Nombres de Littlewood-Richardson : Modèles combinatoires, calcul et complexité

Christophe Tollu

LIPN, Université de Paris 13

30 mars 2012

Séminaire Philippe Flajolet

Plan

Nombres de Littlewood-Richardson

- Les cœfficients de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont des entiers ≥ 0 paramétrés par 3 partitions d'entiers, *i.e.* 3 suites finies et décroissantes d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$

Nombres de Littlewood-Richardson

- Les cœfficients de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont des entiers ≥ 0 paramétrés par 3 partitions d'entiers, *i.e.* 3 suites finies et décroissantes d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$
- Ils apparaissent dans de nombreux contextes

Nombres de Littlewood-Richardson

- Les cœfficients de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont des entiers ≥ 0 paramétrés par 3 partitions d'entiers, *i.e.* 3 suites finies et décroissantes d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$
- Ils apparaissent dans de nombreux contextes
  - Théorie des représentations (groupes symétriques, groupes classiques)

Nombres de Littlewood-Richardson

- Les cœfficients de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont des entiers ≥ 0 paramétrés par 3 partitions d'entiers, *i.e.* 3 suites finies et décroissantes d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$
- Ils apparaissent dans de nombreux contextes
  - Théorie des représentations (groupes symétriques, groupes classiques)
  - Géométrie (calcul de Schubert sur les grassmanniennes)

Nombres de Littlewood-Richardson

- Les cœfficients de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont des entiers ≥ 0 paramétrés par 3 partitions d'entiers, *i.e.* 3 suites finies et décroissantes d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$
- Ils apparaissent dans de nombreux contextes
  - Théorie des représentations (groupes symétriques, groupes classiques)
  - Géométrie (calcul de Schubert sur les grassmanniennes)
  - Algèbre linéaire (spectres de sommes de matrices hermitiennes)

Nombres de Littlewood-Richardson

- Les cœfficients de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont des entiers ≥ 0 paramétrés par 3 partitions d'entiers, *i.e.* 3 suites finies et décroissantes d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$
- Ils apparaissent dans de nombreux contextes
  - Théorie des représentations (groupes symétriques, groupes classiques)
  - Géométrie (calcul de Schubert sur les grassmanniennes)
  - Algèbre linéaire (spectres de sommes de matrices hermitiennes)
  - Physique (structure fine des spectres atomiques)

Représentations polynomiales de $GL_m(\mathbb{C})$

- Les représentations polynomiales complexes irréductibles V^λ de $GL_m(\mathbb{C})$ sont indexées aux partitions λ qui ont au plus m parts non nulles ($\ell(\lambda) \leq m$)

Représentations polynomiales de $GL_m(\mathbb{C})$

- Les représentations polynomiales complexes irréductibles V^λ de $GL_m(\mathbb{C})$ sont indexées aux partitions λ qui ont au plus m parts non nulles ($\ell(\lambda) \leq m$)
- Le produit tensoriel $V^\lambda \otimes V^\mu$ de deux représentations polynomiales irréductibles se décompose

$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$$

Représentations polynomiales de $GL_m(\mathbb{C})$

- Les représentations polynomiales complexes irréductibles V^λ de $GL_m(\mathbb{C})$ sont indexées aux partitions λ qui ont au plus m parts non nulles ($\ell(\lambda) \leq m$)
- Le produit tensoriel $V^\lambda \otimes V^\mu$ de deux représentations polynomiales irréductibles se décompose

$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V^\nu$$

- Les constantes de structure de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]^{\mathfrak{S}_n}$ relativement à la base des polynômes de Schur sont données par

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\ell(\nu) \leq m} c_{\lambda,\mu}^\nu s_\nu$$

Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

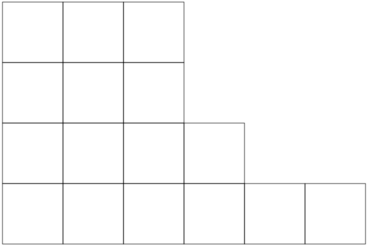
$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Exemple $\lambda = (4,3,1,1)$, $\mu = (3,2,2)$, $\nu = (6,4,3,3)$

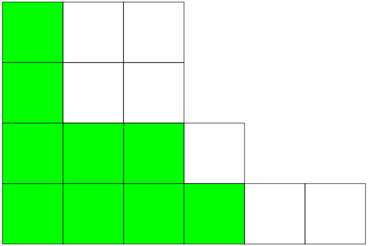


Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = \#$ de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Exemple $\lambda = (4,3,1,1)$, $\mu = (3,2,2)$, $\nu = (6,4,3,3)$

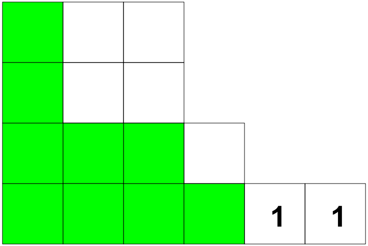


Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Exemple $\lambda = (4,3,1,1)$, $\mu = (3,2,2)$, $\nu = (6,4,3,3)$

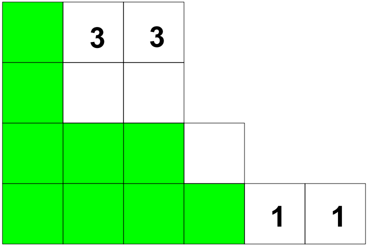


Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Exemple $\lambda = (4,3,1,1)$, $\mu = (3,2,2)$, $\nu = (6,4,3,3)$

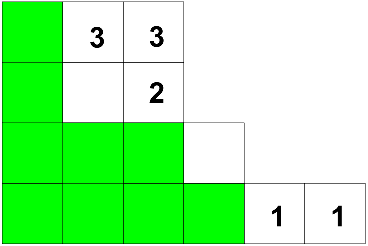


Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Exemple $\lambda = (4,3,1,1)$, $\mu = (3,2,2)$, $\nu = (6,4,3,3)$

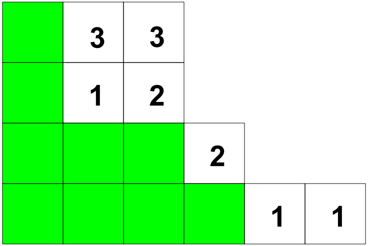


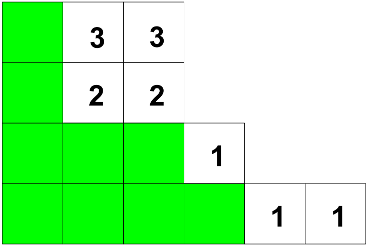
Règle de Littlewood-Richardson

Theorem

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de tableaux gauches semi-standard T de forme ν/λ et de contenu μ tels que $w(T)$ soit un mot de Yamanouchi

