Algèbres de Hopf combinatoires

Pierre CARTIER
Résumé par *Philippe* BIANE

Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique
Institut Henri Poincaré
Année 2010 – 2011

Résumé

Les opérations de contraction et d'insertion dans les graphes – selon la prédiction de G.-C. Rota – conduisent à des algèbres de Hopf . On décrira deux exemples principaux, liés aux diagrammes de Feynman et à la monodromie d'èquations différentielles. On explicitera les théorèmes de structure sous-jacents.

1 Algèbres de Hopf

1.1 Origines

La notion d'algèbre de Hopf apparaît pour la première fois en topologie dans les travaux d'Ehresmann. Il s'agissait d'étudier la cohomologie des groupes unitaires. Comme l'espace sous-jacent est un groupe, on dispose d'une application $G \times G \to G$ (la multiplication) qui donne par dualité un coproduit sur la cohomologie.

1.2 Définitions

Un espace vectoriel A est muni d'une structure d'algèbre si on se donne une multiplication. Celle-ci définit une application linéaire

$$m : A \otimes A \to A$$

Les diverses propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, existence d'une unité, ...) se traduisent sur m, par exemple l'associativité correspond à

$$m \circ (m \otimes I) = m \circ (I \otimes m) : A \otimes A \otimes A \to A$$

Dualement un coproduit sur un espace vectoriel C est une application linéaire

$$\Delta : C \to C \otimes C$$

En renversant le sens des flèches, on peut définir des notions de coassociativité, cocommutativité, etc... Par exemple la cosassociativité du coproduit s'écrit

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta : C \to C \otimes C \otimes C$$

Une algèbre de Hopf est une algèbre H, munie d'un coproduit tels que ces deux opérations soient compatibles c'est-à-dire que $\Delta : H \to H \otimes H$ est un morphisme d'algèbres et que $m : H \otimes H \to H$ est un morphisme de cogèbres. On parle alors de bigèbre. Pour avoir une algèbre de Hopf il faut que le produit et le coproduit soient associatifs et en plus admettent une unité et une counité, ainsi qu'une antipode.

Exemple : Soit H l'algèbre des polynômes en n variables sur le corps K, $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ on définit le coproduit par extension linéaire et multiplicative de

$$\Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$$

On peut interpréter ce coproduit comme une doublement de variables :

$$\Delta : A \to A \otimes A \sim K[x'_1, \ldots, x'_n, x''_1, \ldots, x''_n]$$

$$\Delta P(x'_1, \ldots, x'_n, x''_1, \ldots, x''_n) = P(x'_1 + x''_1, \ldots, x'_n + x''_n)$$

Remarque : le dual d'une coalgèbre est une algèbre, mais la réciproque n'est pas vrai en dimension infinie, cela provient du fait qu'en général le dual d'un produit tensoriel est plus grand que le produit tensoriel des duaux : $H^* \otimes H^* \subset (H \otimes H)^*$ mais pas d'égalité, par conséquent $m^* : H^* \to (H \otimes H)^*$ n'a pas de raison de prendre ses valeurs dans $H^* \otimes H^*$.

1.3 Structure des algèbres de Hopf commutatives ou cocommutatives

Il s'agit de résultat dûs à Cartier, Milnor-Moore, Quillen.

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, toute algèbre de Lie se plonge de manière universelle dans une algèbre associative (appelée son algèbre enveloppante). Cette algèbre enveloppante est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative pour le coproduit défini par

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \tag{1}$$

pour tout x dans l'algèbre de Lie. Réciproquement, dans une algèbre de Hopf cocommutative les éléments x satisfaisant (1) s'appelle les éléments primitifs. Ils forment une algèbre de Lie, et l'algèbre de Hopf est isomorphe à l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie. La version duale de ce résultat énonce qu'une algèbre de Hopf commutative graduée est isomorphe, en tant qu'algèbre, à une algèbre polynomiale.

2 Algèbres de Hopf combinatoires

La notion d'algèbre de Hopf permet de donner une version algébrique des opérations combinatoires de concaténation et déconcaténation.

2.1 Algèbres libres

Considérons l'algèbre de Lie libre de générateurs $\xi_1, \ldots, \xi_n$, son algèbre enveloppante est l'algèbre libre engendrée par $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Elle admet une base linéaire formée par les mots sur l'alphabet $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (le mot vide étant l'identité). Le produit dans cette algèbre est la concaténation des mots

$$(x_1 \ldots x_p)(y_1 \ldots y_q) = x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q$$

le coproduit est encore donné par

$$\Delta(\xi_i) = 1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1$$

Sur un mot $x_1 \ldots x_p$ on a

$$\Delta(x_1 \ldots x_p) = \sum x_{i_1} \ldots x_{i_m} \otimes x_{i_{m+1}} \ldots x_{i_p}$$

la somme portant sur toutes les permutations $i_1 \dots i_p$ de $[1,p]$ ayant une seule descente.

On peut dualiser cette algèbre de Hopf de la façon suivante. On considère toujours l'espace vectoriel engendré par les mots sur $\xi_1, \dots, \xi_n$, mais cette fois-ci le coproduit, dual du produit de concaténation, est donné par la déconcaténation, on a :

$$\Delta(\omega) = \sum_{\omega=\omega'\omega''} \omega' \otimes \omega''$$

Le produit, lui s'appelle le produit de mélange (ou “shuffle"), donné par

$$x_1 \dots x_p \sqcup\!\sqcup x_{p+1} \dots x_{p+q} = \sum_{\sigma \in S_{p+q}^{(p)}} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p+q)}$$

où la somme porte sur les permutations σ qui ont une seule descente en p. Le mélange est commutatif, donc d'après le théorème de Milnor-Moore, l'algèbre correspondante est une algèbre polynomiale. On peut montrer qu'une famille de générateurs est formée par les mots de Lyndon, c'est à dire les mots qui sont strictement inférieurs, dans l'ordre lexicographique, à toutes leurs permutations circulaires.

