Chemins fractals

Une famille de chemins auto-évitants faisant intervenir un produit de Hadamard

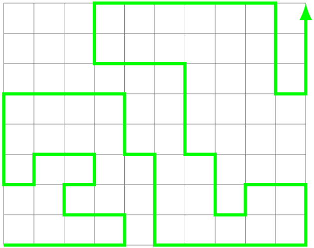
Axel Bacher

LaBRI, Université Bordeaux 1

26 mars 2010

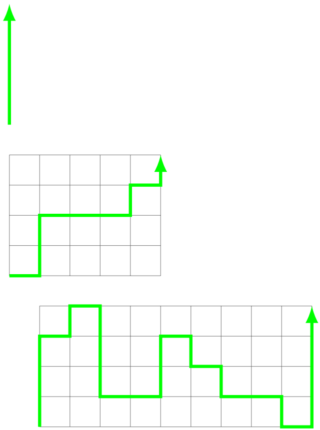
Sommaire

Chemins auto-évitants traversant un rectangle

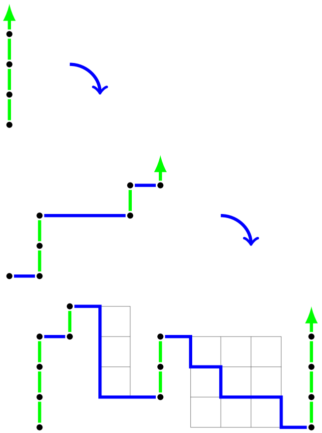


- Dans un carré de côté n, environ c^{n^2} chemins.
  [Whittington, Guttmann 90]
  [Madras 95]

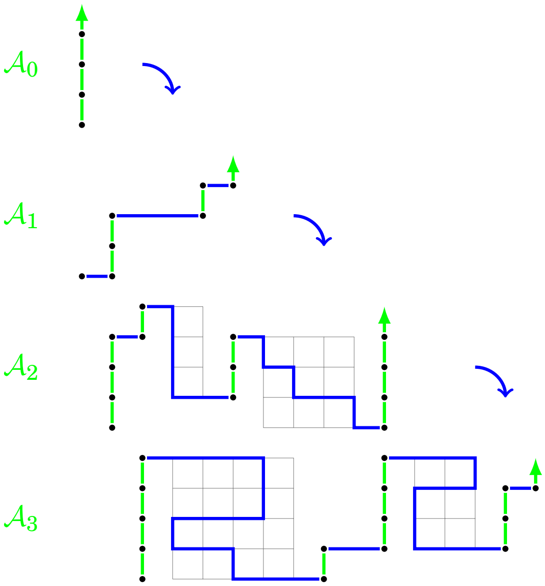
Chemins droits, dirigés, partiellement dirigés



Chemins droits, dirigés, partiellement dirigés

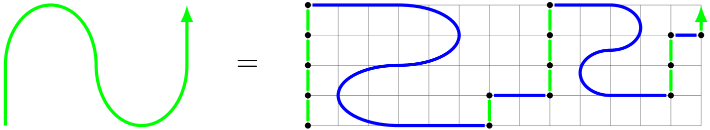


Chemins droits, dirigés, partiellement dirigés



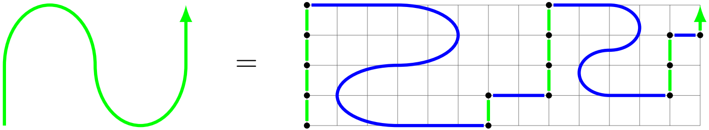
Chemins fractals

- On note $\mathcal{F} = \mathcal{A}_\infty$ la famille des chemins fractals.

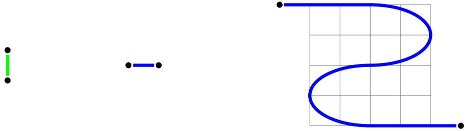


Chemins fractals

- On note $\mathcal{F} = \mathcal{A}_\infty$ la famille des chemins fractals.

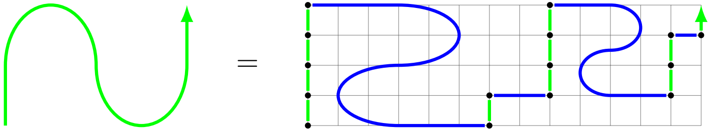


- Un chemin fractal est composé de facteurs ascendants et descendants.

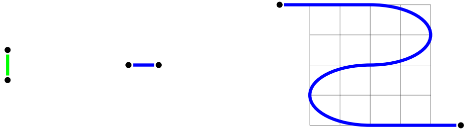


Chemins fractals

- On note $\mathcal{F} = \mathcal{A}_\infty$ la famille des chemins fractals.