Exemple $\lambda = (4,3,1,1)$, $\mu = (3,2,2)$, $\nu = (6,4,3,3)$

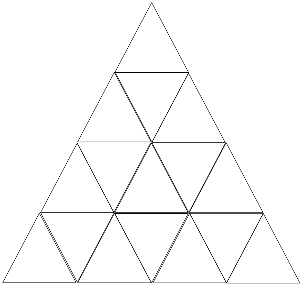




m-ruche

- Grille triangulaire dont chaque côté est de longueur m

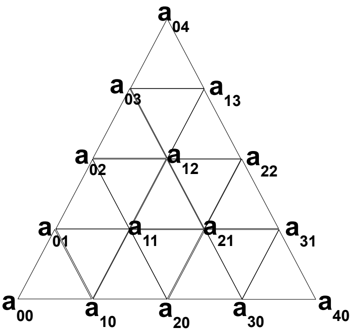
- Exemple $m = 4$



m-ruche

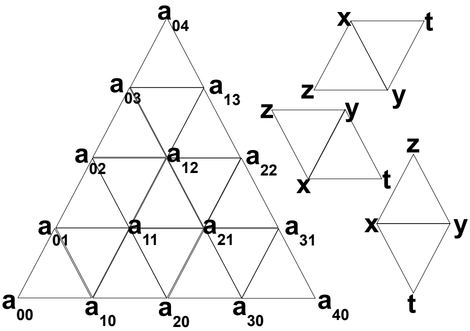
- Grille triangulaire dont chaque côté est de longueur m
- Sommets étiquetés dans $\mathbb{R}$

- Exemple $m = 4$



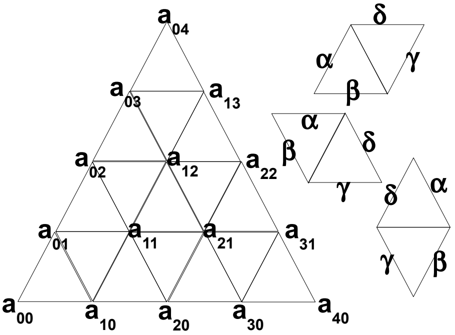
m-ruche

- Grille triangulaire dont chaque côté est de longueur m
- Etiquetage des sommets dans $\mathbb{R}$
- Conditions locales : $x + y \geq z + t$
- Exemple $m = 4$



m-ruche

- Grille triangulaire dont chaque côté est de longueur m
- Étiquetage de a_{00} et des arêtes par $a_{i,j+1} - a_{ij}$, $a_{i+1,j} - a_{ij}$, $a_{i+1,j} - a_{i,j+1}$
- Conditions locales : $\alpha \geq \gamma$ et $\beta \geq \delta$
- Exemple $m = 4$

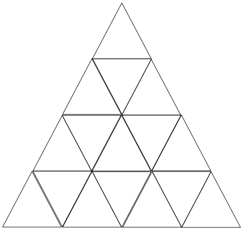


LR-ruches

- Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$

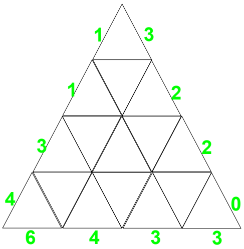
LR-ruches

- Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$
- On étiquette les arêtes du bord d'une m-grille par les parts de λ, μ, ν
  Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$



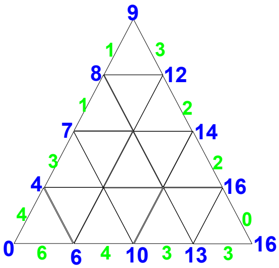
LR-ruches

- Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$
- On étiquette les arêtes du bord d'une m-grille par les parts de λ, μ, ν
  Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$



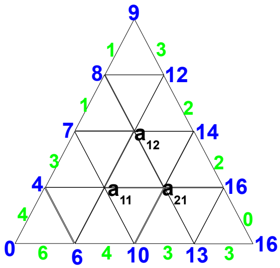
LR-ruches

- Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$
- On étiquette les sommets du bord de la m-grille en posant
  $a_{00} = 0$
  Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$



LR-ruches

- Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$
- On étiquette les sommets du bord de la m-grille en posant $a_{00} = 0$
  Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$



- L'ensemble des m-ruches de bord λ, μ, ν est un polytope $\mathcal{P}(\lambda, \mu, \nu) \subset \mathbb{R}^{(m-1)(m-2)/2}$

Règle de Littlewood-Richardson version ruche

Theorem

Soit λ, μ, ν *trois partitions telles que* $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$.

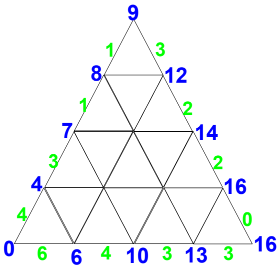
$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = \#$ *de ruches à étiquettes dans* $\mathbb{N}$ *et de bord* λ, μ, ν

Règle de Littlewood-Richardson version ruche

Theorem

Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$.
$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de ruches à étiquettes dans $\mathbb{N}$ et de bord λ, μ, ν

Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$

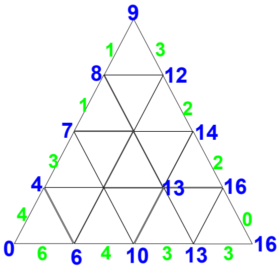


Règle de Littlewood-Richardson version ruche

Theorem

Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$.
$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = \#$ de ruches à étiquettes dans $\mathbb{N}$ et de bord λ, μ, ν

Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$

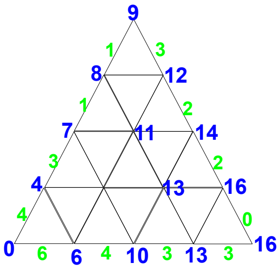


Règle de Littlewood-Richardson version ruche

Theorem

Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$.
$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = \#$ de ruches à étiquettes dans $\mathbb{N}$ et de bord λ, μ, ν

Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$



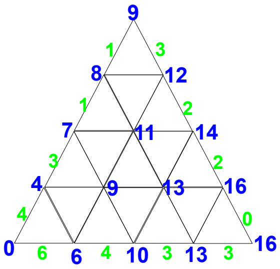
Règle de Littlewood-Richardson version ruche

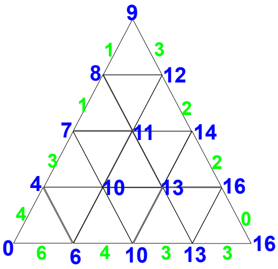
Theorem

Soit λ, μ, ν trois partitions telles que $\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\mu) \leq m$.

