Développements récents dans le modèle combinatoire du tas de sable sur un graphe

Robert Cori
Résumé par *Yvan* Le Borgne

Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique
Institut Henri Poincaré
Année 2010 – 2011

Résumé

Dans le modèle combinatoire du tas de sable on affecte à chaque sommet d'un graphe un entier positif ou nul censé représenter un nombre de grains situés sur le sommet en question. Une règle d'éboulement permet de faire passer des grains d'un sommet à ses voisins. Deux généralisations du modèle avec l'affectation d'entiers pouvant être négatifs ont été considérées par différents auteurs. La première peut être interprétée par des particules et anti-particules qui se détruisent mutuellement lors d'un éboulement. La seconde comme des soldes de comptes en banque qui peuvent être redistribués aux voisins ou bien faire l'objet d'un versement collectif. Il sera question dans cet exposé de résultats récents obtenus dans le cadre de ces deux modèles et en particulier d'un article de M. Baker et S. Norine dans Advances in Mathematics datant de 2007 et intitulé Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph qui a particulièrement interessé l'orateur.

Introduction

Le *modèle du tas de sable* [4, 2, 3] est un modèle discret de diffusion. La géométrie de ce modèle est définie par un graphe $G = (V, E)$ d'ensembles de m arêtes E et de n sommets V. On suppose le graphe G connexe, ses arêtes non-orientées, sans boucle mais les arêtes multiples sont possibles. On note par $e_{i,j}$ le nombre d'arêtes entre les sommets i et j et $d_i = \sum_{j \in V} e_{i,j}$ le degré de i. Une *configuration* $u = (u_i)_{i \in V}$ de ce modèle est une distribution de grains indifférenciés sur les sommets de ce graphe : dans la configuration u, il y a $u_i \in \mathbb{N}$ grains sur le sommet $i \in V$. On distingue un sommet $p \in V$ nommé le puits que l'on destine à collecter les grains sortant du système. La dynamique de la diffusion est la suivante : dans une configuration u un sommet $i \neq p$ contenant au moins autant de grains que son nombre d_i d'arêtes incidentes est dit *instable* et il a alors la possibilité de *s'ébouler* c'est à dire de transmettre un grain par chacune de ses d_i arêtes incidentes aux extrémités opposées conduisant à la configuration v telle que $v_i = u_i - d_i$ et pour tout autre sommet j, $v_j = u_j + e_{i,j}$. Cet éboulement possible se note $u \longrightarrow^{(i)} v$.

1 Généralisation algébrique du modèle

Au prix de l'oubli de la distinction du sommet p, du test de l'instabilité des sommets éboulés, de la positivité du nombre de grains et de la possibilité supplémentaire d'inverser les éboulements, ce modèle admet la représentation algébrique suivante. Soit $(x_i)_{i \in V}$ un ensemble de variables formelles représentant les sommets de V. Une configuration u est représentée par une combinaison linéaire à coefficients entiers $\sum_{i \in V} u_i x_i$ en ces variables. Le degré $\deg(u)$ de la configuration u

est $\sum_{i\in V} u_i$. La configuration v obtenue par l'éboulement du sommet i dans la configuration u est alors représentée par la combinaison linéaire $\sum_{i\in V} u_i x_i - \Delta^{(i)}$ où $\Delta^{(i)} = d_i x_i - \sum_{j\in V} e_{i,j} x_j$ est qualifée de configuration *laplacienne* en i. Deux configurations u et v sont dites *équivalentes* si leurs combinaisons linéaires ne diffèrent que par une combinaison linéaire des configurations laplaciennes $(\Delta^{(i)})_{i\in V}$ ce qui se note aussi, $u - v \in < (\Delta_i)_{i\in V} >_{\mathbb{Z}}$ avec quelques abus qui se répèterons, ou bien $u \equiv v$. On remarque que ces configurations laplaciennes ne sont pas linéairement libres puisque $\sum_{i\in V} \Delta^{(i)} = 0$, qui peut se lire de manière prémonitoire comme "l'éboulement unique de chacun des sommets ne modifie pas la configuration initiale puisqu'un grain transite dans chaque sens pour chaque arête". La matrice indexée par les sommets de V dont la ligne i est $\Delta^{(i)}$ est la matrice laplacienne du graphe G. La relation précédente est la seule entre les $(\Delta^{(i)})_{i\in V}$ et le nombre de classes d'équivalences de degré fixé est donné par n'importe quel mineur de la matrice laplacienne obtenu par la suppression de la ligne et la colonne indexé par un des sommets que l'on pourrait nommer p. Ce nombre est aussi le nombre d'arbres recouvrants du graphe G.