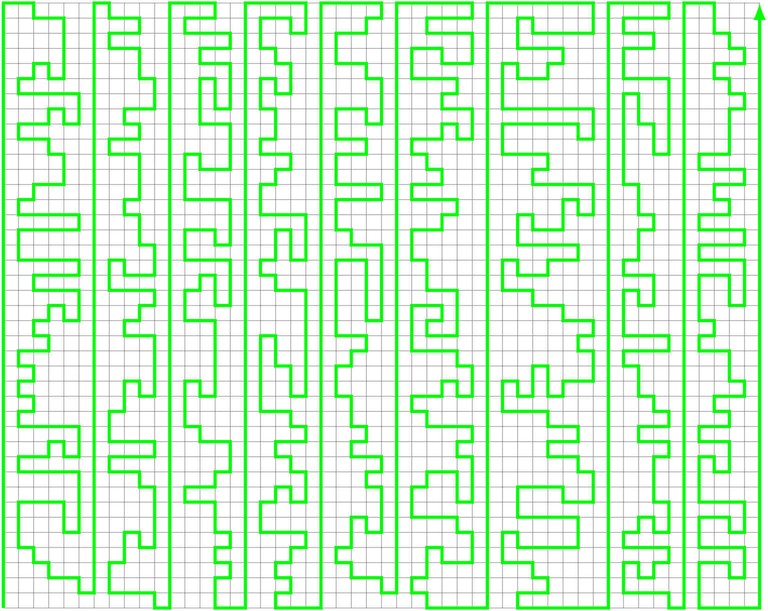


- Un chemin fractal est composé de facteurs ascendants et descendants.



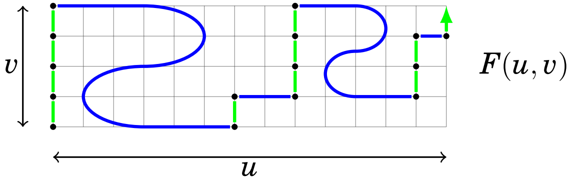
- Deux pas descendants ne peuvent se suivre.

Un chemin fractal



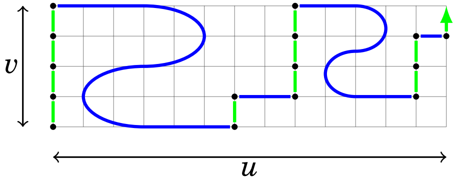
Série génératrice

- On note $F(u,v) \equiv F(t,u,v)$ la série des chemins fractals.



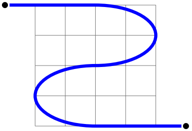
Série génératrice

- On note $F(u,v) \equiv F(t,u,v)$ la série des chemins fractals.



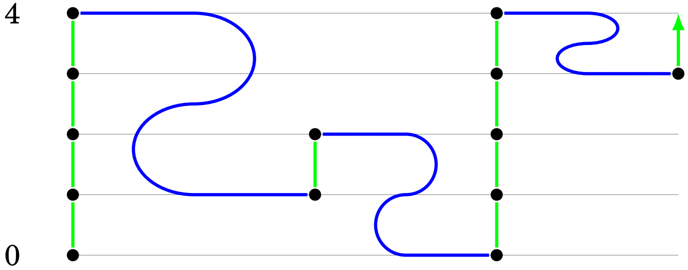
$F(u,v)$

- Les facteurs ont pour poids :

 t  tu  $t^2u^2F(v,u)$

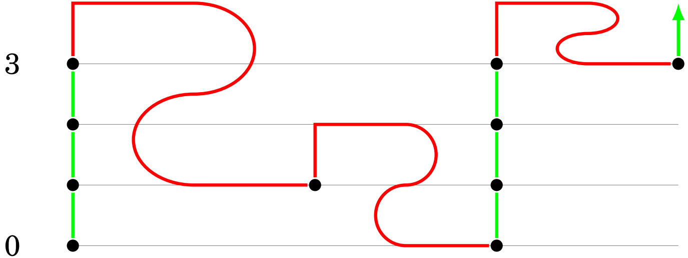
Décomposition canonique

- On décompose les chemins en facteurs ascendants et descendants.



Décomposition canonique

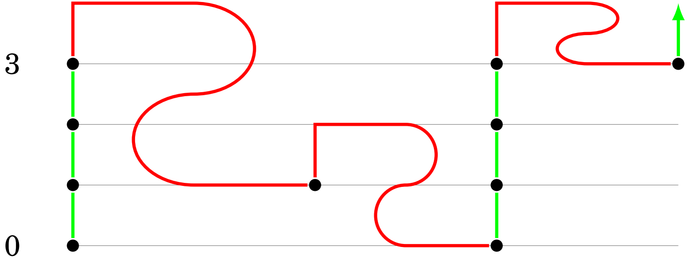
- On décompose les chemins en facteurs ascendants et descendants.