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ = # de ruches à étiquettes dans $\mathbb{N}$ et de bord λ, μ, ν

Exemple $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (3, 2, 2)$, $\nu = (6, 4, 3, 3)$





Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

	3	3			
	1	2			
			2		
				1	1

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$\xleftrightarrow{p=4}$

6 4 3 3

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$\xleftrightarrow{p=3}$

6 4 3 3

6 4 3 3

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$\xleftrightarrow{p=2}$

6 4 3 3
6 4 3 3
6 4 3 1

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$$\xleftrightarrow{p=1}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & & 4 & & 3 & & 3 & & & & \\
 & 6 & & 4 & & 3 & & 3 & & & \\
 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & 6 & & 3 & & 2 & & 1 &
\end{array}$$

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$\xleftrightarrow{p=0}$

6 4 3 3
6 4 3 3
6 4 3 1
6 3 2 1
4 3 1 1

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$\longleftrightarrow$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 6 & & 4 & & 3 & & 3 & & & & & & \\
& 0 & & 6 & & 4 & & 3 & & 3 & & & & & \\
& & 0 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1 & & & & \\
& & & 0 & & 6 & & 3 & & 2 & & 1 & & & \\
& & & & 0 & & 4 & & 3 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 6 & & 4 & & 3 & & 3 \\
 & 0 & & 6 & & 4 & & 3 & & 3 \\
 & & 0 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1 \\
 & & & 0 & & 6 & & 3 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 0 & & 4 & & 3 & & 1 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 6 & & 10 & & 13 & & 16 \\
 & 0 & & 6 & & 10 & & 13 & & 16 \\
 & & 0 & & 6 & & 10 & & 13 & & 14 \\
 & & & 0 & & 6 & & 9 & & 11 & & 12 \\
 & & & & 0 & & 4 & & 7 & & 8 & & 9
\end{array}$$

Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$$\leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 6 & 4 & 3 & 3 \\
0 & 6 & 4 & 3 & 3 \\
0 & 6 & 4 & 3 & 1 \\
0 & 6 & 3 & 2 & 1 \\
0 & 4 & 3 & 1 & 1
\end{array}$$

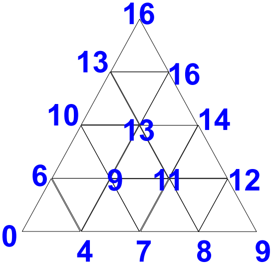
$$\updownarrow$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 6 & 10 & 13 & 16 \\
0 & 6 & 10 & 13 & 16 \\
0 & 6 & 10 & 13 & 14 \\
0 & 6 & 9 & 11 & 12 \\
0 & 4 & 7 & 8 & 9
\end{array}$$

Bijection LR-ruches ↔ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

0 6 4 3 3
0 6 4 3 3
0 6 4 3 1
0 6 3 2 1
0 4 3 1 1



0 6 10 13 16
0 6 10 13 16
0 6 10 13 14
0 6 9 11 12
0 4 7 8 9

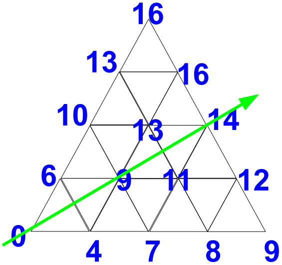
Bijection LR-ruches $\leftrightarrow$ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

$\longleftrightarrow$

0 6 4 3 3
0 6 4 3 3
0 6 4 3 1
0 6 3 2 1
0 4 3 1 1

$\updownarrow$



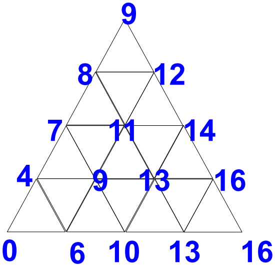
$\longleftrightarrow$

0 6 10 13 16
0 6 10 13 16
0 6 10 13 14
0 6 9 11 12
0 4 7 8 9

Bijection LR-ruches ↔ LR-tableaux

0	3	3			
0	1	2			
0	0	0	2		
0	0	0	0	1	1

0 6 4 3 3
0 6 4 3 3
0 6 4 3 1
0 6 3 2 1
0 4 3 1 1



0 6 10 13 16
0 6 10 13 16
0 6 10 13 14
0 6 9 11 12
0 4 7 8 9

Deux remarques

- $LR_m = \{(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathcal{P}art_m)^3 \mid c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0\}$ est un sous-semi-groupe additif finiment engendré de $(\mathbb{Z}^m)^3$

Deux remarques

- $LR_m = \{(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathcal{P}art_m)^3 \mid c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0\}$ est un sous-semi-groupe additif finiment engendré de $(\mathbb{Z}^m)^3$
- Dès que $m > 4$, le polytope $\mathcal{P}^{\nu}_{\lambda,\mu}$ n'est pas, en général, à sommets entiers
  - (DeLoera-McAllister 2008) Contre-exemples pour chaque $m \geq 5$ et majorant des dénominateurs pour m fixé

Spectres et sommes de matrices hermitiennes

- $\alpha = \alpha_1 \geq \cdots \alpha_m$, $\beta = \beta_1 \geq \cdots \beta_m$, $\gamma = \gamma_1 \geq \cdots \gamma_m$ trois m-uplets de réels

Spectres et sommes de matrices hermitiennes

- $\alpha = \alpha_1 \geq \cdots \alpha_m$, $\beta = \beta_1 \geq \cdots \beta_m$, $\gamma = \gamma_1 \geq \cdots \gamma_m$ trois m-uplets de réels
- À quelles conditions existe-t-il trois matrices hermitiennes $m \times m$ A,B, C telles que $\lambda(A) = \alpha$, $\lambda(B) = \beta$, $\lambda(C) = \gamma$, et $A + B = C$?

