Combinatoire de Catalan et polynômes harmoniques diagonaux

François Bergeron
Résumé par *Louis-François Préville-Ratelle*

Séminaire de combinatoire énumérative et analytique de l'IHP - 2010-11

Résumé

Au cours des vingt dernières années, l'étude des espaces de polynômes harmoniques diagonaux a mené à une étude fine de la combinatoire des fonctions de stationnement (parking functions) , et de paramètres sur celles-ci. Nous allons présenter certains de ces développements, avec des extensions qui font intervenir l'ordre de Tamari ainsi que ses extensions aux cas de chemins de Dyck généralisés. Nous conclurons en abordant de nouveaux problèmes combinatoires soulevés par cette étude.

1 Introduction

Soit $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq j\leq n}}$ et $q = (q_i)_{1\leq i\leq l}$ deux matrices de variables pour certains entiers positifs l, n. S_n dénote le groupe symétrique sur n éléments. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice d'entiers positifs. Soit X^A le monôme $\prod_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq j\leq n}} x_{i,j}^{a_{i,j}}$ de degré $(\sum_{j=1}^n a_{i,j})_{1\leq i\leq l}$. L'anneau des polynômes en X, invariants par permutation des colonnes, est dénoté $\mathrm{Dsym}(X)$. C'est l'anneau des polynômes diagonalement symétriques. Soit $f(X)$ un polynôme en X et $f(\partial X)$ l'opérateur obtenu en remplaçant chaque variable par l'opération de dérivation partielle correspondante. L'espace des polynômes harmoniques diagonaux est défini comme :

$$\mathcal{D}_{l,n} = \{g(X) \mid f(\partial X)g(X) = 0,\ f(X) \in \mathrm{Dsym}(X),\ \text{et } f(0) = 0\}$$

L'espace vectoriel résultant est gradué par le degré, et ses composantes homogènes sont stables pour l'action de S_n, par permutation des colonnes dans les variables X. Un théorème datant des années 1950 démontre que la série de Hilbert de $\mathcal{D}_{l,n}$ égale :

$$Hilb(\mathcal{D}_{l,n}; q_1) = (1 + q_1)(1 + q_1 + {q_1}^2)...(1 + q_1 + .. + {q_1}^{n-1}) = \sum_{\sigma\in S_n} q_1^{\mathrm{inv}(\sigma)}$$

$\mathcal{D}_{1,n}$ est en fait isomorphe à la représentation régulière. Soit $\mathcal{D}^{\epsilon}_{l,n}$ la sous-représentation signe de $\mathcal{D}_{l,n}$. Haiman a démontré ([Hai]) que $\dim(\mathcal{D}_{2,n}) = (n + 1)^{n-1}$ et $\dim(\mathcal{D}^{\epsilon}_{2,n}) = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$. Haiman a de plus observé qu'on semble avoir $\dim(\mathcal{D}_{3,n}) = 2^n(n+1)^{n-2}$ et $\dim(\mathcal{D}^{\epsilon}_{3,n}) = \frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$. Cependant, son approche avec la géométrie algébrique pour la preuve du cas $l = 2$ ne s'applique pas à $l \geq 3$. Il a également observé que la décomposition en nombre premiers de $\dim(\mathcal{D}_{4,n})$ fait apparaître de gros nombres premiers pour certains n.

En résumant, l'approche qui consiste à fixer l et à faire varier n semble devenir très complexe rapidement. Le conférencier a décidé d'essayer de faire varier l et fixer n à la place. Il a alors énoncé une conjecture magnifique qui dit que la série de Hilbert est h-positive, où h représente les fonctions symétriques complètes, et que cette série semble être un raffinement du nombre d'inversions peu importe la valeur de n. Pour être plus spécifique, il a conjecturé que (n fixé) pour tout l :

$$Hilb(\mathcal{D}_{l,n};q) = \sum_{\sigma \in S_n} h_{\mathrm{raf}(\mathrm{inv}(\sigma))}(q)$$

où $\mathrm{raf}(\mathrm{inv}(\sigma))$ est un raffinement du nombre d'inversions de σ. Le raffinement exact reste pour l'instant inconnu. L'auteur a conclut cette partie en ajoutant qu'une telle h-positivité semble valable pour d'autres groupes.

Le conférencier a alors introduit de nouvelles conjectures sur l'étiquetage des intervalles du treillis de Tamari (défini sur les chemins de Dyck). En utilisant l'encyclopédie de Sloane et la formule d'Haiman pour $\dim(\mathcal{D}_{3,n}^{\epsilon})$, il a aperçu que le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari est égal à $\dim(\mathcal{D}_{3,n}^{\epsilon})$, un théorème de Chapoton ([Cha]). Bergeron a alors conjecturé que si l'on remplace le chemin de Dyck du haut par tous les parking functions sur ce chemin de Dyck, il semblerait alors que le nombre d'intervalles étiquetés soit égal à $\dim(\mathcal{D}_{3,n})$.

Il a également conjecturé (en partie avec Haiman) que les m-chemins de Dyck et les m-parking se généralisaient pour devenir les intervalles dans le m-treillis de Tamari non-étiquetés et étiquetés et étaient comptés respectivement par

$$\frac{(m+1)}{m(mn+1)}\binom{(m+1)^2 n + m}{n-1}$$

et

$$(m+1)^n (mn+1)^{n-2}.$$

Cette définition des m-treillis de Tamari est une simple généralisation de la relation de couverture dans le treillis de Tamari standard. Il s'agit en fait d'un sous-treillis du treillis de Tamari standard. Ces conjectures ont été motivées par l'étude d'espaces des m-polynômes harmoniques diagonaux.

Le conférencier a terminé son exposé en soulignant qu'une telle h-positivité semble aussi valable pour les espaces coinvariants associés aux polynômes diagonalement quasi-symétriques. Dans ce cas le raffinement serait sur une simple statistique sur les chemins de Dyck, déjà mise en évidence par les travaux de Bergeron-Bergeron-Aval ([AvBer]).

Références

[AvBer] Aval, J.-C. and Bergeron, F. and Bergeron, N. (2007). Diagonal Temperley-Lieb invariants and harmonics. In Sém. Lothar. Combin., volume 54A, 19pages.

[Ber] Bergeron, François (2009). Algebraic combinatorics and coinvariant spaces. CMS Treatises in Mathematics, Canadian Mathematical Society, 221 pages.

[Cha] Chapoton, Frédéric (2007). Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari. In Sém. Lothar. Combin., volume 55, 18 pages.

[Hai] Haiman, Mark (2001). Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture. In J. Amer. Math. Soc., vol. 14, pages 941–1006.