POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET ÉQUATIONS DE PAINLEVÉ DISCRÈTES

Polynômes orthogonaux sur le cercle unité. Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant des moments de tout ordre, la famille des polynômes orthogonaux $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ pour cette mesure est l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour le produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mu(dx)\,. \tag{1}$$

Toute famille de polynômes orthogonaux graduée en degré satisfait une relation de récurrence à 3 termes

$$P_{n+1}(z) = (a_n z + b_n)\,P_n(z) - c_n\,P_{n-1}(z)\,, \tag{2}$$

et les coefficients a_n, b_n, c_n sont reliés aux moments $m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n\,\mu(dx)$ de la mesure μ et à sa transformée de Cauchy-Stieltjes par les relations :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x}\,\mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n\,z^{-n-1} = \cfrac{a_0}{a_0 z + b_0 - \cfrac{c_1}{a_1 z + b_1 - \cfrac{c_2}{a_2 z + b_2 - \cdots}}} \tag{3}$$

cf. [Fla80, Vie84]. Pour la plupart des exemples classiques, les coefficients a_n, b_n, c_n, m_n ont des interprétations combinatoires. Par exemple, si $d\mu(x) = 1_{x\in[-2,2]}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}\,dx$ est la loi du demi-cercle, alors les polynômes orthogonaux sont (à une renormalisation près) les polynômes de Chebyshev de seconde espèce, et

$$a_n = 1 \quad ; \quad b_n = 0 \quad ; \quad c_n = 1 \quad ; \quad m_{2n} = C_n \text{ (nombre de Catalan)} \quad ; \quad m_{2n+1} = 0\,. \tag{4}$$

Plus généralement, la plupart des polynômes orthogonaux classiques rentrent dans le cadre du schéma d'Askey, c'est-à-dire qu'ils s'obtiennent par spécialisation ou passage à la limite des paramètres des polynômes orthogonaux d'Askey-Wilson associés aux poids

$$\mu_{a,b,c,d;q}(dx) = \left|\frac{(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta};q)_\infty}{(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};q)_\infty\,(b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};q)_\infty\,(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};q)_\infty\,(d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};q)_\infty}\right|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec } x = \cos\theta\,. \tag{5}$$

Pour ces derniers, les coefficients de récurrence et une interprétation combinatoire des moments sont également connus, voir par exemple [CW10].

On s'intéresse au problème analogue pour des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, c'est-à-dire pour l'orthogonalisée de Gram-Schmidt $(\phi_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ de $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à une mesure μ sur le cercle $\mathbb{T}^1$. Dans ce qui suit, on supposera que μ a pour forme

$$d\mu(\theta) = \omega(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,d\theta = \left|\frac{(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};q)_\infty}{(b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};q)_\infty}\right|^2 d\theta\,. \tag{6}$$

Les relations de récurrence des polynômes orthogonaux sur le cercle sont dues à G. Szegő (voir [Sze75]). Ainsi, il existe des coefficients $\alpha_n \in \mathbb{C}$ (appelés coefficients de Verblunsky) tels que, si $\phi_n^*(z) = z^n\,\overline{\phi_n(z^{-1})}$, alors :

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(z) &= z\,\phi_n(z) + \alpha_{n+1}\,\phi_n^*(z) \\ \phi_{n+1}^*(z) &= \overline{\alpha_{n+1}}\,z\,\phi_n(z) + \phi_n^*(z) \end{cases} \tag{7}$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme $\Phi_{n+1}(z) = B_n(z)\,\Phi_n(z)$ avec $\Phi_n(z) = \begin{pmatrix}\phi_n(z)\\ \phi_n^*(z)\end{pmatrix}$ et $B_n(z) = \begin{pmatrix} z & \alpha_n \\ \overline{\alpha_n} z & 1\end{pmatrix}$. On s'intéresse donc à ces coefficients α_n ; ils vont s'avérer satisfaire des relations non linéaires qu'on peut interpréter comme itérations d'une transformation birationnelle du plan projectif complexe éclaté en neuf points.

Relations vérifiées par les coefficients de Verblunsky. Le poids $\omega(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ peut être prolongé en une fonction holomorphe vérifiant l'équation

$$\omega(qz) = \frac{V(z)}{W(z)}\,\omega(z) = \frac{(qz-\overline{a})(1-bz)}{(qz-\overline{b})(1-az)}\,\omega(z)\,. \tag{8}$$