Spectres et sommes de matrices hermitiennes

- $\alpha = \alpha_1 \geq \cdots \alpha_m$, $\beta = \beta_1 \geq \cdots \beta_m$, $\gamma = \gamma_1 \geq \cdots \gamma_m$ trois m-uplets de réels
- À quelles conditions existe-t-il trois matrices hermitiennes $m \times m$ A,B, C telles que $\lambda(A) = \alpha$, $\lambda(B) = \beta$, $\lambda(C) = \gamma$, et $A + B = C$?
- Trace : $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i$ (*)

Spectres et sommes de matrices hermitiennes

- $\alpha = \alpha_1 \geq \cdots \alpha_m$, $\beta = \beta_1 \geq \cdots \beta_m$, $\gamma = \gamma_1 \geq \cdots \gamma_m$ trois m-uplets de réels
- À quelles conditions existe-t-il trois matrices hermitiennes $m \times m$ A,B, C telles que $\lambda(A) = \alpha$, $\lambda(B) = \beta$, $\lambda(C) = \gamma$, et $A + B = C$?
- Trace : $\sum_{i=1}^m \gamma_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i$ (*)
- (Horn 1962) Conjecture : l'égalité (*) et les inégalités de la forme
$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j$$
pour tous les triplets $I, J, K \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = |J| = |K|$,
$$(I, J, K) \in \bigcup_{r=1}^{m-1} T_r^n$$

Spectres et sommes de matrices hermitiennes

- $\alpha = \alpha_1 \geq \cdots \alpha_m$, $\beta = \beta_1 \geq \cdots \beta_m$, $\gamma = \gamma_1 \geq \cdots \gamma_m$ trois m-uplets de réels
- À quelles conditions existe-t-il trois matrices hermitiennes $m \times m$ A,B, C telles que $\lambda(A) = \alpha$, $\lambda(B) = \beta$, $\lambda(C) = \gamma$, et $A + B = C$?
- Trace : $\sum_{i=1}^m \gamma_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i$ (*)
- (Horn 1962) Conjecture : l'égalité (*) et les inégalités de la forme
$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j$$
pour tous les triplets $I, J, K \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = |J| = |K|$,
$$(I, J, K) \in \bigcup_{r=1}^{m-1} T_r^n$$
- T_r^m défini récursivement

Partition associée à un sous-ensemble

- $HE_m = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^m_\geq)^3 \mid \exists A, B, C \in \mathcal{H}_m, \lambda(A) = \alpha, \lambda(B) = \beta, \lambda(A+B) = \gamma\}$

Partition associée à un sous-ensemble

- $HE_m = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^m_{\geq})^3 \mid \exists A, B, C \in \mathcal{H}_m, \lambda(A) = \alpha, \lambda(B) = \beta, \lambda(A+B) = \gamma\}$
- $LR_m = \{(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathcal{P}_m)^3 \mid c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0\}$

Partition associée à un sous-ensemble

- $HE_m = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^m_{\geq})^3 \mid \exists A, B, C \in \mathcal{H}_m, \lambda(A) = \alpha, \lambda(B) = \beta, \lambda(A + B) = \gamma\}$
- $LR_m = \{(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathcal{P}_m)^3 \mid c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0\}$
- $I, J, K \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = |J| = |K| = r$
- $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$, $K = \{k_1 < \cdots < k_r\}$

Partition associée à un sous-ensemble

- $HE_m = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^m_{\geq})^3 \mid \exists A, B, C \in \mathcal{H}_m, \lambda(A) = \alpha, \lambda(B) = \beta, \lambda(A+B) = \gamma\}$
- $LR_m = \{(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathcal{P}_m)^3 \mid c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0\}$
- $I, J, K \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = |J| = |K| = r$
- $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$, $K = \{k_1 < \cdots < k_r\}$
- $\rho(I), \rho(J), \rho(K)$ trois partitions :

$$\begin{aligned} \rho(I) &= (i_r - r, \ldots, i_1 - 1) \\ \rho(J) &= (j_r - r, \ldots, j_1 - 1) \\ \rho(K) &= (k_r - r, \ldots, k_1 - 1) \end{aligned}$$

Inégalités de Horn

- Conjecture de Horn (1962) :
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in HE_r\}$

Inégalités de Horn

- Conjecture de Horn (1962) :
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in HE_r\}$
- Klyachko (1996) : la conjecture est vraie pour
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in LR_r\}$

Inégalités de Horn

- Conjecture de Horn (1962) :
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in HE_r\}$
- Klyachko (1996) : la conjecture est vraie pour
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in LR_r\}$
- Klyachko (1996) : $HE_m \cap (\mathbb{Q}_+^3)^m = \bigcup_{N>0} \frac{1}{N} LR_m$

Inégalités de Horn

- Conjecture de Horn (1962) :
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in HE_r\}$
- Klyachko (1996) : la conjecture est vraie pour
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in LR_r\}$
- Klyachko (1996) : $HE_m \cap (\mathbb{Q}_+^3)^m = \bigcup_{N>0} \frac{1}{N} LR_m$

- Theorem
  (Knutson-Tao 1999) $c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$ *pour un* $N \geq 1 \Rightarrow c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$

Inégalités de Horn

- Conjecture de Horn (1962) :
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in HE_r\}$
- Klyachko (1996) : la conjecture est vraie pour
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in LR_r\}$
- Klyachko (1996) : $HE_m \cap (\mathbb{Q}_+^3)^m = \bigcup_{N>0} \frac{1}{N} LR_m$

- Theorem
  (Knutson-Tao 1999) $c_{N\lambda,N\mu}^{N\nu} > 0$ *pour un* $N \geq 1 \Rightarrow c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$
  - $T_r^m = \{(I, J, K) \mid c_{\rho(I),\rho(J)}^{\rho(K)} > 0\}$ (triplets et inégalités de Horn)

Inégalités de Horn

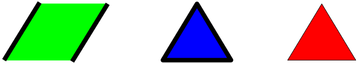
- Conjecture de Horn (1962) :
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in HE_r\}$
- Klyachko (1996) : la conjecture est vraie pour
  $T_r^m = \{(I, J, K) \mid (\rho(I), \rho(J), \rho(K)) \in LR_r\}$
- Klyachko (1996) : $HE_m \cap (\mathbb{Q}_+^3)^m = \bigcup_{N>0} \frac{1}{N} LR_m$

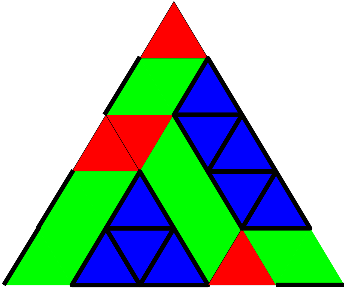
- Theorem
  (Knutson-Tao 1999) $c_{N\lambda,N\mu}^{N\nu} > 0$ *pour un* $N \geq 1 \Rightarrow c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$
  - $T_r^m = \{(I, J, K) \mid c_{\rho(I),\rho(J)}^{\rho(K)} > 0\}$ (triplets et inégalités de Horn)
  - $R_r^m = \{(I, J, K) \mid c_{\rho(I),\rho(J)}^{\rho(K)} = 1\}$ (triplets et inégalités essentiels) (Belkale 1999)

Puzzles de Knutson-Tao-Woodward

Puzzles de Knutson-Tao-Woodward

- Un m-puzzle est un pavage de la m-grille par les trois morceaux suivants, de façon que les arêtes partagées soient de même type



