Autour de la conjecture de Razumov-Stroganov

Andrea Sportiello
Résumé par *Olivier* Roussel

Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique
Institut Henri Poincaré
Année 2010 – 2011

Résumé

Il existe trois familles de structures aléatoires, issues de la combinatoire énumérative et de la physique statistique :

1. Un modèle physique concernant la chaîne de spins quantiques de type XXZ qui peut être formulée en termes de « boucles denses de type $\mathcal{O}(1)$ » sur un cylindre semi-infini.
2. Des objets combinatoires appelés *Matrices à Signes Alternant* (MSA), introduits par Robbins et Rumsey il y a 25 ans, qui peuvent être interprétés comme des configurations du modèle à six sommets, un modèle intégrable dans le sens de Baxter.
3. Un modèle de pavages d'un hexagone par des losanges, pavages qui peuvent également être interprétés comme des surfaces aléatoires en trois dimensions de type *Partitions Planes* (plus précisément, *Partitions Planes Totalement Symétriques Auto-Complémentaires*, PPTSAC).

Ces modèles s'énumèrent de la même manière (autrement dit, normalisation de la fonction d'onde sur la chaîne XXZ de longueur $n = \#MSA$ sur un carré de taille $n = \#PPTSAC$ sur un hexagone de taille $2n$), de plus certains dénombrements plus raffinés sont les mêmes. En particulier, les deux premiers modèles ont des dénombrements identiques quand on se restreint aux « classes de topologie » (structures de couplage), qui sont non-locales, et en nombre exponentiel ($\sim 4^n$). Cette propriété a été conjecturée par Razumov et Stroganov en 2001, et prouvée par Cantini et moi-même, en 2010. Deux ingrédients de la preuve sont l'analyse d'une chaîne de Markov à opérateurs dans une algèbre de Temperley-Lieb associée au modèle de boucles denses, et la généralisation d'une certaine bijection naturelle sur l'ensemble des MSA introduite par Wieland et appelée « giration ».

La conjecture de Razumov Stroganov (maintenant théorème de Cantini-Sportiello [1]) relie entre eux deux modèles combinatoires distincts : d'une part les *configurations de boucles compactes* (ou encore *fully packed loop* FPL) et le modèle de *boucles denses de type* $\mathcal{O}(1)$ *sur un cylindre semi-infini*. La conjecture statue alors que ces deux modèles s'énumèrent de la même façon. De plus, on peu relier par ailleurs, via des résultats déjà connus, les FPL sur le carré $n \times n$ avec les *Matrices à Signe Alternant* (ou *Alternating Sign Matrices*, ASM) de taille $n \times n$, ou encore aux Partitions Planes AutoComplémentaires et Totalement Symétriques (ou *Totally Symmetric, SelfComplementary Plane Partitions*, TSSCPP) sur un hexaone de taille $2n$. Tout ces modèles s'énumèrent donc de la même façon

1 Association d'un *couplage plan*

On peut en effet associer à chacun de ces deux modèles précédents un *couplage plan*. Il s'agit d'un appariement de $2n$ points répartis sur un cercle, sans croisements.

Pour les FPL : Un FPL de taille n est un sous-graphe d'une grille carrée $n \times n$, dont chaque sommet est de degré exactement 2. Au bord de la grille, un sommet sur deux, en alternance, a une arête sortante. Considérons alors un FPL de taille n. Dans celui-ci, chacune des $2n$ arête au bord est reliée à une autre, par un unique chemin, formant ainsi un couplage des arêtes (sans croisements aucun). On peut ainsi associer un unique *couplage plan* à chaque FPL.

Pour les boucles denses : Une *configuration de boucles denses* sur un semi-cylindre de périmètre $2n$ est une application de $\{1, \cdots, 2n\} \times \mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$: on « pave » le semi-cylindre avec deux type de tuiles différentes : soit soit . On crée ainsi des « chemins » sur notre cylindre.La majorité sont des boucles ; on peut associer un *couplage plan* en suivant les chemins qui démarrent ou finissent sur le bord.

À partir de ces deux modèles, on associe donc un même objet : un *couplage plan* de taille $2n$. La conjecture de Razumov Stroganov affirme que la probabilité d'obtenir un couplage donné depuis un FPL est la même que depuis un modèle de boules denses sur un semi-cylindre infini. Formellement, si on note $\tilde{\psi}_n(\pi)$ la probabilité d'obtenir le couplage plan π dans le modèle de « boucles denses de type $\mathcal{O}(1)$ » sur un cylindre semi-infini $\{1, \cdots, 2n\} \times \mathbb{N}$; et $\psi_n(\pi)$ celle d'obtenir le couplage plan π pour les FPL sur le carré $n \times n$ (avec mesure uniforme), alors

$$\tilde{\psi}_n(\pi) = \psi_n(\pi)$$

2 Preuve du théorème de la conjecture

Cette dernière se base sur plusieurs idées principales :

1. **Étendre les domaines des FPL :** Cantini et Sportiello ont réussi à étendre et généraliser la notion de FPL à des domaines plus généraux que des carrés : ils conservent la condition d'alternance aux bords, mais l'intérieur de leurs domaines peut être bien plus complexe qu'un simple carré.
2. **La giration de Wieland :** Cela consiste à effectuer une rotation d'un cran du couplage plan. Cette dernière, bijective sur les couplages de taille $2n$, peut se traduire en une bijection non triviale sur les FPL sur le carré $n \times n$. Si on note R cette rotation, alors $\psi_n(R\pi) = \psi_n(\pi)$. En sus de cette opération, on peut définir $2n$ opérateurs e_i sur les couplages plans de taille $2n$. L'opérateur e_i appliqué à un couplage π remplace les deux paires $\{i, j\}$ et $\{i + 1, k\}$ par $\{i, i + 1\}$ et $\{j, k\}$ (et laisse le reste inchangé).
3. **Appliquer ces opérateurs sur les cylindres semi-infini :** On considère un tel cylindre semi-infini, et on lui ajoute une « couche » de tuiles i.i.d. avec probabilité p. On obtient alors un nouveau cylindre semi-infini, et on peut recommencer. Lorsque l'on fait tendre p vers 0, presque toutes les « couches » agiront comme une simple rotation sur le couplage plan associé (c'est à dire $\pi \mapsto R\pi$). Les couches non-triviales agiront alors comme $\pi \mapsto Re_j\pi$ pour un certain j.

En utilisant ensuite ces résultats, Cantini et Sportielli montrent en fait que

$$\tilde{\psi}_n(\pi) = \psi_n^{\Lambda}(\pi)$$

où ψ_n^{Λ} est la probabilité d'obtenir le couplage plan π pour les FPL sur le *domaine généralisé* de taille n.

Références

[1] L. Cantini and A. Sportiello. Proof of the Razumov-Stroganov conjecture. *ArXiv e-prints*, March 2010. arXiv:1003.3376