2 Survol du modèle du tas de sable classique

Avec les notations de sa généralisation algébrique, le modèle du tas de sable de l'introduction se définit en indiquant que les éboulements possibles sont $u \longrightarrow^{(i)} u - \Delta^{(i)}$ si $u_i \geq d_i$ et $i \neq p$. Une configuration est p-stable si $0 \leq u_i < d_i$, pour tout $i \neq p$ et donc aucun éboulement n'est possible . L'existence du puits p garanti qu'à partir d'une configuration quelconque u, le processus consistant à ébouler un sommet instable tant qu'il en existe se termine sur une configuration p-stable v qui de plus ne dépend pas de l'ordre des éboulements. Cela se note $u \longrightarrow^* v$. Les configurations p-stables u pour lesquelle il existe une configuration v non vide de grain telle que $u+v \longrightarrow^* u$ sont qualifiés de p-récurrentes [1]. En fait, Dhar a montré qu'une configuration p-stable est p-récurrente si et seulement si $u - \Delta^{(p)} \longrightarrow^* u$ ce qui se teste en éboulant la configuration $u - \Delta^{(p)}$. Il existe une unique configuration p-récurrente dans chaque classe d'équivalence donnant un premier élément canonique dans chaque classe.

La configuration p-récurrente u d'une classe d'équivalence minimise u_p parmi les configurations stables de cette classe [2]. En effet, à partir d'une configuration stable v, on considère la configuration stable w atteinte après un éboulement du puits : $v - \Delta^{(p)} \longrightarrow^* w$. Comme v est p-stable tout les sommets se sont éboulés au plus une fois. Si tout les voisins du puit se sont éboulés alors $w_p = v_p$, sinon $w_p < v_p$. On en déduit la décroissance du nombre de grain sur les configurations stables définie par les éboulements des configurations $(v - j\Delta^{(p)})_{j\geq 0}$ sachant que la limite, après éboulement, de ces configurations, est u la configuration p-recurrente.

A toute configuration p-stable u, l'application Φ_p associe une configuration p-stable u' définie par $u'_i = d_i - 1 - u_i$ pour $i \neq p$ et $u'_p = d_p - 1 - u_p + 2\deg(u) + n - 2m$ qui peut s'écrire $u' = \delta - u$ cela définissant implicitement δ qui est par construction de degré $2\deg(u)$. Φ_p est donc une involution sur l'ensemble des fonctions p-stables préservant le degré. Dans ce résumé, on défini une configuration de G_p-parking comme l'image par Φ_p d'une configuration p-recurrente. L'application Φ_p est compatible avec l'équivalence puisque $u \equiv v$ si et seulement si $\Phi_p(u) \equiv \Phi_p(v)$. On en déduit que chaque classe d'équivalence contient une unique configuration G_p-parking v. Comme de plus le degré $\deg(v)$ est constant dans une classe d'équivalence, on remarque que cette configuration G_p-parking v maximise v_p parmi les configurations stables de cette classe. Un algorithme de calcul de la configuration G_p-parking de la classe d'une configuration u consiste à calculer à partir de u par des éboulements sommets, y compris du puits p sans condition, une

1. Les autres configurations p-stable sont qualifiés de transitoire, cette terminologie provenant d'une chaine de Markov sur les configurations p-stables dont les transitions sont l'ajout d'un grain sur un sommet choisit aléatoirement selon la distribution uniforme suivi des éboulements nécessaires.