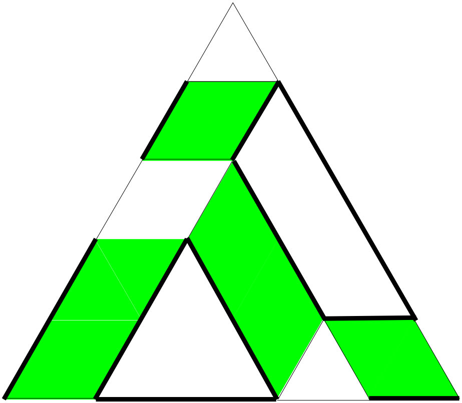


Labyrinthes de Danilov-Koshevoy

- Un labyrinthe (plan) est obtenu à partir d'un puzzle en ôtant les arêtes « internes » des blocs de même type : couloirs, chambres de type 1 (contour gras), chambres de type 0 (contour fin)

Labyrinthes de Danilov-Koshevoy

- Un labyrinthe (plan) est obtenu à partir d'un puzzle en ôtant les arêtes « internes » des blocs de même type : couloirs, chambres de type 1 (contour gras), chambres de type 0 (contour fin)



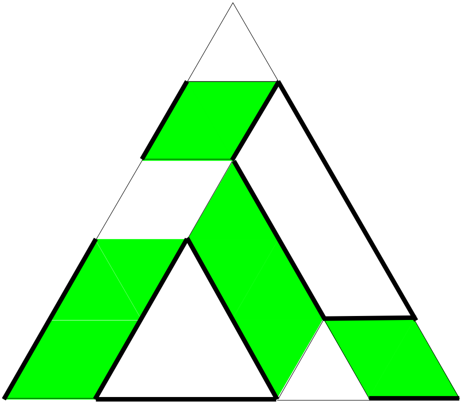
-

Puzzles et triplets admissibles

- $(I, J, K))$, $I, J, K \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = |J| = |K|$ est un triplet admissible s'il correspond aux positions des arêtes grasses sur le bord d'un puzzle

Puzzles et triplets admissibles

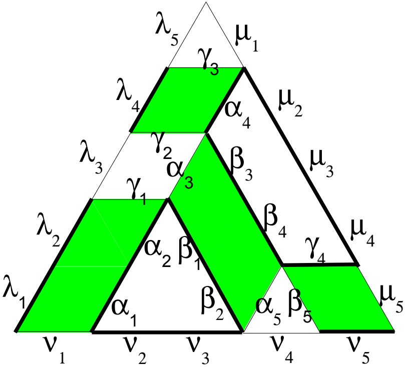
- $(I, J, K))$, $I, J, K \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = |J| = |K|$ est un triplet admissible s'il correspond aux positions des arêtes grasses sur le bord d'un puzzle
- Exemple : $I = \{1, 2, 4\}$, $J = \{2, 3, 4\}$, $K = \{2, 3, 5\}$



Puzzles et inégalités

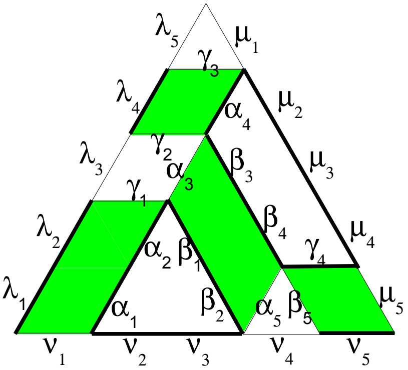
Puzzles et inégalités

- On superpose un plan à une *LR*-ruche



Puzzles et inégalités

- On superpose un plan à une *LR*-ruche



- On obtient une inégalité :
  $\nu_2 + \nu_3 + \nu_5 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_4$
  $\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \beta_3 + \beta_4 + \gamma_4$
  $= \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_4 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$
  $\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$

Inégalités induites par un puzzle

- Si $c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0$, alors chaque inégalité $|\nu|_K \leq |\lambda_I| + |\mu|_J$ induite par un puzzle est satisfaite

Inégalités induites par un puzzle

- Si $c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$, alors chaque inégalité $|\nu|_K \leq |\lambda_I| + |\mu|_J$ induite par un puzzle est satisfaite
- Si une inégalité $|\nu|_K \leq |\lambda_I| + |\mu|_J$ induite par un puzzle est saturée (i.e. devient une égalité), alors les couloirs deviennent redondants : les arêtes opposées de tout losange élémentaire contenu dans un couloir ont la même étiquette

Inégalités induites par un puzzle

- Si $c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$, alors chaque inégalité $|\nu|_K \leq |\lambda_I| + |\mu|_J$ induite par un puzzle est satisfaite
- Si une inégalité $|\nu|_K \leq |\lambda_I| + |\mu|_J$ induite par un puzzle est saturée (i.e. devient une égalité), alors les couloirs deviennent redondants : les arêtes opposées de tout losange élémentaire contenu dans un couloir ont la même étiquette
- Pour montrer qu'un triplet admissible (I, J, K) est un triplet de Horn (et l'inégalité induite une inégalité de Horn), on établit un lien entre les puzzles associés à (I, J, K) et $c_{\rho(I),\rho(J)}^{\rho(K)}$

Énumération des puzzles

- Theorem
  (Knutson-Tao-Woodward 2004) Le nombre de puzzles associés à un triplet (I, J, K) *est égal à* $c_{\rho(I),\rho(J)}^{\rho(K)}$.

Énumération des puzzles

- Theorem
  (Knutson-Tao-Woodward 2004) Le nombre de puzzles associés à un triplet (I, J, K) est égal à $c_{\rho(I),\rho(J)}^{\rho(K)}$.
  - Exemple : $m = 5$, $I = \{1, 2, 4\}$, $J = \{2, 3, 4\}$, $K = \{2, 3, 5\}$

Énumération des puzzles

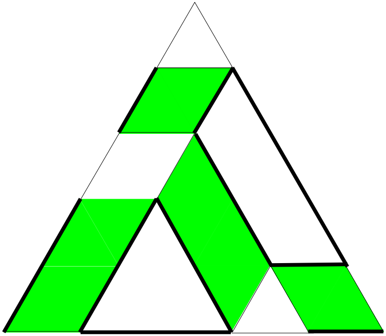
- Theorem

  (Knutson-Tao-Woodward 2004) Le nombre de puzzles associés à un triplet (I, J, K) *est égal à* $c^{\rho(K)}_{\rho(I),\rho(J)}$.