Ceci implique l'existence de matrices $A_n(z) = A_n^2\,z^2 + A_n^1\,z + A_n^0$ telles que $\Phi_n(qz) = \frac{A_n(z)}{V(z)}\,\Phi_n(z)$, et les matrices A_n et B_n vérifient la condition de compatibilité

$$A_{n+1}(z)\,B_n(z) = B_n(qz)\,A_n(z)\,, \tag{9}$$

qui va se révéler être une forme de Lax d'une équation de Painlevé discrète ([JS96, Sak01]). Dès lors, le problème se ramène à l'étude de l'équation matricielle

$$\widetilde{A}(z) = B(qz)\,A(z)\,B(z)^{-1}\,, \tag{10}$$

avec

$$A(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z^2 + az + \theta_1 & z-y \\ cz(z-w) & \kappa_2 z^2 + bz + \theta_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \widetilde{A}(z) = \begin{pmatrix} \widetilde{\kappa}_1 z^2 + \widetilde{a}z + \widetilde{\theta}_1 & z-\widetilde{y} \\ \widetilde{c}z(z-\widetilde{w}) & \widetilde{\kappa}_2 z^2 + \widetilde{b}z + \widetilde{\theta}_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

et $B(z) = \left(\begin{smallmatrix} z & \alpha \\ \overline{\alpha}z & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En effet, étant donnée une matrice $A(z)$, il existe génériquement une unique matrice $\widetilde{A}(z)$ vérifiant l'équation (10), et d'autre part, pour le problème des coefficients de Verblunsky,

$$y = \frac{\alpha_n(\overline{a} - \overline{b}q^n)}{\alpha_{n+1}(a - bq^{n+1})}, \tag{12}$$

donc il suffit clairement de comprendre la transformation $y \longrightarrow \widetilde{y}$.

Étude d'une transformation birationnelle du plan projectif $\mathbb{CP}^2$ éclaté en neuf points. On doit à H. Sakai une théorie reliant les équations de Painlevé discrètes à des surfaces rationnelles et à des systèmes de racines affines ([Sak01]). Dans l'équation (10),

$$\det A(z) = \kappa_1\kappa_2(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4) \tag{13}$$

$$\det \widetilde{A}(z) = q\kappa_1\kappa_2(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4) \tag{14}$$

ce qui impose en particulier $\widetilde{\kappa}_1 = q\kappa_1$, $\widetilde{\kappa}_2 = \kappa_2$, $\widetilde{\theta}_1 = q\theta_1$ et $\widetilde{\theta}_2 = \theta_2$. Les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4, κ_1, κ_2, θ_1, θ_2 étant fixés, l'espace $X_{\kappa_1,\kappa_2,\theta_1,\theta_2}$ constitué des matrices $A(z)$ ayant pour déterminant (13) est une variété complexe de dimension 2, et la transformation $A(z) \mapsto \widetilde{A}(z)$ est une bijection entre un ouvert dense de $X_{\kappa_1,\kappa_2,\theta_1,\theta_2}$ et un ouvert dense de $X_{q\kappa_1,\kappa_2,q\theta_1,\theta_2}$; autrement dit, c'est une transformation birationnelle $\psi : X_{\kappa_1,\kappa_2,\theta_1,\theta_2} \to X_{q\kappa_1,\kappa_2,q\theta_1,\theta_2}$.

La variété $X = X_{\kappa_1,\kappa_2,\theta_1,\theta_2}$ est paramétrée par y et par $\xi = \frac{(y-c_1)(y-c_2)}{\kappa_1 y^2 + ay + \theta_1}$; avec ces coordonnées, elle s'identifie au plan projectif complexe $\mathbb{CP}^2$ éclaté en neuf points[1], et on peut donner des expressions explicites des fractions rationnelles mises en jeu dans la transformation $\psi : (y,\xi) \mapsto (\widetilde{y},\widetilde{\xi})$. Par exemple,

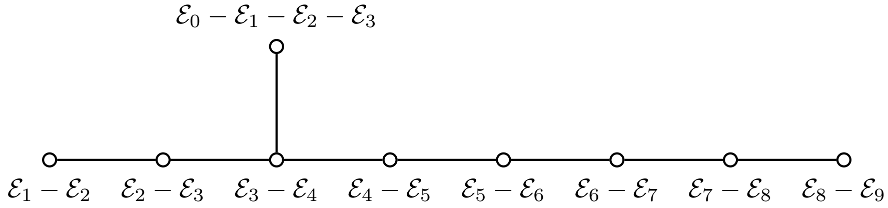
$$\widetilde{\xi} = \frac{c_1c_2}{\kappa_1\theta_1\xi}\,\frac{\left[\xi(y-\frac{q\theta_1}{c_1\kappa_2}) - \frac{q}{\kappa_2}(y-c_2)\right]\left[\xi(y-\frac{q\theta_1}{c_2\kappa_2}) - \frac{q}{\kappa_2}(y-c_1)\right]}{\left[\xi(y-c_4) - \frac{q}{\kappa_2}(y-\frac{\theta_2}{qc_3\kappa_1})\right]\left[\xi(y-c_3) - \frac{q}{\kappa_2}(y-\frac{\theta_2}{qc_4\kappa_1})\right]}\,. \tag{15}$$

La forme factorisée ci-dessus peut être expliquée en considérant l'isométrie $\psi^\star$ induite par ψ entre les groupes de Picard[2] $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{Pic}(\widetilde{X})$. Pour $\mathbb{CP}^2$, le groupe de Picard est $\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}$, et il est engendré par la classe $\mathcal{E}_0$ d'une droite générique de $\mathbb{CP}^2$; l'éclatement en neuf points rajoute neuf

[1] C'est aussi $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ éclaté en huit points.

