

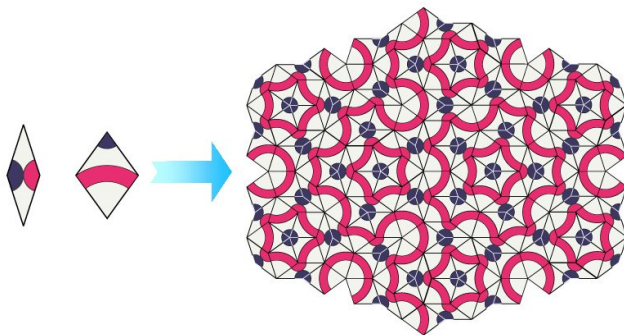
Flips Stochastiques sur Pavages par Dimères

Thomas Fernique & Damien Regnault

ALEA, 22 mars 2010

Motivation

Quasicristal : matériau ordonné mais non périodique (\neq cristal).



Modèle de la **structure** : pavages et contraintes locales (\simeq puzzle).

Motivation

Modéliser la **formation** d'un quasicristal ?

Motivation

Modéliser la **formation** d'un quasicristal ?

Idée naturelle : assemblage tuile à tuile respectant les contraintes.
Problème : conduit à des “impasses” non prolongeables.

Motivation

Modéliser la **formation** d'un quasicristal ?

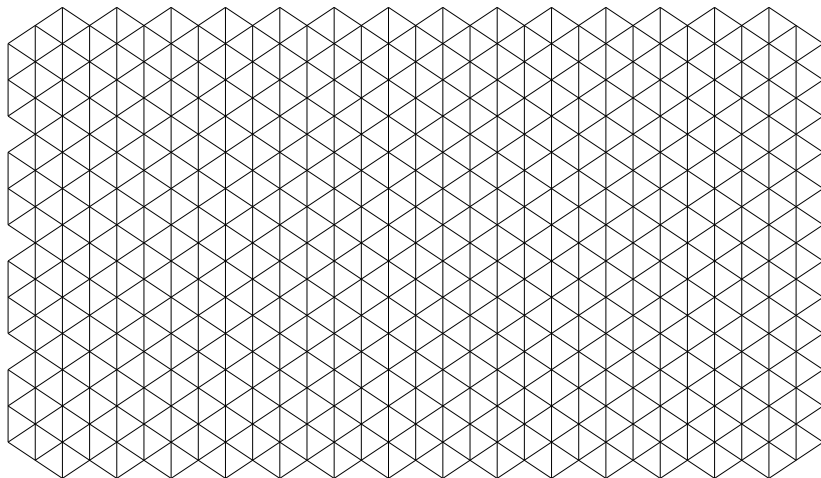
Idée naturelle : assemblage tuile à tuile respectant les contraintes.
Problème : conduit à des “impasses” non prolongeables.

Alternative : corrections locales aléatoires de contraintes violées.
Problème : convergence ?

- 1 Pavages et flips
- 2 Processus de refroidissement
- 3 Une borne supérieure quasi-optimale
- 4 Une borne supérieure moins optimale

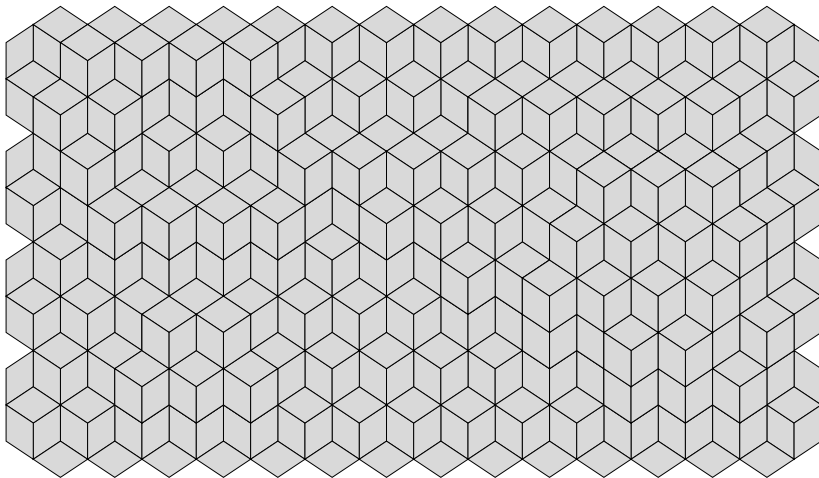
Pavages par dimères

Domaine fini et (simplement) connexe de la grille triangulaire.



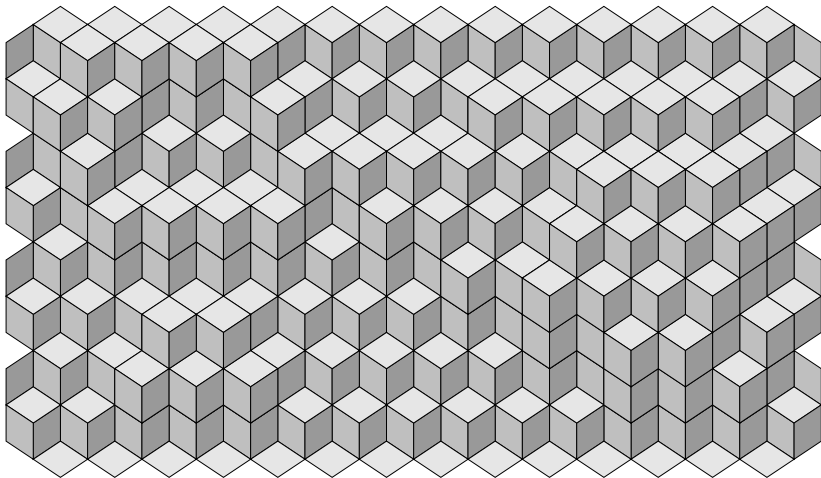
Pavages par dimères

Pavage par dimères : appariement de triangles adjacents (dimères).



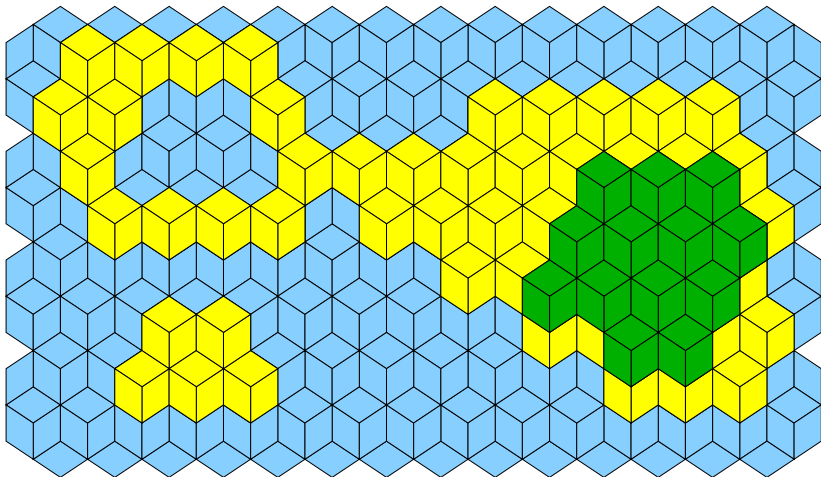
Pavages par dimères

Ombrage ad-hoc \rightsquigarrow point de vue spatial : piles de cubes.



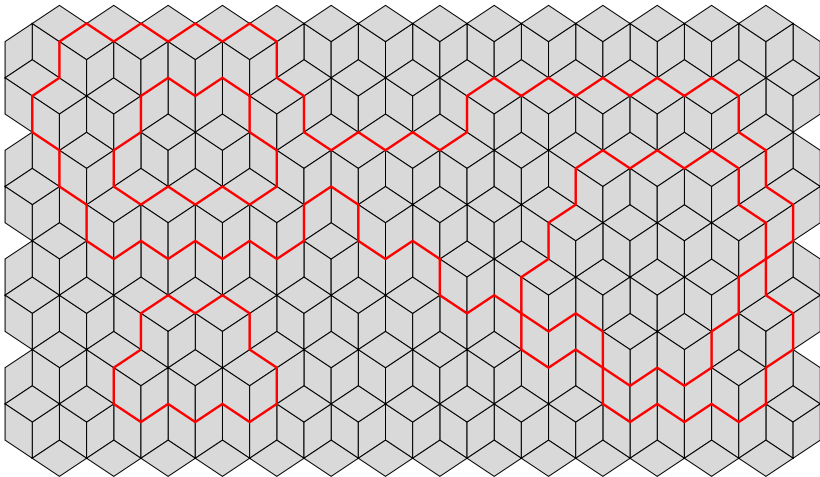
Pavages par dimères

Point de vue spatial \rightsquigarrow distance au plan $x + y + z = 0$ (hauteur).



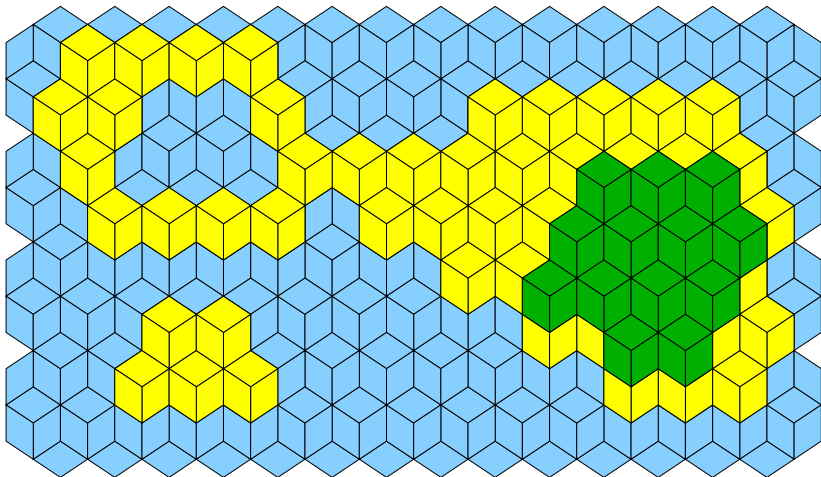
Erreurs

Erreur : arête commune à deux tuiles identiques (à translation près).