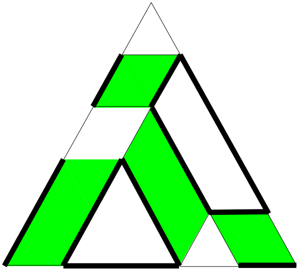
  - Exemple : $m = 5$, $I = \{1, 2, 4\}$, $J = \{2, 3, 4\}$, $K = \{2, 3, 5\}$
    - $c^{\rho(K)}_{\rho(I),\rho(J)} = c^{211}_{1,111} = 1$

Énumération des puzzles

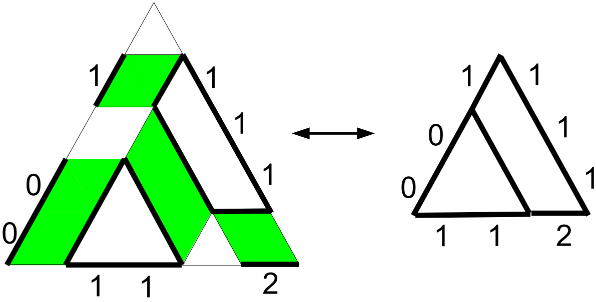
- Theorem
  (Knutson-Tao-Woodward 2004) Le nombre de puzzles associés à un triplet (I, J, K) est égal à $c^{\rho(K)}_{\rho(I),\rho(J)}$.
  - Exemple : $m = 5$, $I = \{1, 2, 4\}$, $J = \{2, 3, 4\}$, $K = \{2, 3, 5\}$
    - $c^{\rho(K)}_{\rho(I),\rho(J)} = c^{211}_{1,111} = 1$
    - un seul puzzle



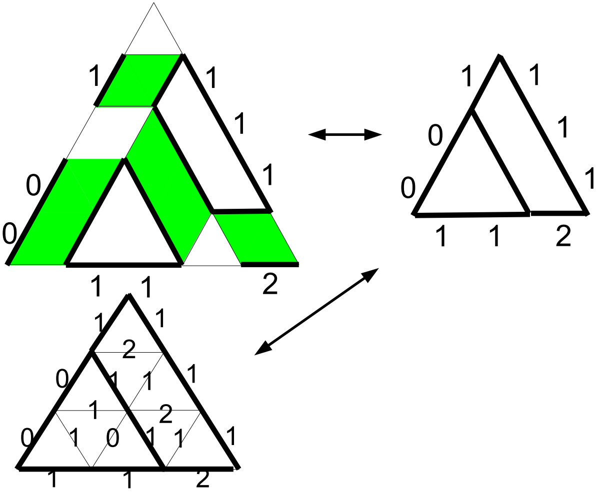
Bijection puzzles $\leftrightarrow$ ruches



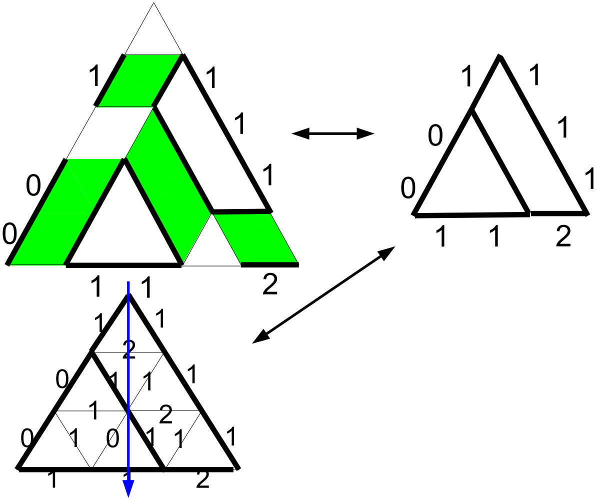
Bijection puzzles ↔ ruches



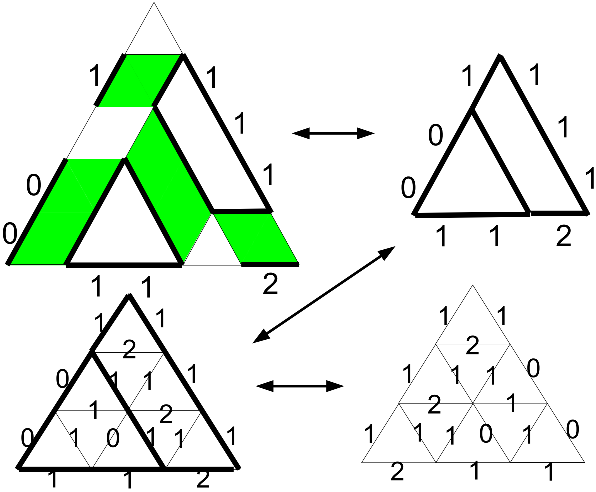
Bijection puzzles ↔ ruches



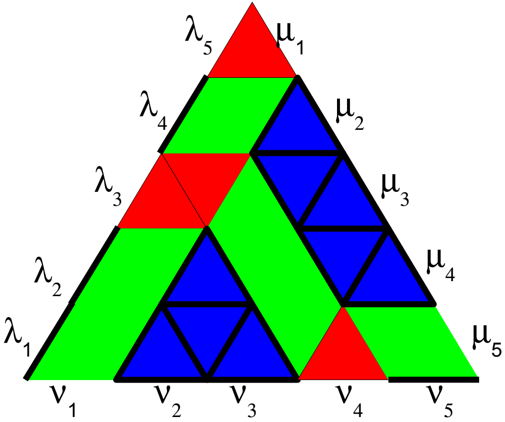
Bijection puzzles ↔ ruches



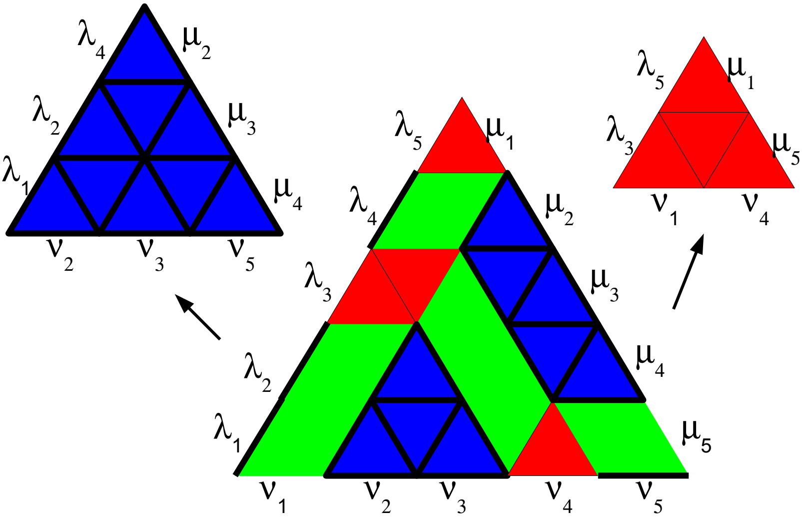
Bijection puzzles $\leftrightarrow$ ruches