2.2 L'algèbre de Faà di Bruno

Les séries formelles

$$f(x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

forment un groupe pour la composition, en effet si f et g sont des séries formelles, $f \circ g(x) = f(g(x))$ est bien définie comme série formelle, et de plus toute série admet un inverse pour cette opération. Ce groupe est de dimension infinie, on peut introduire une algèbre de Hopf associée en considérant l'algèbre des polynômes en une infinité de variables $FB = K[c_2, c_3, \dots]$, où les c_i sont considérées comme des fonctions sur le groupe. Ceci permet de donner à $K[c_2, c_3, \dots]$ une structure d'algèbre de Hopf, le coproduit étant défini par $\Delta(c_k) = c_k(f \circ g)$ où

$$f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \qquad g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

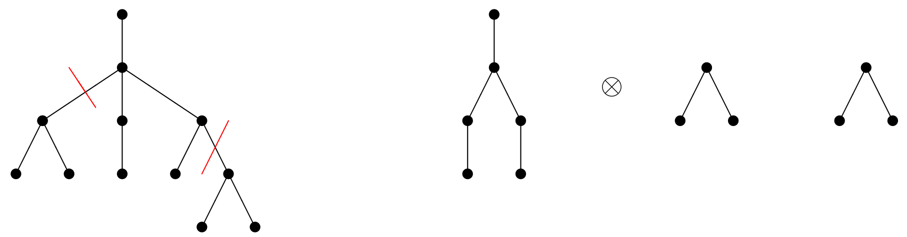
et on identifie $a_i = c_i \otimes I, b_i = I \otimes c_i$ ce qui donne $\Delta(c_k) \in FB \otimes FB$.

2.3 Algèbre de Hopf des arbres plans

Dans le but de comprendre conceptuellement les calculs de renormalisation en théorie quantique des champs, Kreimer a introduit une algèbre de Hopf construite sur des arbres plans enracinés. Plus précisément, en tant qu'algèbre c'est une algèbre de polynômes en une infinité de variables, ces variables étant indexées par les arbres planaires enracinés finis. Les monômes, qui sont des produits d'arbres, sont identifiés à des forêts. Le coproduit est défini à l'aide d'une notion de coupure admissible dans un arbre. Chaque arête d'un arbre coupe en effet l'arbre en deux parties, dont l'une contient la racine. On peut enraciner l'autre partie à l'extrémité de la coupure. Une famille de coupures d'un arbre plan enraciné est dite admissible si tout chemin allant de la racine à une feuille de l'arbre est coupé au plus une fois. Une telle famille de coupures (applelons la c), produit une forêt d'arbres enracinés, donc l'un contient la racine de l'arbre dont on est parti, on désigne alors par $P^c(t)$ cet arbre, et par $R^c(t)$ la forêt des arbres ne contenant pas la racine. Le coproduit est alors donné par la formule

$$\Delta(t) = e \otimes t + t \otimes e + \sum_c P^c(t) \otimes R^c(t)$$

dans laquelle la somme porte sur les coupures admissibles de t. La figure ci-dessous montre un arbre avec un système de deux coupures admissible, et le terme correspondant dans le coproduit.



2.4 Algèbre de Hopf de diagrammes de Feynman

L'algèbre précédente a été raffinée par Connes et Kreimer en une algèbre de diagrammes. C'est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont indexés par les graphes connexes. Il est commode pour décrire ces graphes de voir chaque arête comme étant composée de deux demi-arêtes. Un graphe est alors donné par un ensemble de sommets, de chaque sommet partent des demi-arêtes, et certaines de ces demi-arêtes sont recollées pour former des arêtes, toutefois certaines de ces demi-arêtes restent seules (on parle alors de demi-arêtes externes). Le coproduit est défini en utilisant des coupures du graphe en deux régions. Soit Γ un graphe connexe, pour chaque coupure du graphe en deux régions, dont l'une ne contient que des arêtes internes, on considère le graphe γ formé par les sommets de cette régions et leurs demi-arêtes. On note $\Gamma//\gamma$ le graphe obtenu à partir de Γ en "collapsant" les composantes connexes de γ. Le coproduit est alors :

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{\gamma} (\Gamma//\gamma) \otimes \gamma$$

2.5 Algèbre de Hopf et multizétas

La fonction zêta est définie par $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$. Ses valeurs aux entiers, $\zeta(n)$, ont une grande importance arithmétique. On peut généraliser ces nombres en considérant des sommes du type $\zeta(3,2) = \sum_{0<m<n} \frac{1}{m^3 n^2}$, ou plus généralement, avec une notation évidente, $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$. Ces nombres vérifient des relations algébriques simples, qui se décrivent naturellement en terme d'algèbre de Hopf. On conjecture que les relations ainsi obtenues sont les seules qui existent entre tous ces nombres. Des résultats importants dans ce domaine ont été obtenus récemment par Francis Brown.

Références

[1] J. W. Milnor and J. C. Moore (1965) On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. (2), 81, pages 211–264.

[2] D. Kreimer (1998) On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories. Adv. Theor. Math. Phys. 2 , no. 2, pages 303–334.

[1] A. Connes and D. Kreimer (2000) Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. Comm. Math. Phys. 210 , no. 1, pages 249–273.