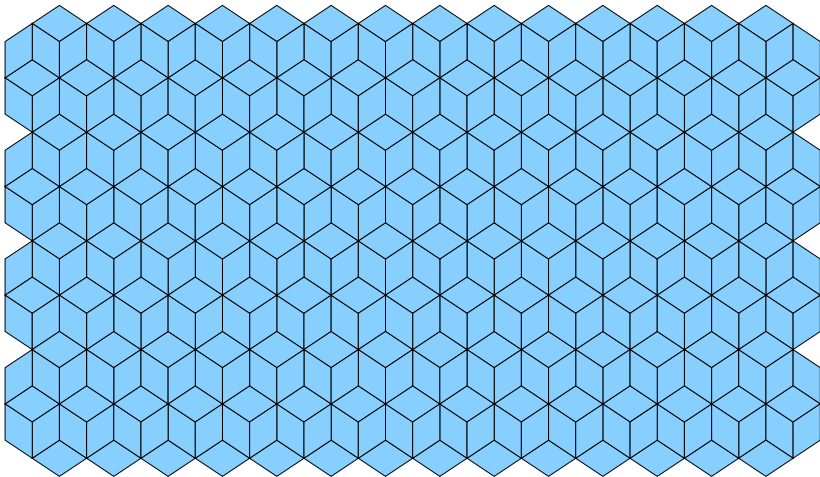
Erreurs

↪ les erreurs séparent les tuiles de hauteurs différentes.



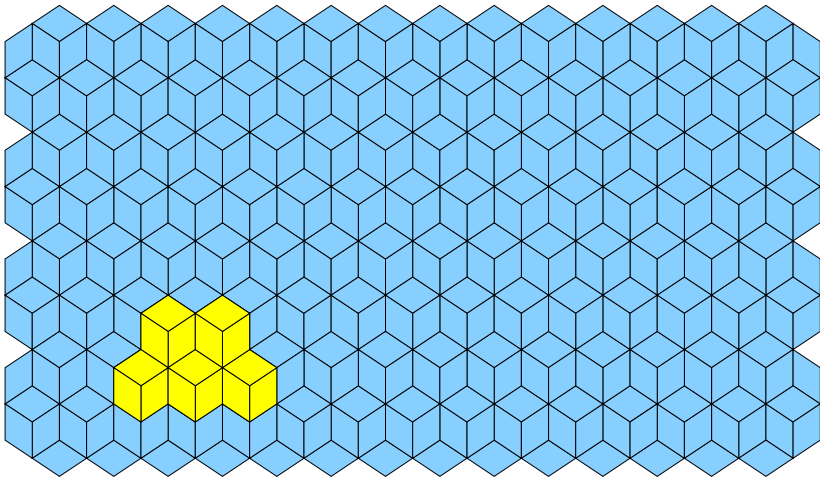
Erreurs

Pavage sans erreur : joue le rôle de quasicristal (périodique !)



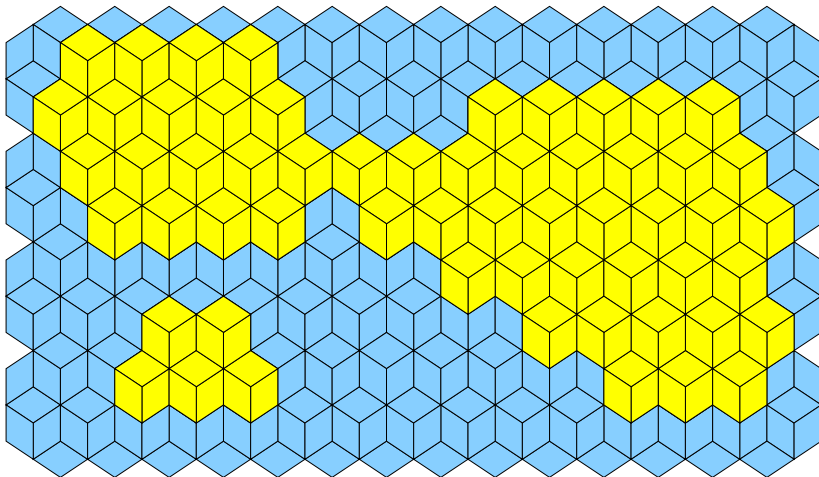
Iles et trous

Une île de hauteur 1, d'aire 5 et de périmètre 16.



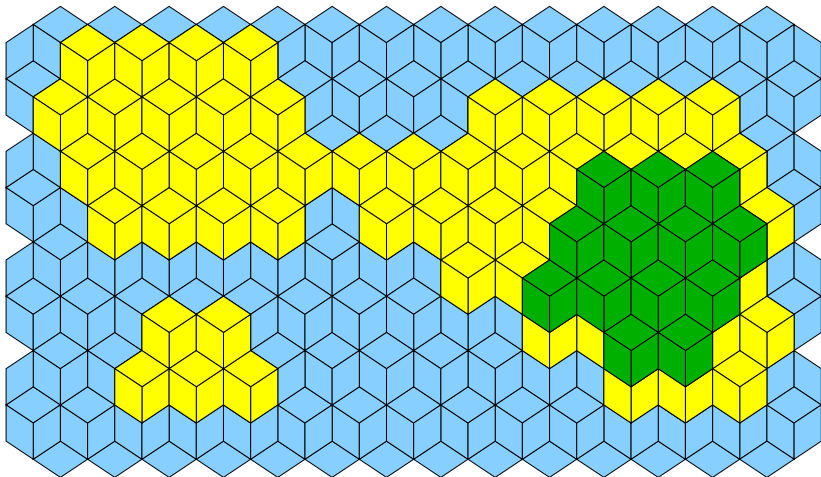
Iles et trous

Une autre île de hauteur 1, plus grosse.



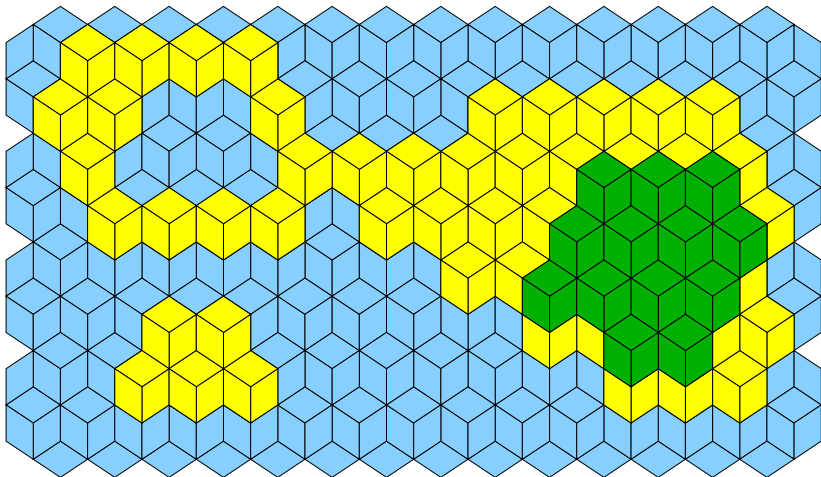
Iles et trous

Encore une île, de hauteur 2 cette fois.



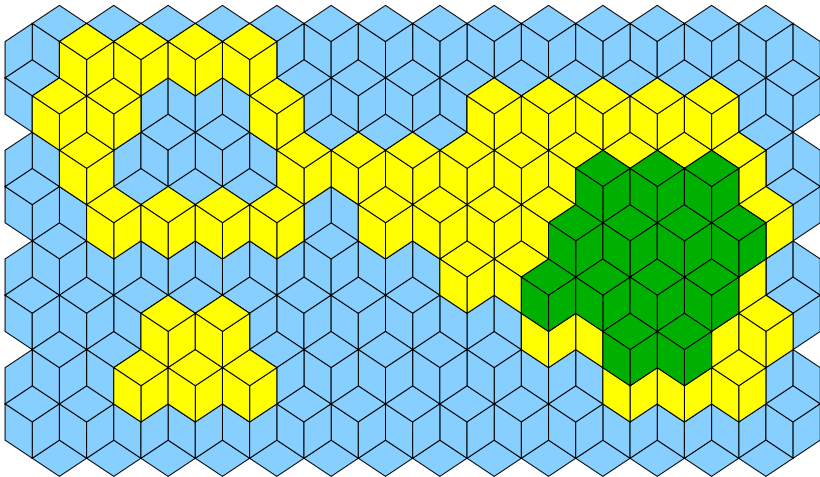
Iles et trous

Un trou dans la grosse île de hauteur 1.



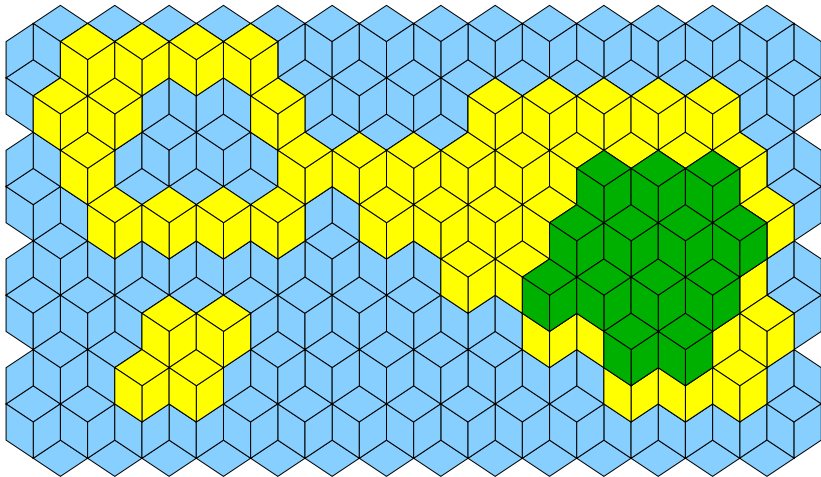
Flips

Flip : échange de trois tuiles \simeq ajout/retrait d'un cube.



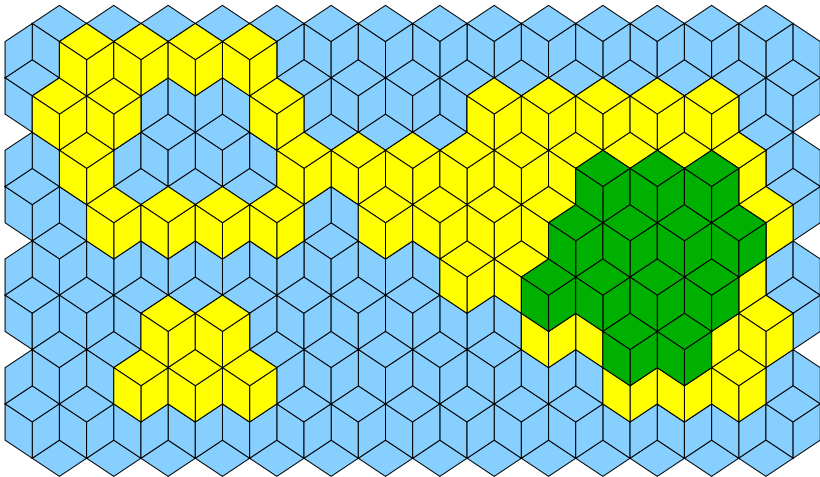
Flips

Flip : échange de trois tuiles \simeq ajout/retrait d'un cube.