Factorisation des ruches



Factorisation des ruches



Factorisation des coefficients de L-R

- (I, J, K) un triplet essentiel

Factorisation des coefficients de L-R

- (I, J, K) un triplet essentiel

- Theorem
  (King-T-Toumazet 2009) Si $|\lambda|_I + |\mu|_J = |\nu|_K$*, alors*

$$c_{\lambda,\mu}^{\nu} = c_{\lambda_I,\mu_J}^{\nu_K} \cdot c_{\lambda_{\overline{I}},\mu_{\overline{J}}}^{\nu_{\overline{K}}}$$

Factorisation des coefficients de L-R

- (I, J, K) un triplet essentiel

- Theorem
  (King-T-Toumazet 2009) Si $|\lambda|_I + |\mu|_J = |\nu|_K$*, alors*

$$c_{\lambda,\mu}^{\nu} = c_{\lambda_I,\mu_J}^{\nu_K} \cdot c_{\lambda_{\overline{I}},\mu_{\overline{J}}}^{\nu_{\overline{K}}}$$

- Deux ingrédients de la preuve :

Factorisation des coefficients de L-R

- (I, J, K) un triplet essentiel

- Theorem
  (King-T-Toumazet 2009) Si $|\lambda|_I + |\mu|_J = |\nu|_K$, *alors*

$$c_{\lambda,\mu}^{\nu} = c_{\lambda_I,\mu_J}^{\nu_K} \cdot c_{\lambda_{\overline{I}},\mu_{\overline{J}}}^{\nu_{\overline{K}}}$$

- Deux ingrédients de la preuve :
  - Une notion de « bon chemin » dont l'union doit couvrir l'ensemble des arêtes internes des couloirs (redondants) pour permettre la factorisation
  - Rigidité d'un puzzle $\Leftrightarrow$ absence de gentle loop (Knutson-Tao-Woodward 2004)

Factorisation des coefficients de L-R

- (I, J, K) un triplet essentiel

- **Theorem**
  (King-T-Toumazet 2009) Si $|\lambda|_I + |\mu|_J = |\nu|_K$, alors

$$c^{\nu}_{\lambda,\mu} = c^{\nu_K}_{\lambda_I,\mu_J} \cdot c^{\nu_{\overline{K}}}_{\lambda_{\overline{I}},\mu_{\overline{J}}}$$

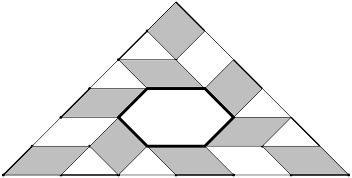
- Deux ingrédients de la preuve :
  - Une notion de « bon chemin » dont l'union doit couvrir l'ensemble des arêtes internes des couloirs (redondants) pour permettre la factorisation
  - Rigidité d'un puzzle $\Leftrightarrow$ absence de gentle loop (Knutson-Tao-Woodward 2004)
- Exemple :
  $c^{(14,12,11,5,4)}_{(9,7,6,2,0),(13,5,3,1,0)} = c^{(12,11,4)}_{(9,7,2),(5,3,1)} \cdot c^{(14,5)}_{(6,0),(13,0)} = 2 \cdot 1 = 2$

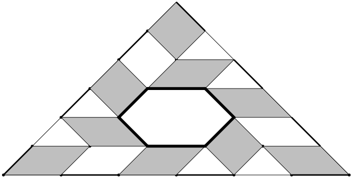
Contre-exemple

- $m = 6$, $r = 3$, $I = J = \{1, 3, 5\}$, $K = \{2, 4, 6\}$

Contre-exemple

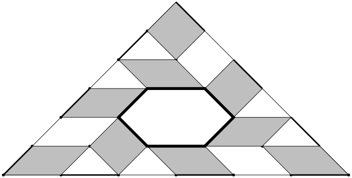
- $m = 6$, $r = 3$, $I = J = \{1, 3, 5\}$, $K = \{2, 4, 6\}$
- Il y a deux puzzles de bord déterminé par (I, J, K) :

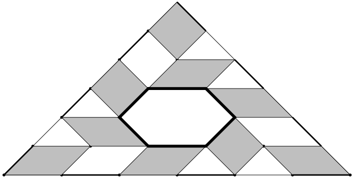




Contre-exemple

- $m = 6,\ r = 3,\ I = J = \{1,3,5\},\ K = \{2,4,6\}$
- Il y a deux puzzles de bord déterminé par (I, J, K) :





- $$c^{332211}_{221100,221100} = 3 \neq 2 \cdot 2 = c^{321}_{210,210} \cdot c^{321}_{210,210}$$

Classes NP et $\#P$

Classes NP et $\#P$

- $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$. $f \in NP$ s'il existe une machine de Turing polynomiale M et un polynôme p tels que :

  $$\forall x \in \{0,1\}^n, f(x) = 1 \Leftrightarrow (\exists y \in \{0,1\}^{p(n)})(M \text{ accepte } (x,y))$$

Classes NP et $\#P$

- $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$. $f \in NP$ s'il existe une machine de Turing polynomiale M et un polynôme p tels que :

  $$\forall x \in \{0,1\}^n, f(x) = 1 \Leftrightarrow (\exists y \in \{0,1\}^{p(n)})(M \text{ accepte } (x,y))$$

  - satisfaisabilité de 3-clauses, chemin hamiltonien, etc.

Classes NP et $\#P$

- $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$. $f \in NP$ s'il existe une machine de Turing polynomiale M et un polynôme p tels que :

  $$\forall x \in \{0,1\}^n, f(x) = 1 \Leftrightarrow (\exists y \in \{0,1\}^{p(n)})(M \text{ accepte } (x,y))$$

  - satisfaisabilité de 3-clauses, chemin hamiltonien, etc.
- $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$. $f \in \#P$ s'il existe une machine de Turing polynomiale M et un polynôme p tels que :

  $$\forall x \in \{0,1\}^n, f(x) = |\{y \in \{0,1\}^{p(n)} \mid M \text{ accepte } (x,y)\}|$$

Classes NP et $\#P$

- $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$. $f \in NP$ s'il existe une machine de Turing polynomiale M et un polynôme p tels que :

  $$\forall x \in \{0,1\}^n, f(x) = 1 \Leftrightarrow (\exists y \in \{0,1\}^{p(n)})(M \text{ accepte } (x,y))$$

  - satisfaisabilité de 3-clauses, chemin hamiltonien, etc.
- $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$. $f \in \#P$ s'il existe une machine de Turing polynomiale M et un polynôme p tels que :

  $$\forall x \in \{0,1\}^n, f(x) = |\{y \in \{0,1\}^{p(n)} \mid M \text{ accepte } (x,y)\}|$$

  - permanent, dénombrement des solutions d'un problème NP, etc.

