

# Mots, chemins, arbres, cartes

*Gilles Schaeffer*

Résumé par *Charles Delorme*

Séminaire de combinatoire énumérative et analytique de l'IHP - 2010-11

## Résumé

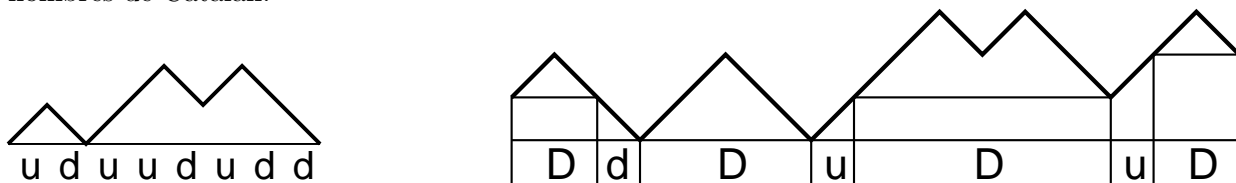
L'exploration d'un chemin permet d'en donner un codage par un mot. L'exploration d'un arbre plan permet d'en donner un codage par un chemin. L'exploration d'une carte planaire permet d'en donner un codage par un arbre.

Ces assertions couvrent plusieurs énoncés précis de bijections entre différentes familles de chemins, d'arbres et de cartes, donc certaines obtenues encore tout récemment. Ces bijections ont de multiples applications, de la génération aléatoire au dessin automatique de graphes, en passant par la conception de structures de données compactes et l'étude des distances dans les grandes cartes aléatoires.

Mon but sera cependant plutôt de montrer l'élégance de ces résultats et des formules qui en résultent. Ceci sera l'occasion de vanter quelques outils bijectifs classiques : mots bien parenthésés, lemme cyclique, parcours en largeur et en profondeur, orientations minimales.

## 1 Mots et chemins

Les chemins formés de pas vers la droite, avec à chaque fois une montée ou une descente se codent avec des mots sur l'alphabet  $\{u, d\}$ . On s'intéresse, entre autres à ceux qui partant de 0 aboutissent à 0 sans passer sous le niveau de départ : mots de Dyck. Ils se décrivent, en notant le premier passage en 0 après le départ par la règle  $D = \{\} + uDdD$ , ce qui fournit une manière de les compter (parmi bien d'autres), la fonction génératrice est  $f(z) = 1 + z^2 f(z)^2$  (un  $z$  pour la première montée, un pour la descente qui précède le premier retour en 0). Ce qui livre le nombre de ces mots de longueur  $2n$  par application du binôme de Newton  $[z^t](f) = \binom{2n}{n} / (n+1)$ , les fameux nombres de Catalan.



Les chemins qui partant du niveau  $\ell$  descendent au niveau 0, sans passer en dessous de 0 arrivent au niveau  $k$  en  $n$  pas (avec  $n+k+\ell$  pair), se décrivent avec une suite de  $\ell$   $d$  puis  $k$   $u$  intercalés entre  $k+\ell+1$   $D$  (voir figure avec  $\ell=1$  et  $k=2$ ) d'où la série génératrice  $z^{k+\ell} f(z)^{k+\ell+1}$ . Le coefficient de  $z^{2n}$  dans  $f(z)^k$  est  $\binom{2n+k-1}{n} \frac{k}{n+k}$ .

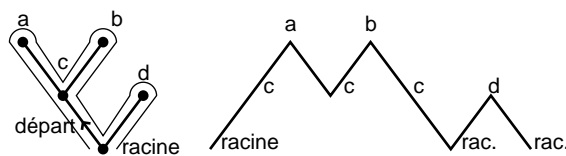
Une application : le potentiel d'une marche aléatoire avec à chaque instant probabilité  $p$  de monter, et  $q=1-p$  de descendre d'un cran, avec chute et noyade dans la rivière locale en passant

au dessous de 0. Le potentiel est l'espérance du nombre de passages en  $\ell$  en partant de  $k$  : c'est donc  $\sum_{t=0}^k C^{2t+1} (pq)^t p^{\ell-k}$  si  $\ell \geq k$  et  $\sum_{t=0}^{\ell} C^{2t+1} pq^t q^{k-\ell}$  si  $k \geq \ell$ , avec  $C = (1 - \sqrt{1 - 4pq}) / (2pq)$ .

Une autre technique est une occurrence du lemme cyclique de Raney (on peut en voir une variante dans [4, p. 345-346]). On compte tous les mots de longueur  $2n + 1$  avec  $n$  montées et  $n + 1$  descentes. Il y en a  $\binom{2n+1}{n}$ . En permutant circulairement les lettres, on tombe sur exactement un mot qui soit un mot de Dyck suivi d'une descente, celui où "les montées sont le mieux groupées vers le début" : il y en a donc  $\binom{2n+1}{n} / (2n + 1) = \binom{2n}{n} / (n + 1)$ .