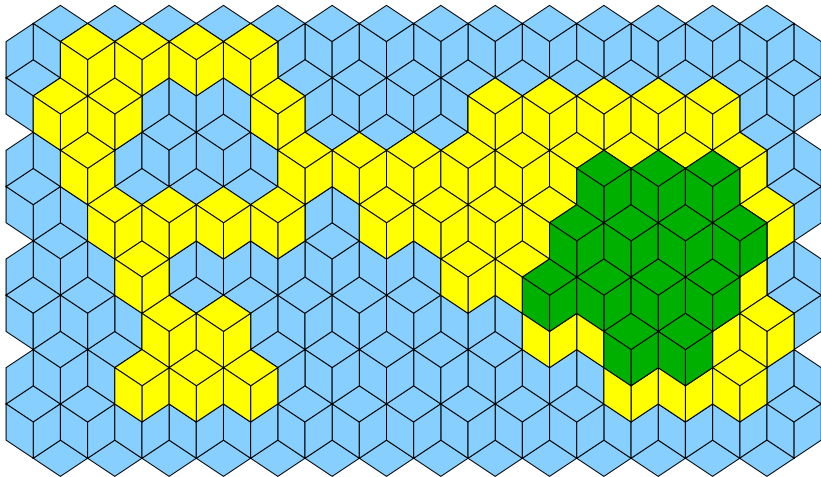
Flips

Un flip modifie l'aire d'une île ou son périmètre (nb. d'erreurs).



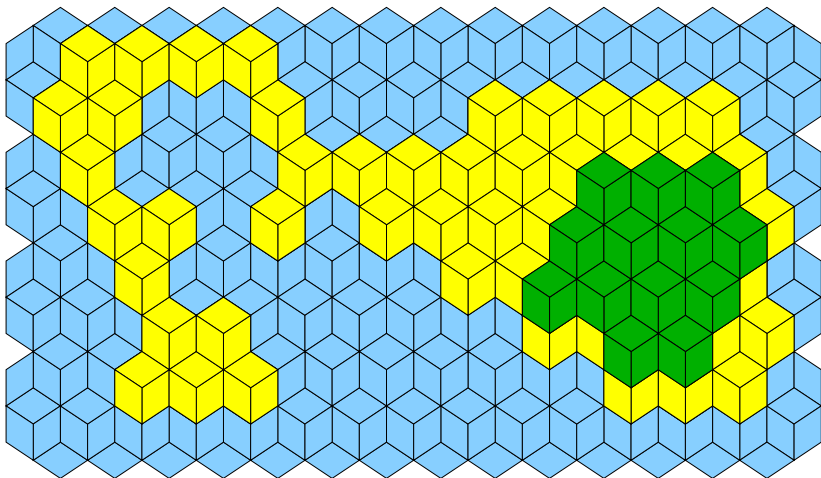
Flips

Topologiquement, un flip peut fusionner ou séparer des îles...



Flips

...et détruire ou créer des trous.



- 1 Pavages et flips
- 2 **Processus de refroidissement**
- 3 Une borne supérieure quasi-optimale
- 4 Une borne supérieure moins optimale

Refroidissement

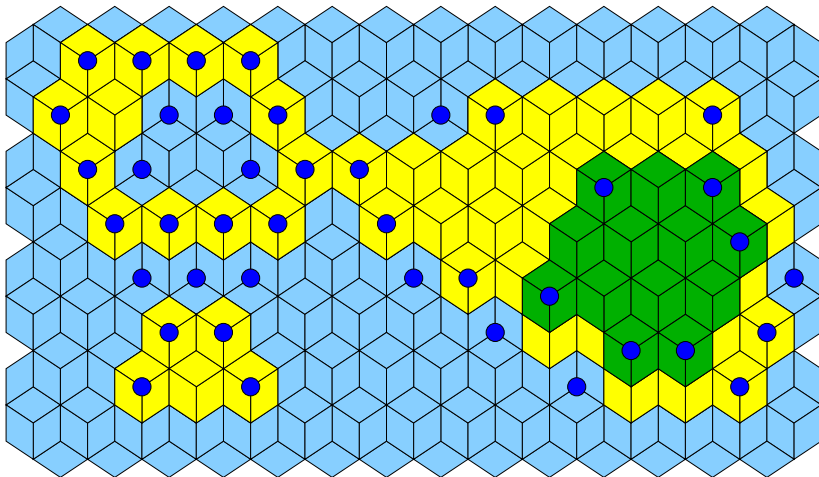
Refroidissement : processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ défini par

- pavage initial ω_0 ;
- $\omega_t \rightarrow \omega_{t+1}$: choisir unif. au hasard un flip t.q. $\Delta E \leq 0$;
- pas de flip t.q. $\Delta E \leq 0 \rightsquigarrow$ arrêt.

On montre : arrêt du processus $\Leftrightarrow E = 0$, *i.e.*, quasicristal.

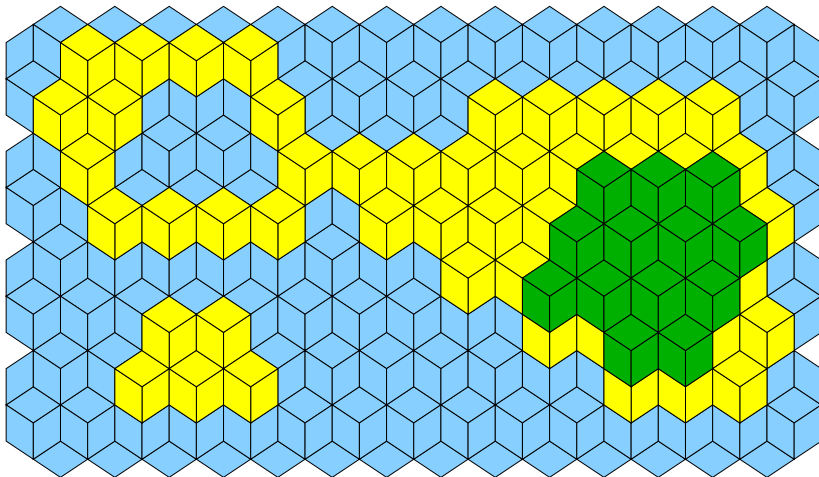
Exemple

Flips tels que $\Delta E \leq 0$: autour des points bleus.



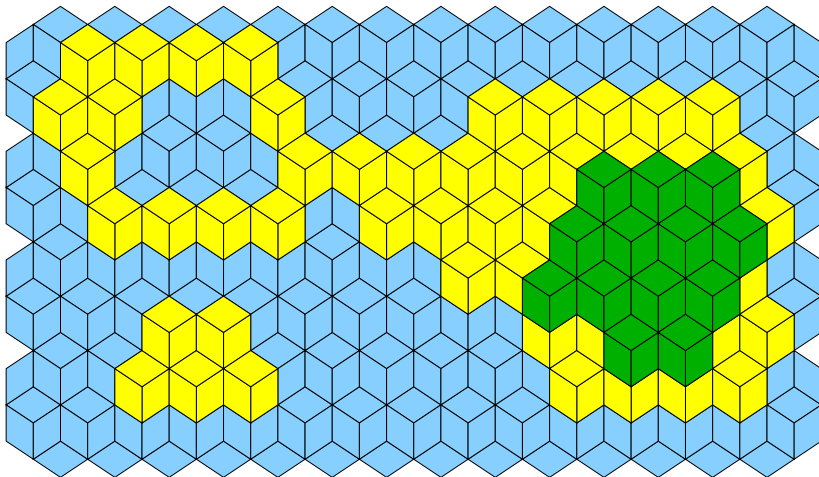
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



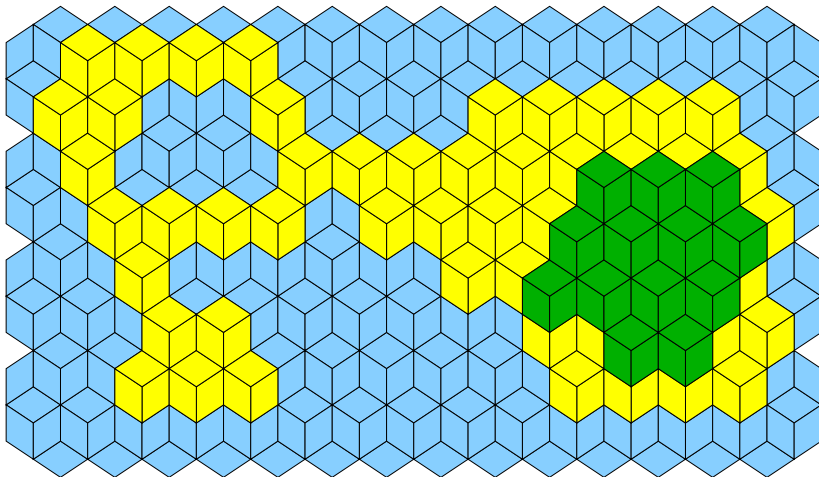
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



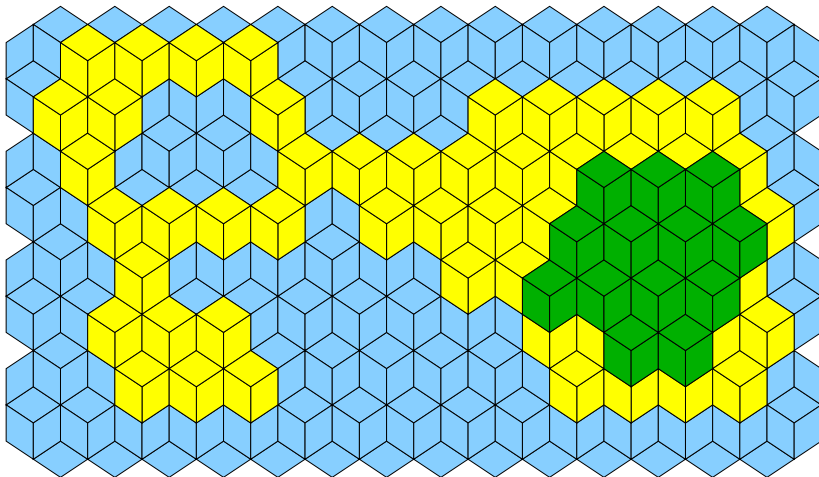
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