- Chaque facteur descendant est groupé avec le précédent.

Décomposition canonique

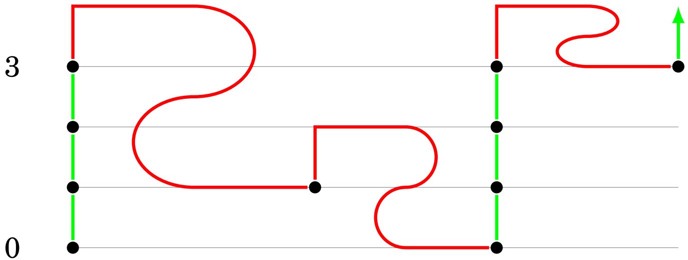
- On décompose les chemins en facteurs ascendants et descendants.



- Chaque facteur descendant est groupé avec le précédent.
- Pas de contrainte sur les facteurs consécutifs.

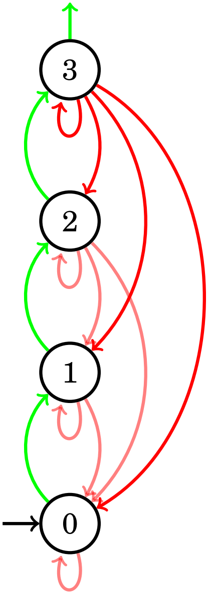
Décomposition canonique

- On décompose les chemins en facteurs ascendants et descendants.



- Chaque facteur descendant est groupé avec le précédent.
- Pas de contrainte sur les facteurs consécutifs.
- Les hauteurs accessibles sont $0, \ldots, k-1$.

Automate des hauteurs



- Si $D(v)$ est la série des facteurs descendants, la série des cycles élémentaires est $D(tv)$.

Chemins dans l'automate

Proposition

La série des chemins dans l'automate de hauteur k est :

$$F_k(u) = \frac{t^k}{G_k(u)},$$

où $G_k(u)$ compte les configurations de cycles dans k états.

Équation finale

- Les séries $G_k(u)$ vérifient :

$$\sum_{k\geqslant 0} G_k(u)v^k = \frac{1}{1 + tu + t^2u^2F(tv,u) - v}.$$

Équation finale

- Les séries $G_k(u)$ vérifient :

$$\sum_{k\geqslant 0} G_k(u)v^k = \frac{1}{1 + tu + t^2u^2F(tv,u) - v}.$$

- On considère le produit de Hadamard :

$$\left(\sum_{k\geqslant 0} F_k(u)v^k\right) \odot_v \left(\sum_{k\geqslant 0} G_k(u)v^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} F_k(u)G_k(u)v^k.$$

Équation finale

- Les séries $G_k(u)$ vérifient :

$$\sum_{k\geqslant 0} G_k(u)v^k = \frac{1}{1 + tu + t^2u^2F(tv,u) - v}.$$

- On considère le produit de Hadamard :

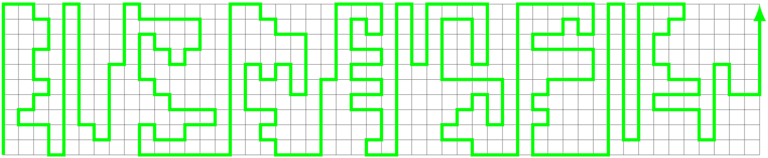
$$\left(\sum_{k\geqslant 0} F_k(u)v^k\right) \odot_v \left(\sum_{k\geqslant 0} G_k(u)v^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} F_k(u)G_k(u)v^k.$$

Théorème

La série des chemins fractals est l'unique solution de :

$$F(u,v) \odot_v \frac{1}{1 + tu + t^2u^2F(tv,u) - v} = \frac{1}{1 - tv}.$$

Perspectives



$$F(u,v) \odot_v \frac{1}{1 + tu + t^2u^2F(tv,u) - v} = \frac{1}{1 - tv}$$

- Pas de solution théorique pour l'instant.
- Calcul de coefficients pour demi-périmètre $\leqslant 100$.
- Génération aléatoire :
  - Méthode récursive : $\mathrm{O}\left(n^6 \log n\right)$, demi-périmètre $\leqslant 100$;
  - Propp & Wilson : ?
- Asymptotique :
  - Taille de boîte fixée : similaire aux auto-évitants ;
  - Longueur n : boîte moyenne $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$.
- Explication de la forme des chemins ?