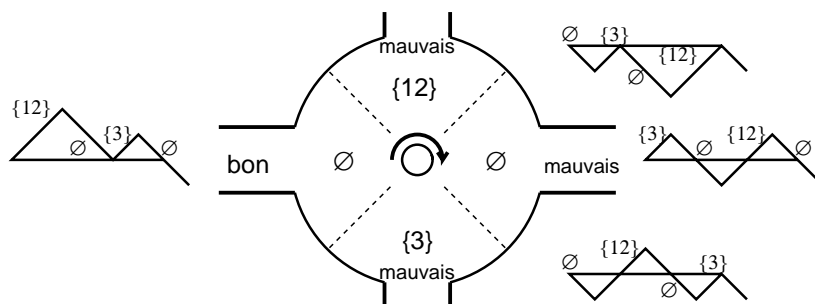
## 2 Chemins et arbres

On fait aisément apparaître une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  les arbres à  $n$  arêtes placés dans le plan (avec racine et arête de départ) : on fait le tour de l'arbre en le laissant à droite, et on enregistre si à chaque passage près d'un sommet on s'est éloigné ou rapproché de la racine.



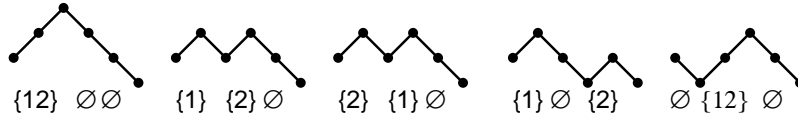
## 3 Chemins et fonctions de stationnement

. On a un parc circulaire à  $n$  places et un accès. Il y a  $n$  voitures à garer. Chaque voiture choisit au préalable une place. Si lorsqu'elle arrive sa place est déjà prise, elle prend la première place disponible après la sienne. Les bonnes fonctions sont celles qui garantissent que, quelque soit l'ordre d'arrivée des voitures, elles pourront se garer selon cette règle. Ceci ne marche bien sûr que si les places choisies sont plutôt vers les premières et que l'accès reste libre. On peut, en remplaçant la fonction  $f$  par  $f + k \pmod{n + 1}$  (autrement dit en faisant tourner le chemin d'arrivée au parc), garantir l'existence d'une et une seule bonne fonction parmi les  $n + 1$  de la forme  $f + k \pmod{n + 1}$ ,  $0 \leq k \leq n$ .



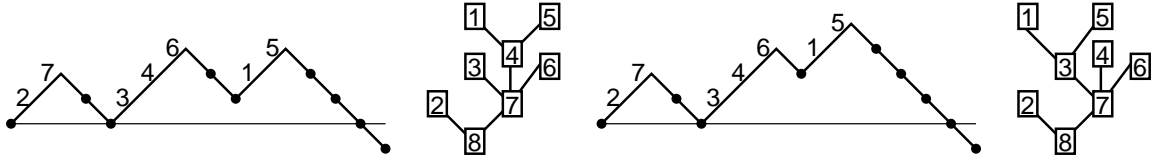
Il y a en tout  $(n + 1)^n$  fonctions, donc  $(n + 1)^{n-1}$  bonnes fonctions. En effet l'on peut attacher à chaque fonction un chemin : si la place (ou accès)  $i$  est choisie par  $u$  voiture, on met  $u$  montées, puis une descente. On a donc en tout  $n$  montées qui correspondent aux  $n$  voitures et  $n + 1$  descentes.

Pour  $n = 2$ , voici les 3 fonctions acceptables, puis deux parmi les 6 mauvaises, avec les chemins correspondants : à chaque case est attachée son image réciproque par  $f$ .



Ce nombre  $(n + 1)^{n-1}$  évoque irrésistiblement celui des arbres étiquetés à  $n + 1$  sommets.

On va numéroter les montées du chemin avec les valeurs de la fonction en ordre croissant et bâtir un arbre étiqueté, où la racine est repérée par la plus haute étiquette, comme le montrent les deux exemples : qui suivent



## 4 Cartes et arbres

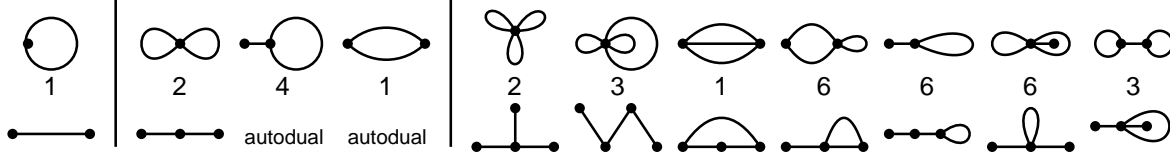
Une carte est un plongement d'un graphe (planaire, pouvant avoir des boucles et des arêtes multiples) dans le plan. On tient compte des sommets, des arêtes et des faces. La formule d'Euler s'applique, les nombres  $s$  de sommets,  $a$  d'arêtes et  $f$  de faces satisfont  $s + f = a + 2$ .