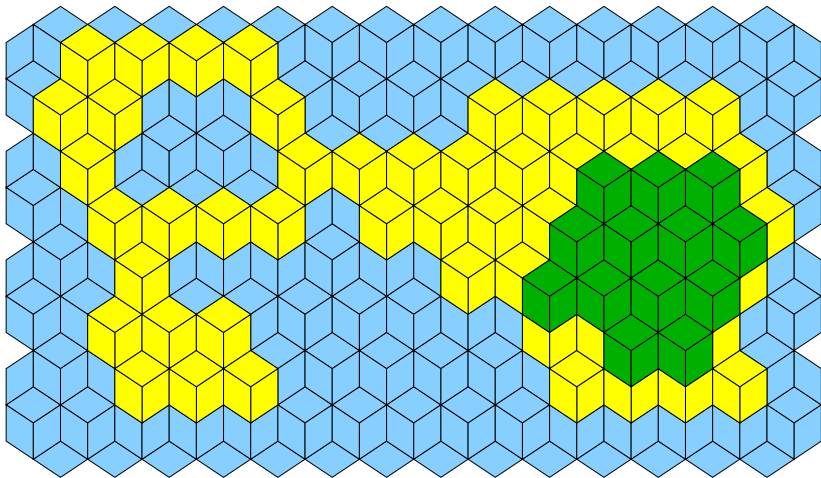
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



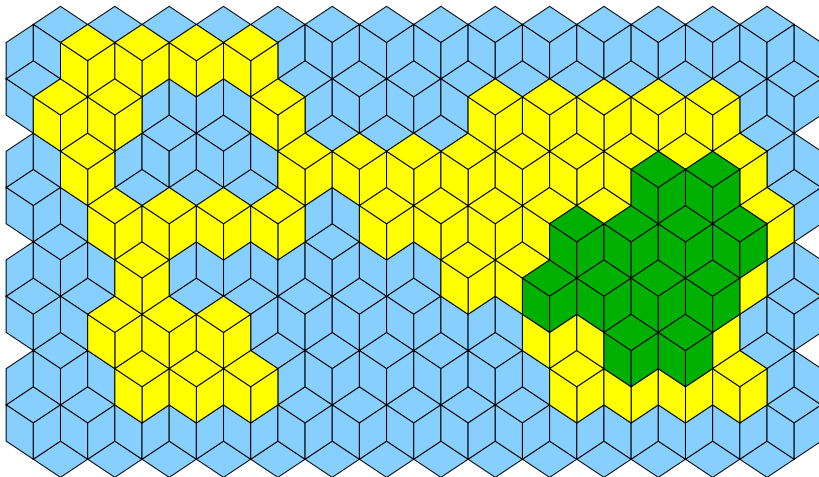
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



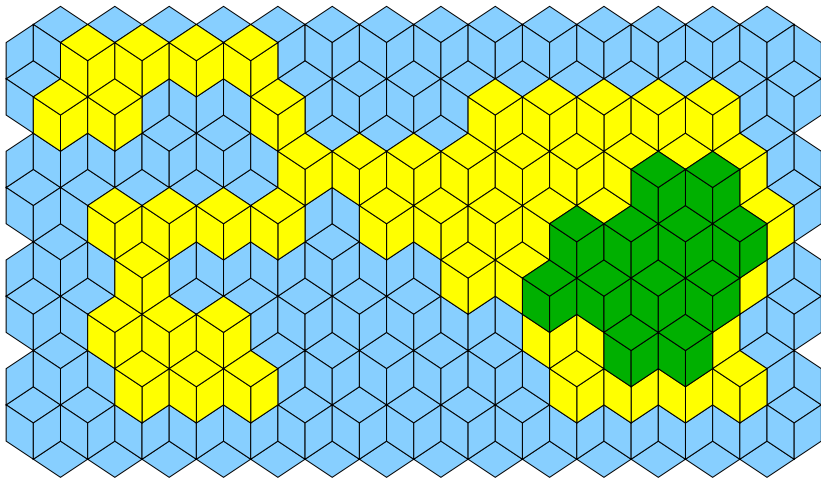
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



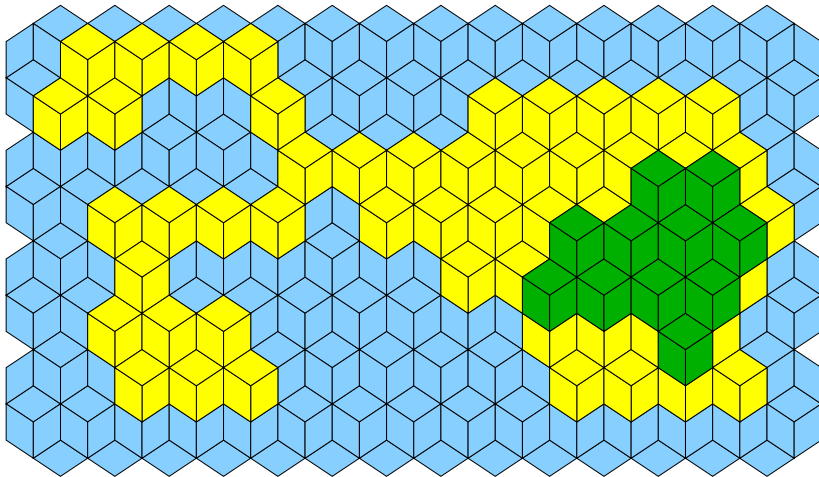
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



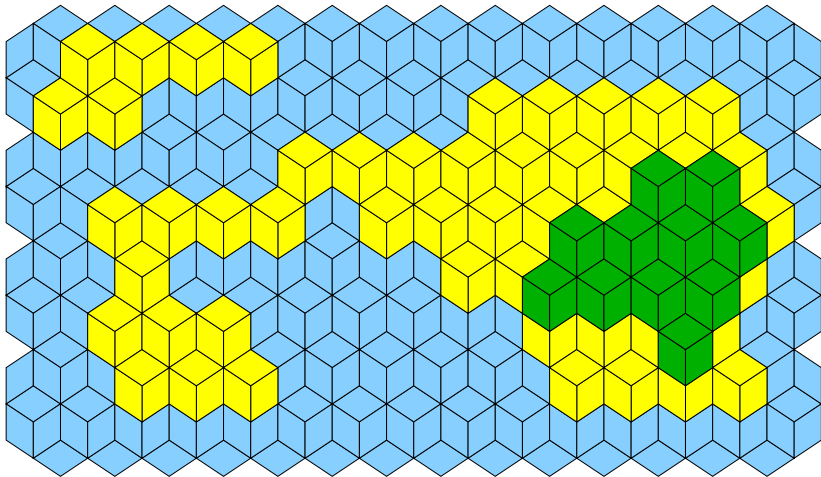
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



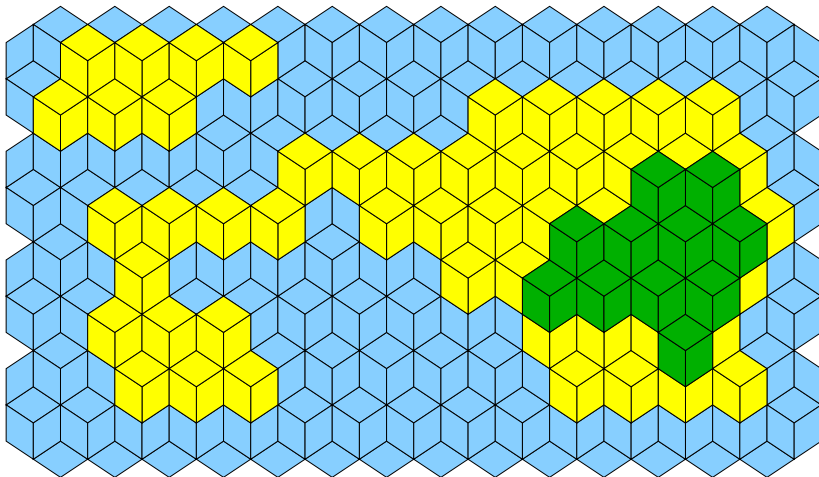
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



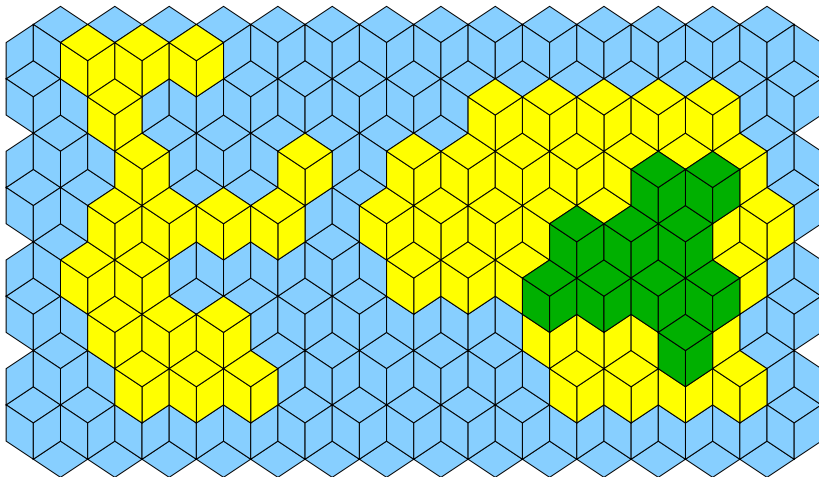
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (un par un).



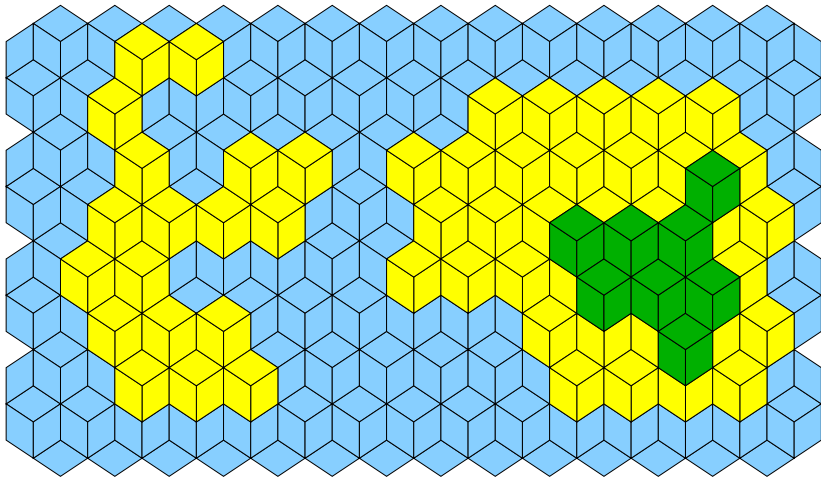
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