2. Mais ce n'est a priori pas nécessairement la seule à atteindre le minimum

configuration p-stable u', puis appliquer la recherche de la configuration p-recurrente u'' de la classe de $\Phi_p(u')$ et d'en déduire que $\Phi_p(u'')$ est la configuration de G_p-parking de la classe de u.

3 Un modèle du tas de sable à grains bicolores.

Dans cette partie uniquement, on considére des configurations formées de deux types de grains (bleu et rouge). La dynamique du modèle applique en priorité la régle selon laquelle deux grains de couleur différentes sur le même sommet se détruisent mutuellement. Ensuite, la dynamique autorise l'éboulement du sommet i ne contenant des grains que d'une seule couleur si leur nombre est supérieur ou égal au degré d_i du sommet.

En interprétant dans la généralisation algébrique u_i grains rouges, respectivement bleus, sur le sommet i par $u_i x_i$, respectivement $-u_i x_i$, on constate que les éboulements possibles sont $u \longrightarrow^{(i)} u - \Delta^{(i)}$ si $u_i \geq d_i$ et $u \longrightarrow^{(i)} u + \Delta^{(i)}$ si $u_i \leq -d_i$.

Dans ce cas, l'ordre des sommets dans le processus d'éboulement peut avoir une influence sur la configuration stable finalement obtenue comme le montre le résultat suivant. Pour le graphe formé d'un chemin de $4k$ sommets, on considère la configuration initiale formée de k grains rouges et k grains bleus placés sur les deux sommets voisin du milieu du chemin. Le nombre de configurations stables différentes obtenues en variant les ordres des sommets éboulés est $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$.

4 Un théorème à la Riemann-Roch pour la généralisation algébrique.

Dans la généralisation algébrique, tous les éboulements sont possibles : $u \longrightarrow^{(i)} u + \Delta^{(i)}$ et $u \longrightarrow^{(i)} u - \Delta^{(i)}$ sans contrainte sur u. Une configuration u est *positive* si pour tout sommet $i \in V$, $u_i \geq 0$. Une configuration est *effective* si elle est equivalente à une configuration positive.

Pour une configuration u quelconque et pour un sommet arbitraire $p \in V$ on considère la configuration de G_p-parking v de la classe d'équivalence de u. La configuration u est effective si et seulement si $v_p \geq 0$. En effet, si $v_p \geq 0$ alors v est positive donc u est effective. Si u est effective, soit w une configuration positive de la classe d'équivalence de u. L'éboulement des sommets instables différents de p de w conduit à une configuration p-stable v' telle que $v'_p \geq 0$ puisque $w_p \geq 0$ et le puits p ne s'éboule pas. Comme la configuration de G_p-parking maximise le nombre de grains sur p parmi les configurations p-stables de la classe dont v' on en déduit que $v_p \geq v'_p \geq 0$.

Pour une permutation $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ des sommets on note d_i^- le nombre d'arêtes reliant le sommet i a des sommets le précédant dans α et γ^α la configuration définie par $\gamma_i^\alpha = d_i^- - 1$ pour tout $i \in V$. Le degré de toute configuration γ^α est $m - n$. Pour toute configuration u une et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite : soit u est effective soit il existe une permutation α telle que $\gamma^\alpha - u$ est effective. En effet, pour une configuration u et un sommet $p \in V$, on considère la configuration de G_p-parking u' de sa classe d'équivalence. Par construction $u'' = \Phi_p(u')$ est une configuration p-recurrente donc d'après le test de Dhar il existe au moins un ordre α d'éboulements des sommets débutant par le puits p dans les éboulements $u'' \longrightarrow^{(p)} u'' - \Delta^{(p)} \longrightarrow^{(*)} u''$. On remarque que pour $i \neq p$, le nombre de grains sur le sommet i juste avant son éboulement est $u''_i + (\gamma_i^\alpha + 1)$ puisque toutes les arêtes menant à un sommet précédent ont apporté un grain, or à ce moment le sommet i est instable donc $u''_i + \gamma_i^\alpha + 1 \geq d_i$ et par définition de Φ_p, $\gamma_i^\alpha - u'_i \geq 0$. Donc comme γ^α est p-stable puisque pour tout $i \neq p$, $0 \leq \gamma_i^\alpha \leq d_i - 1$, la positivité de $\gamma_i^\alpha - u'_i \geq 0$ permets de conclure que $\gamma^\alpha - u'$ est p-stable. De plus, la configuration $\gamma'^\alpha = \Phi_p(\gamma^\alpha)$ est p-récurrente puisque lors de l'éboulement des sommets selon l'ordre α, le nombre de grains sur le sommet $i \neq p$ est $d_i - 1 - \gamma^{(i)} + (\gamma^{(i)} + 1) = d_i$