Complexité

- En général, l'énumération des points entiers dans un polytope est $\#P$-complet

Complexité

- En général, l'énumération des points entiers dans un polytope est $\#P$-complet
- Si la dimension de l'espace ambiant est fixée, il existe un algorithme polynomial qui énumère les points entiers de tout polytope (Barvinok)

Complexité

- En général, l'énumération des points entiers dans un polytope est $\#P$-complet
- Si la dimension de l'espace ambiant est fixée, il existe un algorithme polynomial qui énumère les points entiers de tout polytope (Barvinok)

- Theorem
  (Narayanan 2006) Le calcul des $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ est $\#P$-complet

Complexité

- En général, l'énumération des points entiers dans un polytope est $\#P$-complet
- Si la dimension de l'espace ambiant est fixée, il existe un algorithme polynomial qui énumère les points entiers de tout polytope (Barvinok)

- Theorem
  (Narayanan 2006) Le calcul des $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ est $\#P$-complet

  - Réduction du calcul du nombre $I(a,b)$ de tables de contingence $2 \times k$ de type (a,b), $a \in \mathbb{N}^2$, $a_1 \geq a_2$, $b \in \mathbb{N}^k$ au calcul d'un nombre de Kostka $K_{\lambda,\mu}$ (la correspondance R-S-K est une étape décisive)

Complexité

- En général, l'énumération des points entiers dans un polytope est $\#P$-complet
- Si la dimension de l'espace ambiant est fixée, il existe un algorithme polynomial qui énumère les points entiers de tout polytope (Barvinok)

- Theorem

  (Narayanan 2006) Le calcul des $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ est $\#P$-complet

  - Réduction du calcul du nombre $I(a, b)$ de tables de contingence $2 \times k$ de type (a, b), $a \in \mathbb{N}^2$, $a_1 \geq a_2$, $b \in \mathbb{N}^k$ au calcul d'un nombre de Kostka $K_{\lambda,\mu}$ (la correspondance R-S-K est une étape décisive)
  - Le calcul de $I(a, b)$ est $\#P$-complet (Dyer-Kannan-Mount 1997)

Schéma d'approximation polynomiale

Theorem

(Narayanan 2010) Il existe un algorithme randonisé fortement polynomial qui calcule une fraction $1 - O(\gamma)$ *de tous les* $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ *correspondant aux points entiers de*

$$\textit{Cone de L-R } \cap \{(\lambda, \mu, \nu) \mid |\lambda| + |\mu| + |\nu| \leq \frac{n^5}{\gamma}\}$$

Test de non-nullité

- Theorem
  (Knutson-Tao, Mulmuley-Sohoni) Il existe un algorithme fortement polynomial qui teste si $c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$

Test de non-nullité

- Theorem
  (Knutson-Tao, Mulmuley-Sohoni) Il existe un algorithme fortement polynomial qui teste si $c_{\lambda,\mu}^{\nu} > 0$
  - Deux ingrédients dans la preuve

Test de non-nullité

- Theorem
  (Knutson-Tao, Mulmuley-Sohoni) Il existe un algorithme fortement polynomial qui teste si $c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0$
  - Deux ingrédients dans la preuve
    - Theorème de saturation de Knutson-Tao

Test de non-nullité

- Theorem
  (Knutson-Tao, Mulmuley-Sohoni) Il existe un algorithme fortement polynomial qui teste si $c^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0$
  - Deux ingrédients dans la preuve
    - Theorème de saturation de Knutson-Tao
    - Existence d'un algorithme fortement polynomial pour la programmation linéaire

Coefficients de Clebsch-Gordan pour les types B,C,D

- Pour toute algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie,

$$V^{\lambda} \otimes V^{\mu} = \bigoplus_{\nu} C^{\nu}_{\lambda,\mu} V^{\nu}$$

Coefficients de Clebsch-Gordan pour les types B,C,D

- Pour toute algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie,

$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu C^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$$

- Pour les types B, C et D, il n'y pas de théorème de saturation (contre-exemples pour les types B et C)

Coefficients de Clebsch-Gordan pour les types B,C,D

- Pour toute algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie,
$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu C^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$$
- Pour les types B, C et D, il n'y pas de théorème de saturation (contre-exemples pour les types B et C)
- $C^\nu_{\lambda,\mu} = \#$ points entiers dans un polytope $\mathcal{P}^\nu_{\lambda,\mu}$

Coefficients de Clebsch-Gordan pour les types B,C,D

- Pour toute algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie,
$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu C_{\lambda,\mu}^\nu V^\nu$$
- Pour les types B, C et D, il n'y pas de théorème de saturation (contre-exemples pour les types B et C)
- $C_{\lambda,\mu}^\nu = \#$ points entiers dans un polytope $\mathcal{P}_{\lambda,\mu}^\nu$
- $C_{N\lambda,N\mu}^{N\nu}$ est un pseudo-polynôme en N qui n'est pas, en général, un polynôme

Coefficients de Clebsch-Gordan pour les types B,C,D

- Pour toute algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie,
$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu C^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$$
- Pour les types B, C et D, il n'y pas de théorème de saturation (contre-exemples pour les types B et C)
- $C^\nu_{\lambda,\mu} = \#$ points entiers dans un polytope $\mathcal{P}^\nu_{\lambda,\mu}$
- $C^{N\nu}_{N\lambda,N\mu}$ est un pseudo-polynôme en N qui n'est pas, en général, un polynôme
- Conjecture (De Loera - McAllister 2008) : Pour les types B, C et D, les cœfficients des polynômes f_i dans
$$C^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} = \begin{cases} f_1(N) & \text{si} \quad N \equiv 0 \mod 2 \\ f_2(N) & \text{si} \quad N \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$
sont positifs

Coefficients de Clebsch-Gordan pour les types B,C,D

- Pour toute algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie,
$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu C^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$$
- Pour les types B, C et D, il n'y pas de théorème de saturation (contre-exemples pour les types B et C)
- $C^\nu_{\lambda,\mu} = \#$ points entiers dans un polytope $\mathcal{P}^\nu_{\lambda,\mu}$
- $C^{N\nu}_{N\lambda,N\mu}$ est un pseudo-polynôme en N qui n'est pas, en général, un polynôme
- Conjecture (De Loera - McAllister 2008) : Pour les types B, C et D, les cœfficients des polynômes f_i dans
$$C^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} = \begin{cases} f_1(N) & \text{si} \quad N \equiv 0 \mod 2 \\ f_2(N) & \text{si} \quad N \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$
sont positifs
- Le test $C^\nu_{\lambda,\mu} > 0$ deviendrait polynomial (Mulmuley-Narayanan)