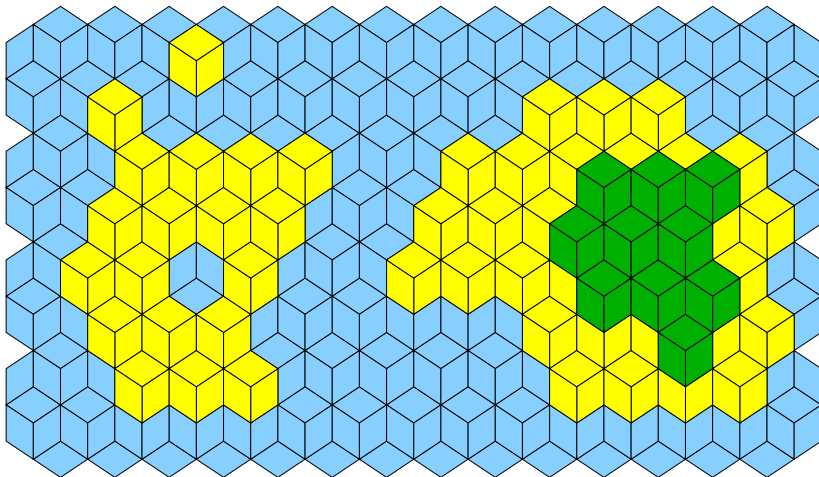
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



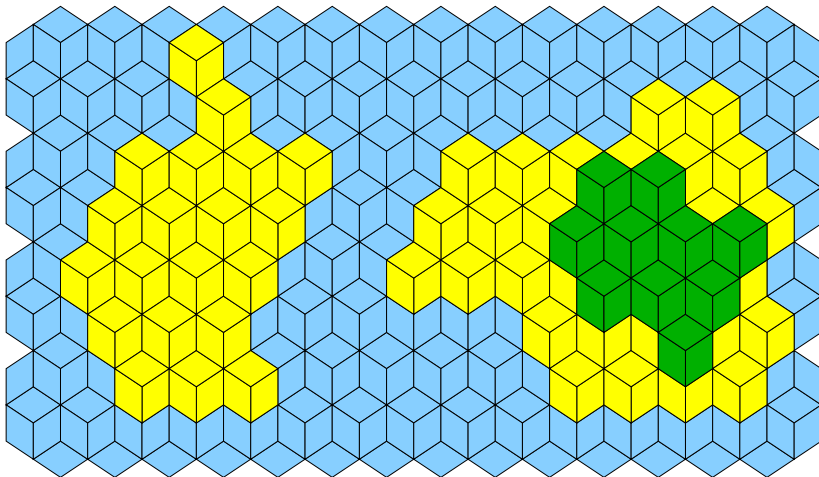
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



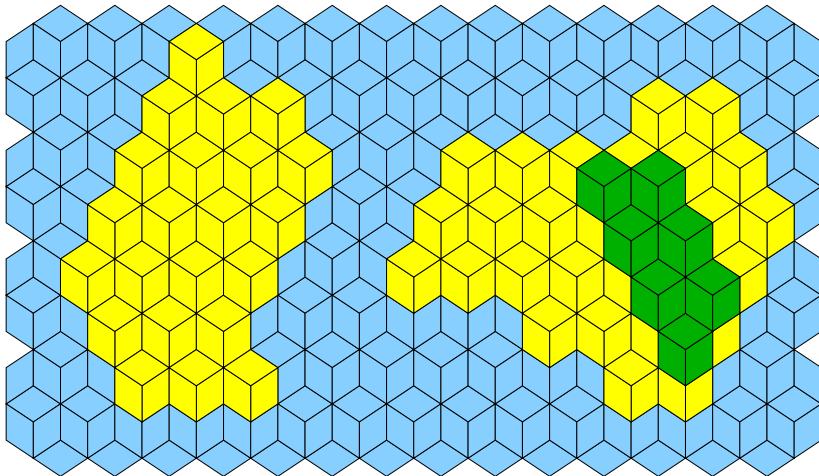
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



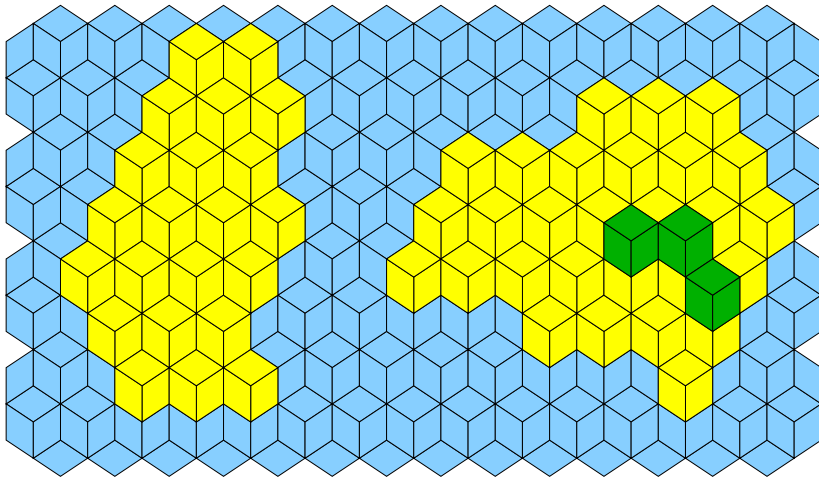
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



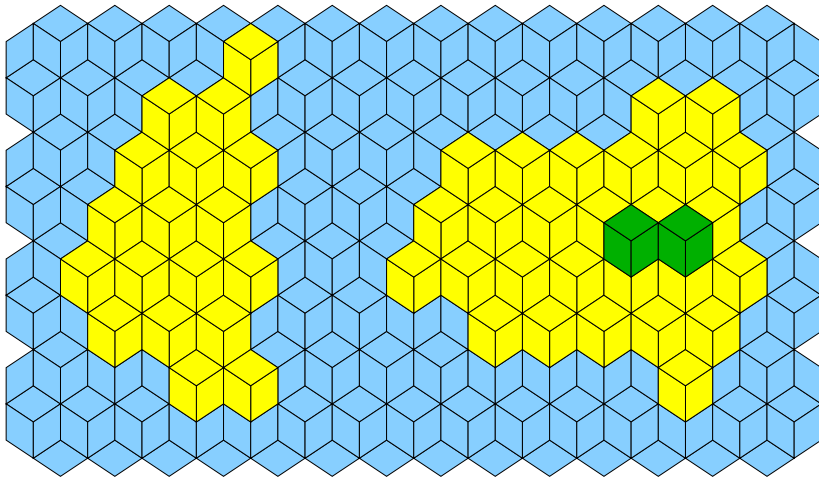
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



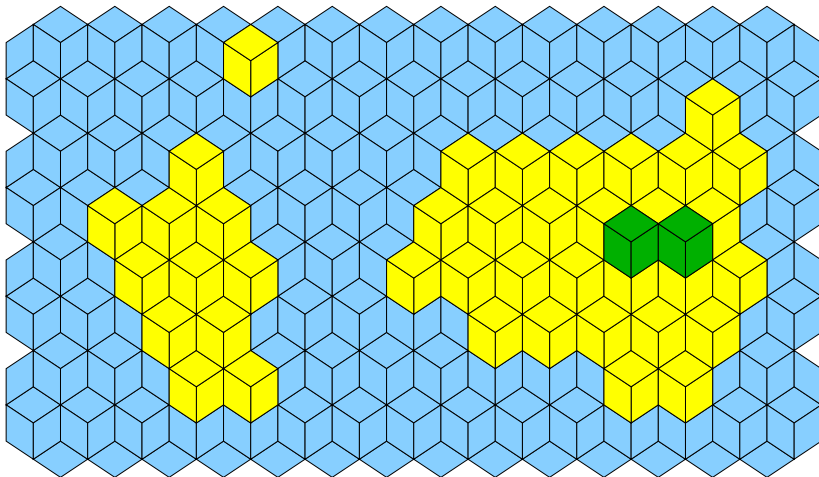
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



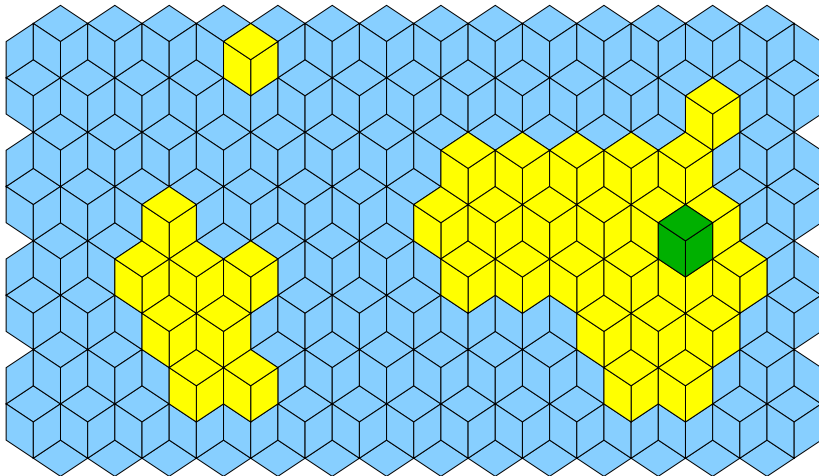
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



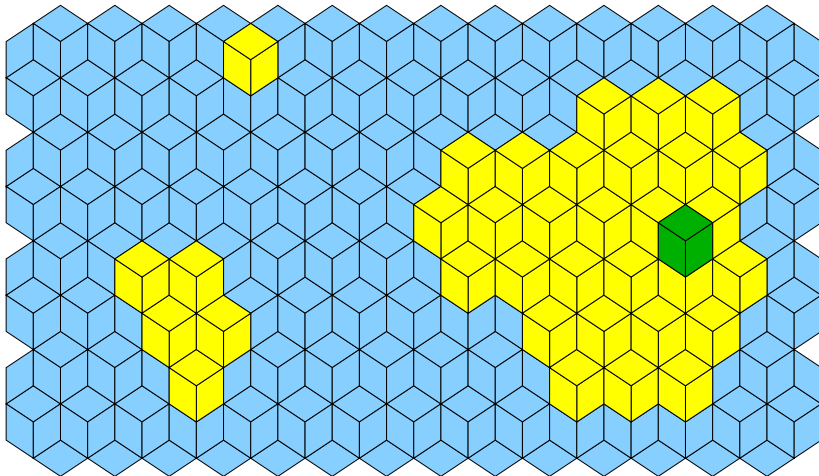
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



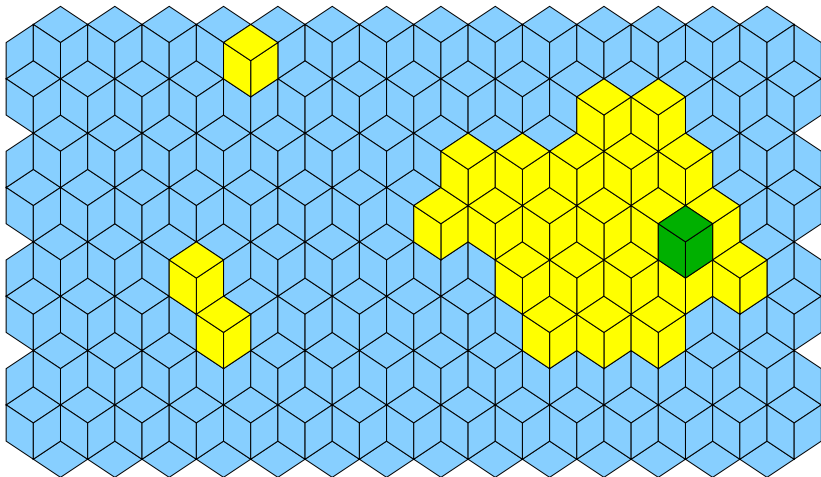
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



