) \prec ((1) \succ (1))$$

Proposition (Loday-Ronco 1997)

En appliquant les relations dendriformes toute expression peut s'exprimer comme une somme d'expressions arbres.

Algèbre libre sur l'opérade dendriforme

fractions rationnelles et permutations

Permutations $\mapsto$ fraction :

$$F_{1234} := \frac{1}{(x_1)(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3+x_4)}$$

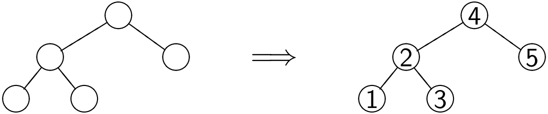
$$\begin{aligned} F_{4213} &:= \frac{1}{(x_4)(x_4+x_2)(x_4+x_2+x_1)(x_4+x_2+x_1+x_3)} \\ &= \frac{1}{(x_4)(x_2+x_4)(x_1+x_2+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)} \end{aligned}$$

produit de mélange

Théorème

$$F_\alpha(x_1,\dots,x_m)F_\beta(x_{m+1},\dots,x_{m+n}) = \sum_{\gamma\in\alpha\ \ \beta} F_\gamma(x_1,\dots,x_{m+n})$$

Arbre



Permutations qui donne cet arbre :

53124 35124 51324 15324 31524 13524 31254 13254

Somme des fractions correspondantes :

$$F_{53124} + F_{35124} + F_{51324} + F_{15324} + F_{31524} + F_{13524} + F_{31254} + F_{13254}$$

$$= \frac{1}{x_1 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) x_5 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}$$

Extensions

- forets récursivement étiquetée.
- (q, t) - version (Novelli-Thibon)
- version multivariée (H-Reiner)