Le nombre de cartes à  $n$  arêtes est

$$\frac{3^n \cdot 2}{(n + 2)(n + 1)} \binom{2n}{n}$$

en ayant marqué une arête, un sommet et une face incidents à cette arête (enracinement) Voir [6] (où sont dessinées les 2 figures pour  $n = 1$  et les 9 figures pour  $n = 2$ ) ou [5, A000168]

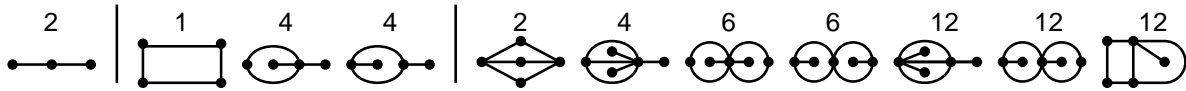
Voici les formes sans orientation des cartes à 1, 2, 3 arêtes et pour chacune (et sa duale) le nombre d'enracinements dissemblables



Le nombre des quadrangulations à  $n$  faces, et donc  $2n$  arêtes et  $n + 2$  sommets (toujours avec enracinement) est aussi [3]

$$\frac{3^n \cdot 2}{(n + 2)(n + 1)} \binom{2n}{n}$$

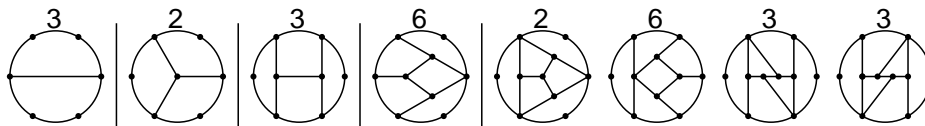
Voici les formes sans orientation des quadrangulations à 1, 2 ou 3 faces, avec pour chacune le nombre d'enracinements dissemblables



Les quadrangulations sans isthmes, ni arêtes multiples, ni séparateurs à 4 sommets d'un hexagone ayant ses six sommets distincts) se dénombrent avec les nombres, ([5, A007054] où  $n$  est le nombre de sommets supplémentaires, et l'enracinement se faisant avec la face hexagonale.

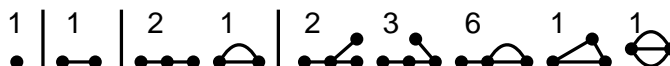
$$\frac{6}{(n + 1)(n + 2)} \binom{2n}{n}$$

Voici les formes, pour au plus 6 faces en plus de la face hexagonale, avec le nombre d'énracinements non isomorphes possibles (nécessairement diviseur de 6) : les deux derniers sont symétriques, mais dans une symétrie qui renverse l'orientation.



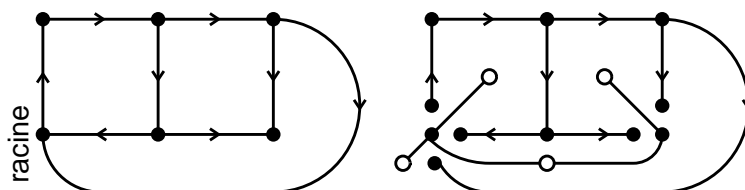
Le nombre des cartes sans boucles à  $n$  arêtes (voir figure ci-dessous, pour au plus 3 arêtes), ainsi que celui des cartes 3-connexes avec  $2n + 2$  sommets de degré 3, (toujours avec enracinement), ou leurs duales, cartes 3-connexes avec  $2n + 2$  faces triangulaires, sans boucles ni arêtes multiples. est [5, A000260]

$$\frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}$$



Donnons un aperçu des objets manipulés pour obtenir certains de ces dénombrements.

On part d'une carte munie d'une orientation telle que l'on peut aller de la racine à tout sommet par un chemin gauche (sans entrée à gauche). On garde ces chemins ; ils constituent un premier arbre. On éclate les sommets en préservant les chemins gauches : on obtient un autre arbre, dont les sommets correspondent aux sommets éclatés et aux faces de la carte, avec des arêtes correspondant aux incidences sommets–faces de la carte. Ces deux arbres sont d'une certaine façon accouplés et celui extrait de la carte orientée sert à “décorer” l'autre. On trouve ainsi un produit où apparaissent le nombre des arbres  $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$  et le nombre des “bourgeons” possibles, *a priori*  $3^n$  par arbre, mais une condition similaire à celle des fonctions de stationnement amène à n'en garder que  $\frac{2}{n+2}$ .



## Références

- [1] O. Bernardi, É Fusy (2010) A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations etc. [ArXiv:1007.1292v3](https://arxiv.org/abs/1007.1292v3) [math.CO]
- [2] F. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber (1978) Planar diagrams *Commun. math. Phys.* 50 p. 35–51
- [3] G. Chapuy, M. Marcus, G. Schaeffer (2008) A bijection for rooted maps on orientable surfaces [ArXiv:0712.3649v2](https://arxiv.org/abs/0712.3649v2) [math.CO]
- [4] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik (1987) *Concrete Mathematics* Addison Wesley
- [5] N. J. A. Sloane On-line encyclopedia of integer sequences <http://oeis.org/>
- [6] W.T. Tutte (1973) The enumerative theory of planar maps. In *Survey combin. Theory, Sympos. Colorado State Univ., Colorado 1971*, pages 437–448.