donc i est instable et l'ordre α décrit le test de Dhar. Donc γ^α est G_p-parking et $\gamma^\alpha - u'$ est une configuration p-stable contenant en chaque sommet $i \neq p$ moins de grains donc $\gamma^\alpha - u'$ est également G_p-parking. Le nombre de grains sur le puits dans cette configuration équivalente à $\gamma^\alpha - u$ est $-1 - u'_p$ donc ces configurations sont effectives si et seulement si $u'_p \leq -1$ ce qui signifie exactement que u' et donc u ne sont pas effectives.

Si $\deg(u) > m - n$, alors pour toute permutation α, $\deg(\gamma^\alpha - u) = m - n - \deg(u) < 0$ donc $\gamma^\alpha - u$ ne peut-être être effective et u est effective. Si $\deg(u) = m - n$ et que u n'est pas effective alors u est qualifié de *critique* car elle maximise le degré pour les configurations non-effectives. Pour toute configuration critique il existe α tel que $\gamma^\alpha - u$ de degré 0 soit effective donc est equivalente à la configuration nulle qui est la seule positive de degré 0 et donc u est équivalente à cette configuration γ^α.

Le *rang* $\rho(u)$ d'une configuration u est $\deg(f) - 1$ où f est une configuration positive de degré minimale telle que $u - f$ ne soit pas effective. Si u n'est pas effective $\rho(u) = -1$ puisque la configuration nulle convient pour f.[3] Si f est de degré $\deg(u) + 1 \geq 0$ alors $\deg(u - f) = -1$ donc $\rho(u) \leq \deg(u)$. Le rang est suradditif en ce sens que pour deux configurations effectives u et v, $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$. Soit K la configuration definie par $K_i = d_i - 2$ pour tout sommet $i \in V$. Un analogue en théorie des graphes du théorème de Riemann-Roch est la relation satisfaite par toute configuration u :

$$\rho(u) - \rho(K - u) = \deg(u) + n - m.$$

Ce résultat a été prouvé par Baker et Norine en 2007 [1]. En posant $u = K$ dans cette relation on obtient que $\rho(K) = m - n$. De plus, si u est critique alors $\rho(u) = -1$, $\deg(u) = m - n$ donc $\rho(K - u) = -1$ comme de plus $\deg(K - u) = m - n$ on en déduit que $K - u$ est critique.

Références

[1] M. Baker and S. Norine (2007). Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. Advances in Mathematics 215(2007), pages 766–788.

[2] N. Biggs (1999). Chip-firing and the critical group of a graph. Journal of Algebraic Combinatorics 9(1) (1999), pages 25–45.

[3] R. Cori and D. Rossin (2000). On the sandpile group of dual graphs. European Journal of Combinatorics, 21 : 447–459, 2000

[4] D. Dhar (2006). Theoretical studies of self-organized criticality. Physica A 369 (2006) 29.

3. Si u est effective on note u' la configuration de G_p-parking équivalente alors $u'_p \geq \rho(u)$ puisqu'il suffit d'enlever $u'_p + 1$ grains du sommet p de u' pour obtenir une configuration G_p-parking avec -1 grains sur son puits et donc non-effective.