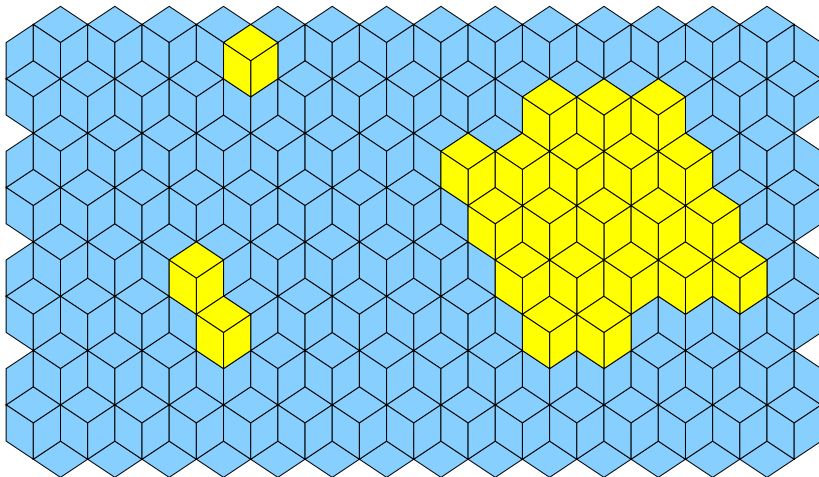
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



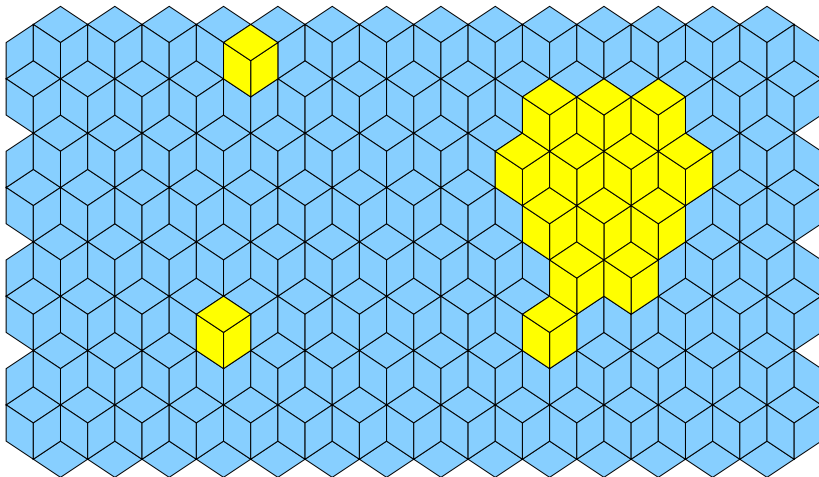
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



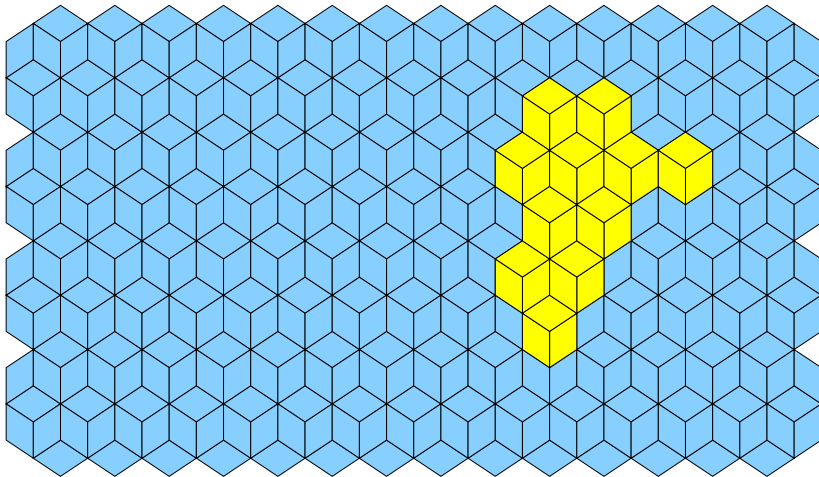
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



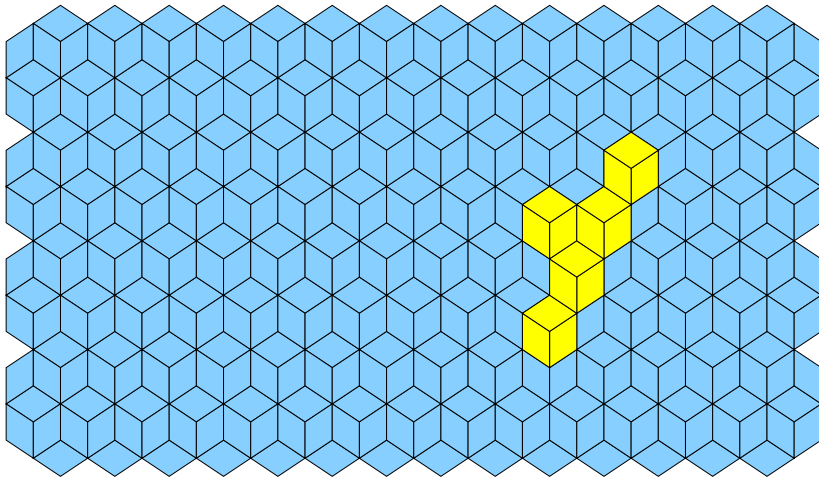
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



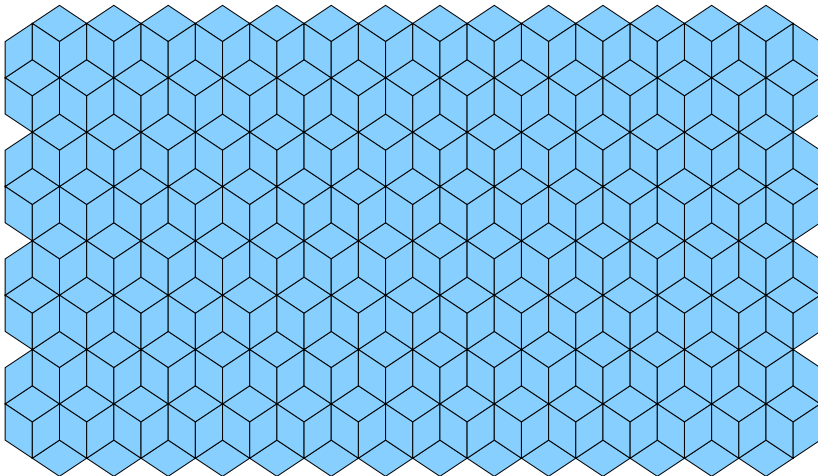
Exemple

Refroidissement : flips au hasard tel que $\Delta E \leq 0$ (10 par 10).



Exemple

Jusqu'à ce que plus aucun flip ne soit autorisé (169 flips faits).



Temps de convergence

v.a. T : durée du refroidissement (nb. flips faits).

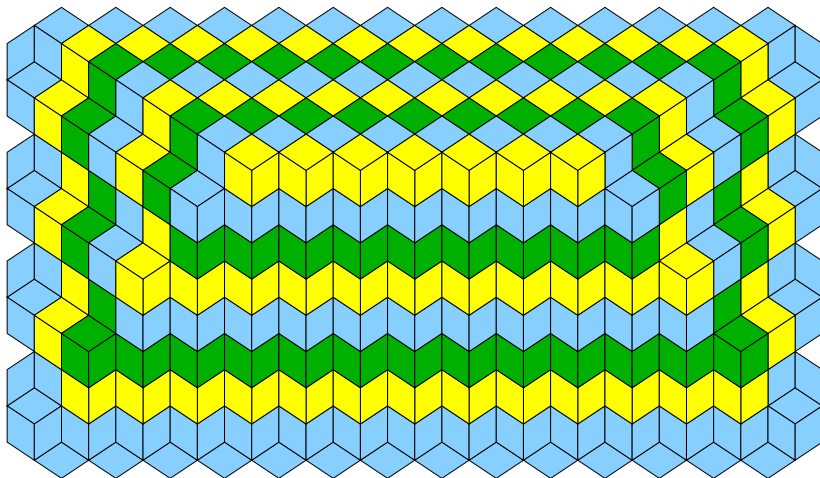
Pire temps moyen de convergence pour un domaine D fixé :

$$\hat{T} = \max_{\omega_0 \in \mathcal{P}(D)} \mathbb{E}(T \mid \omega = \omega_0).$$

Comportement asymptotique de \hat{T} quand $n := |D| \rightarrow \infty$?

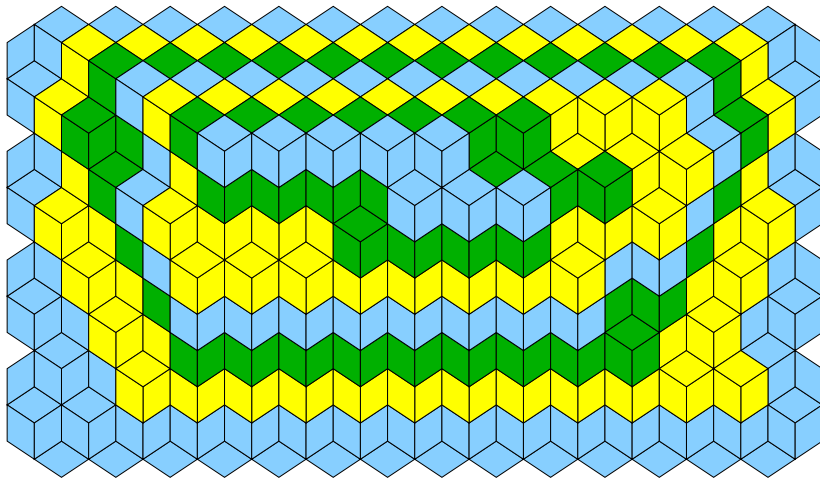
Simulations numériques

Pire cas : pavage de volume maximal ? (couleur : hauteur mod. 3)