[2] Comme X est (au sens de Sakai) une surface de Halphen généralisée, on peut reconstruire ψ à partir de $\psi^\star$.

diviseurs exceptionnels $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_9$, donc $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}^{10}$. L'orthogonal du diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ (l'unique cubique passant par neuf points génériques) pour la forme d'intersection sur $\mathrm{Pic}(X)$ est un réseau de rang 9 engendré par les racines d'un système de type $E_8^{(1)}$:

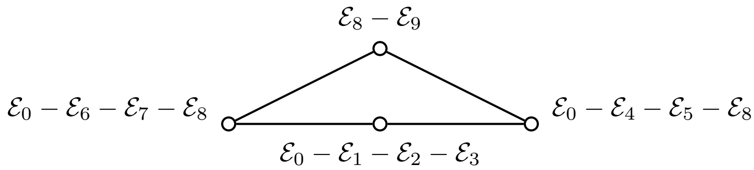


(16)

et la matrice de $\psi^\star$ dans les bases $(\mathcal{E}_i)_{i=0}^9$ et $(\widetilde{\mathcal{E}}_i)_{i=0}^9$ s'écrit

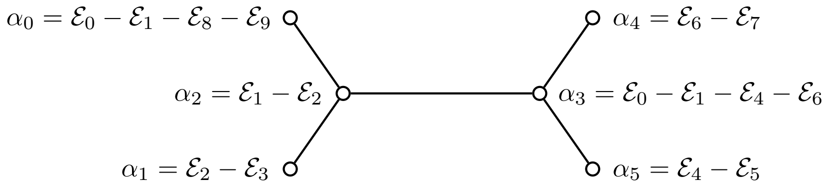
$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

On peut encore simplifier l'analyse de ψ en remarquant que l'isométrie $\psi^\star$ agit trivialement sur le sous-réseau de $\mathrm{Pic}(X)$ engendré par les composantes irréductibles



(18)

du diviseur anticanonique $-\mathcal{K}_X$ — ces diviseurs constituent un système de racines de type $A_3^{(1)}$. L'orthogonal de ce sous-réseau est engendré par un système de racines de type $D_5^{(1)}$:



(19)

et l'action de $\psi^\star$ sur ce dernier sous-réseau est simplement une translation, dont une écriture réduite dans le groupe de Weyl affine est

$$\psi^\star = \sigma\, \omega_4\, \omega_3\, \omega_2\, \omega_0\, \omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_4\,. \tag{20}$$

Ici, les ω_i désignent les réflexions associées aux racines simples α_i, et σ est l'automorphisme du diagramme de Dynkin $D_5^{(1)}$ donné par $\sigma(\alpha_0) = \alpha_1$ et $\sigma(\alpha_4) = \alpha_5$. Relevées au plan projectif éclaté en neuf points, les ω_i sont toutes conjuguées à la transformation élémentaire

$$[x; y; z] \in \mathbb{CP}^2 \mapsto \left[\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z}\right] \in \mathbb{CP}^2\,; \tag{21}$$

on a donc compris la combinatoire de l'opération $\psi : (y, \xi) \mapsto (\widetilde{y}, \widetilde{\xi})$.

References

[Bia09] P. Biane. Orthogonal polynomials on the unit circle, q-Gamma weights, and discrete Painlevé equations. arXiv:0901.0947v2 [math.CA], 2009.

[CW10] S. Corteel and L. K. Williams. Staircase tableaux, the asymmetric exclusion process, and Askey-Wilson polynomials. *S. Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 107(15):6726–6730, 2010.

[Fla80] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Math.*, 32(2):125–161, 1980.

[JS96] M. Jimbo and H. Sakai. A q-analog of the sixth painlevé equation. *Lett. Math. Phys.*, 38(2):145–154, 1996.

[Sak01] H. Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the painlevé equations. *Comm. Math. Phys.*, 220(1):165–229, 2001.

[Sze75] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*, volume XXIII of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 4th edition, 1975.

[Vie84] X. Viennot. *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux*. Lecture Notes UQAM. Publications du LACIM, Université du Québec à Montréal, 1984.