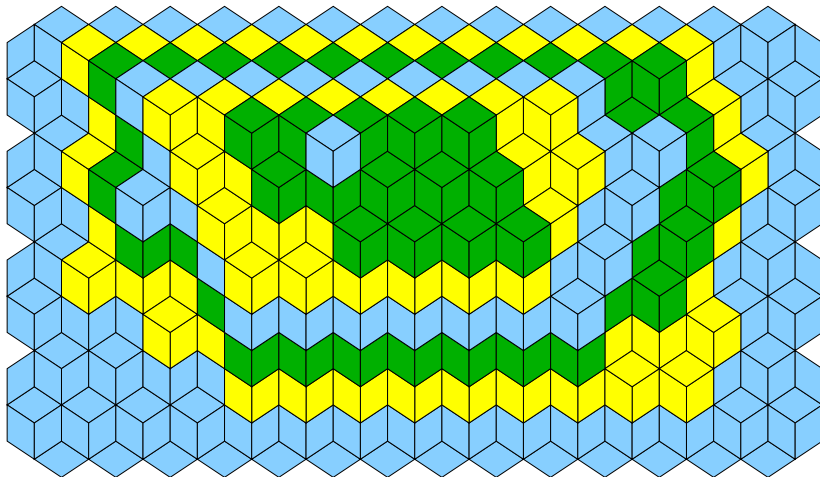
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



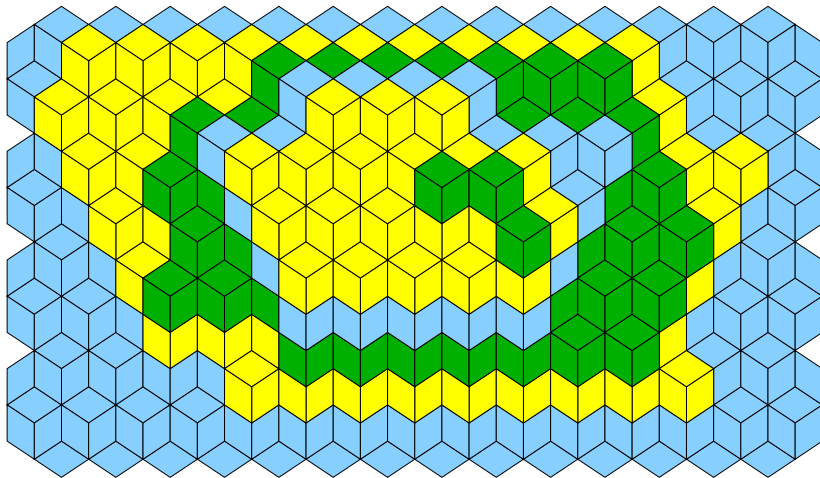
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



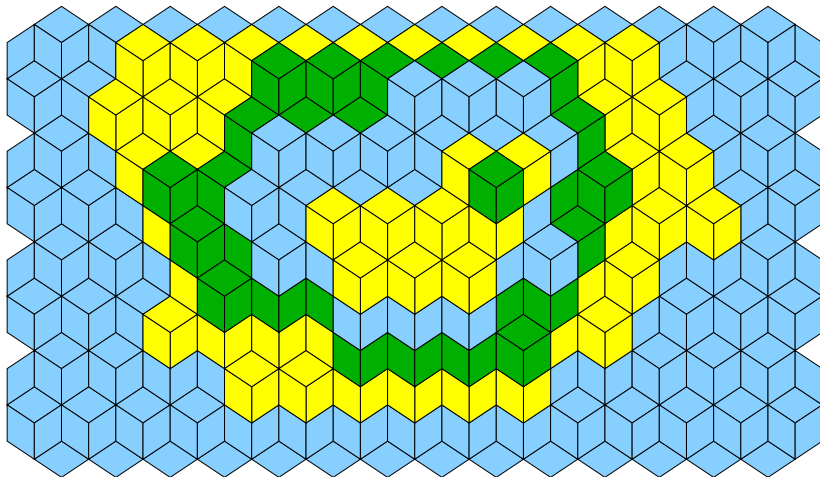
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



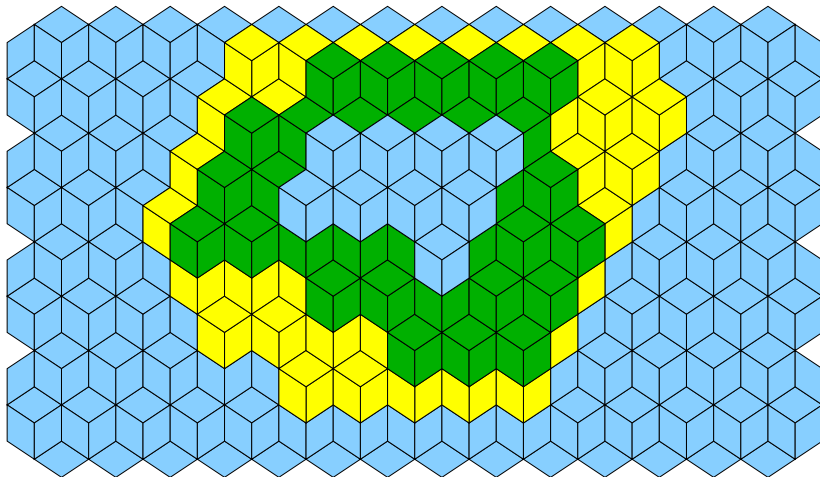
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



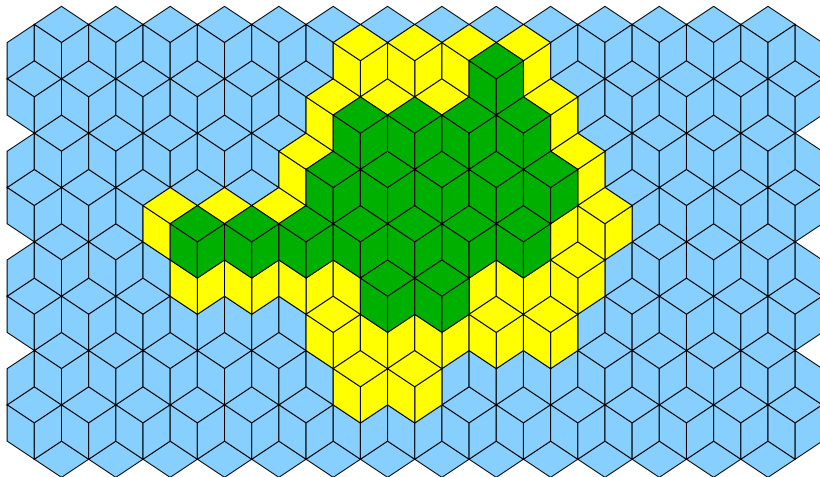
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



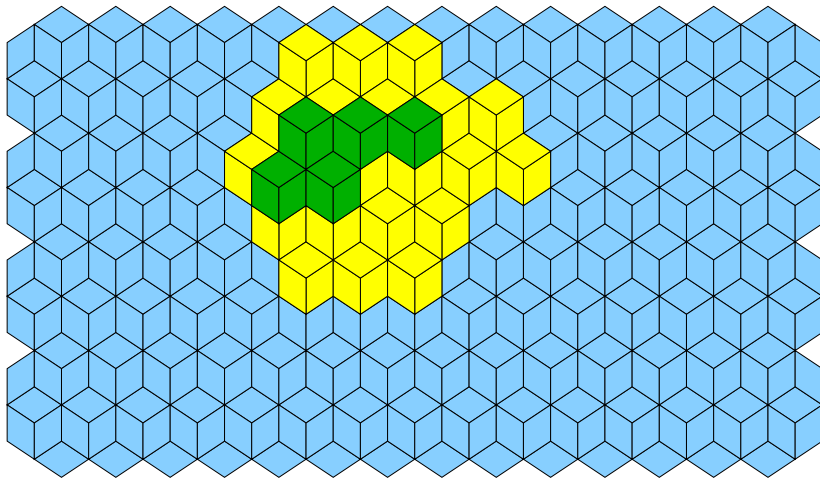
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



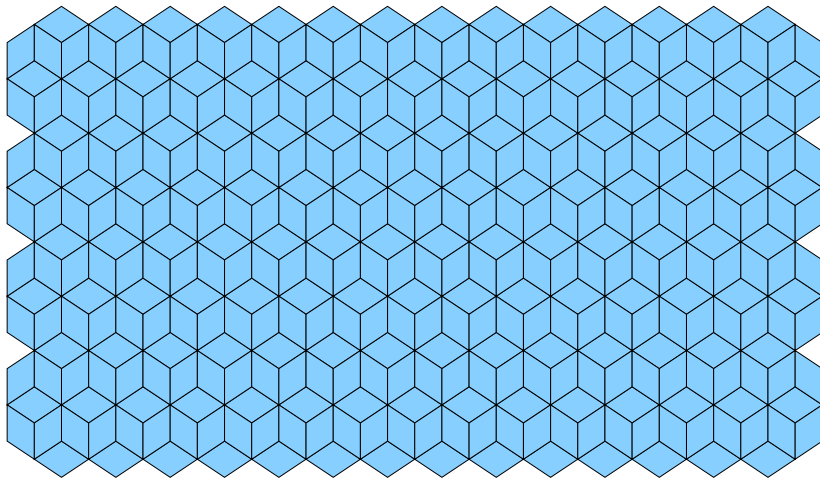
Simulations numériques

Il faut éroder $\Theta(\sqrt{n})$ îles d'aire $\Theta(n)$ superposées (flips 100 par 100)



Simulations numériques

Nombreuses simulations numériques \rightsquigarrow conjecture : $\hat{T} = \Theta(n^2)$.



- 1 Pavages et flips
- 2 Processus de refroidissement
- 3 Une borne supérieure quasi-optimale**
- 4 Une borne supérieure moins optimale

Un outil

Un outil pour borner \widehat{T} :

Proposition

Soit $(\omega_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov sur Ω . S'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction "potentiel" $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$\phi(\omega_t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[\phi(\omega_{t+1}) - \phi(\omega_t) | \omega_t] \leq -\varepsilon \phi(\omega_t),$$

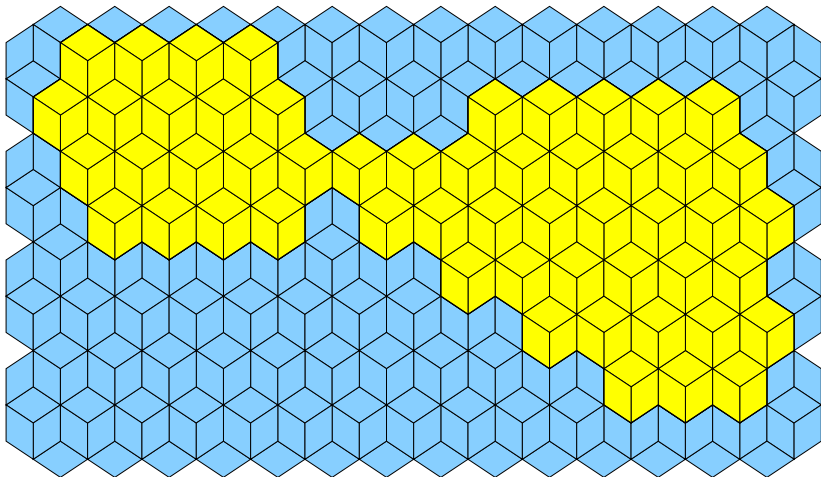
alors

$$\mathbb{E}(\min\{t \mid \phi(\omega_t) = 0\}) \leq \frac{\log \phi(\omega_0)}{\varepsilon}.$$

\rightsquigarrow potentiel ϕ vérifiant une telle "équation différentielle" ?

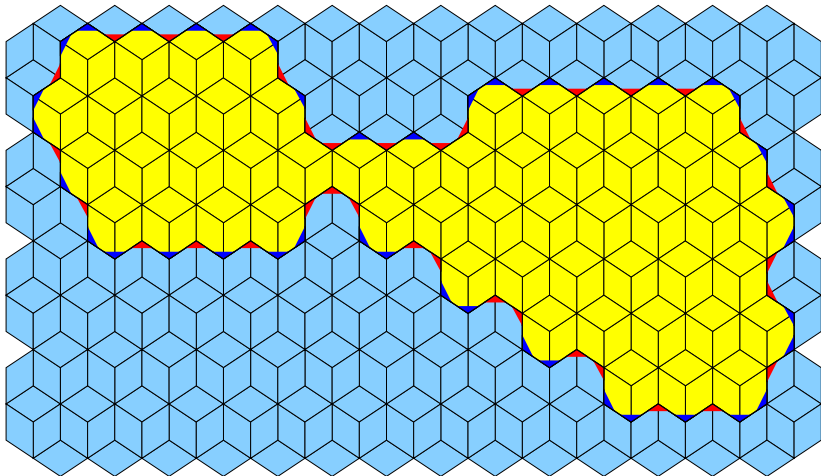
Le cas d'une île

Considérons la frontière d'une île sans trou.



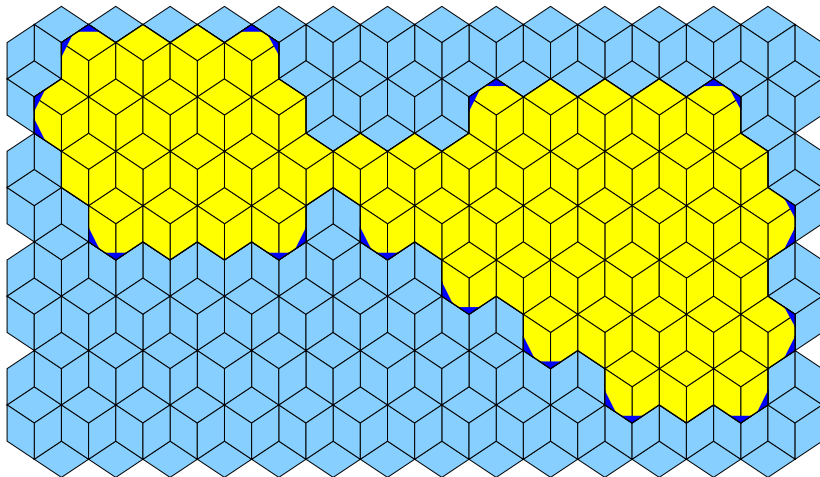
Le cas d'une île

Elle a 6 angles **saillants** de plus que d'angles **rentrants** (induction).



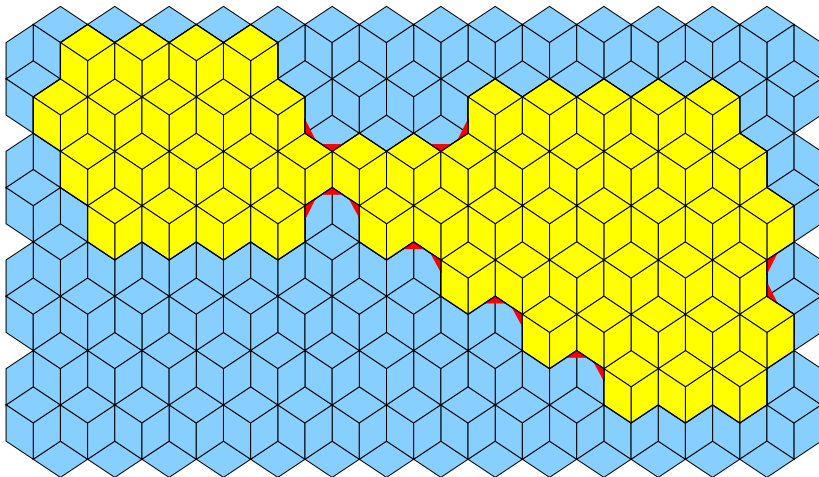
Le cas d'une île

$i \geq 2$ angles saillants consécutifs \rightsquigarrow flip t.q. $\Delta(4V + E) = -2i$.



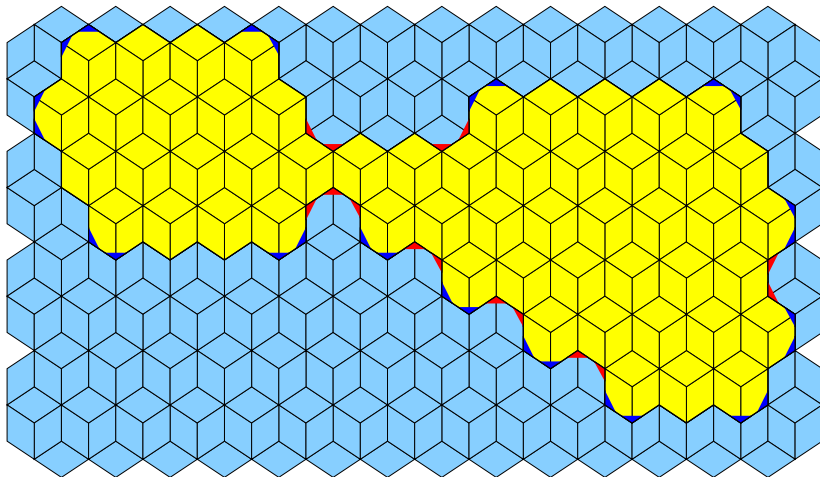
Le cas d'une île

$i \geq 2$ angles **rentrants** consécutifs \rightsquigarrow flip t.q. $\Delta(4V + E) \leq +2i$.



Le cas d'une île

Avec $\phi = 4V + E$, on a donc : $\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -6 \times 2/F$.



D'une île à plusieurs

Appliqué à chacune des k îles d'un pavage :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{12k}{F}.$$

D'une île à plusieurs

Appliqué à chacune des k îles d'un pavage :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{12k}{F}.$$

Or $\phi = 4V + E \leq 4kn + 2n \leq 6kn$ et $F \leq n$. D'où :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{2}{n^2}\phi.$$

D'une île à plusieurs

Appliqué à chacune des k îles d'un pavage :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{12k}{F}.$$

Or $\phi = 4V + E \leq 4kn + 2n \leq 6kn$ et $F \leq n$. D'où :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{2}{n^2}\phi.$$

Avec $\varepsilon = \frac{n^2}{2}$ et $\phi(\omega_0) = O(n\sqrt{n})$, notre outil donne :

$$\hat{T} = O(n^2 \log n).$$

D'une île à plusieurs

Appliqué à chacune des k îles d'un pavage :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{12k}{F}.$$

Or $\phi = 4V + E \leq 4kn + 2n \leq 6kn$ et $F \leq n$. D'où :

$$\mathbb{E}(\Delta\phi) \leq -\frac{2}{n^2}\phi.$$

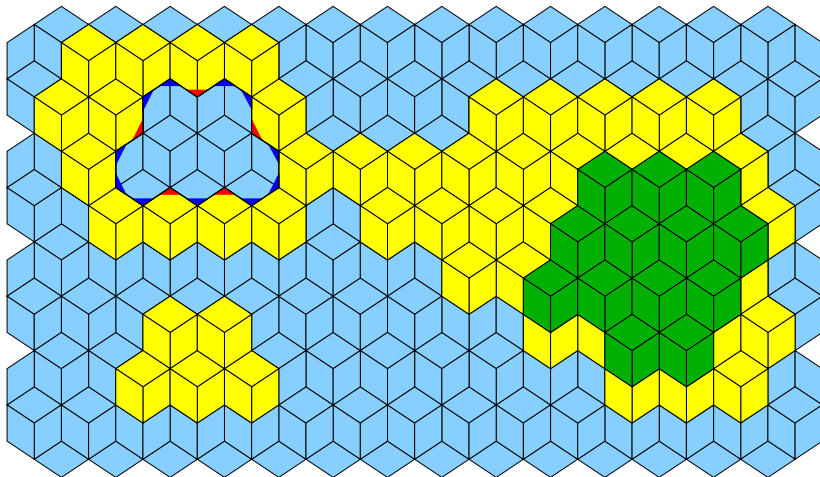
Avec $\varepsilon = \frac{n^2}{2}$ et $\phi(\omega_0) = O(n\sqrt{n})$, notre outil donne :

$$\hat{T} = O(n^2 \log n).$$

Triple arnaque !

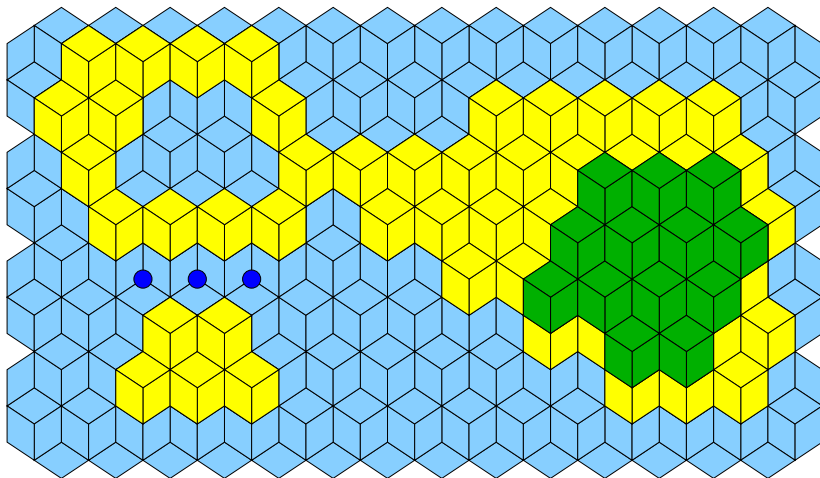
Triple arnaque

1 - Les trous ont un effet inverse sur le volume, donc sur ϕ .



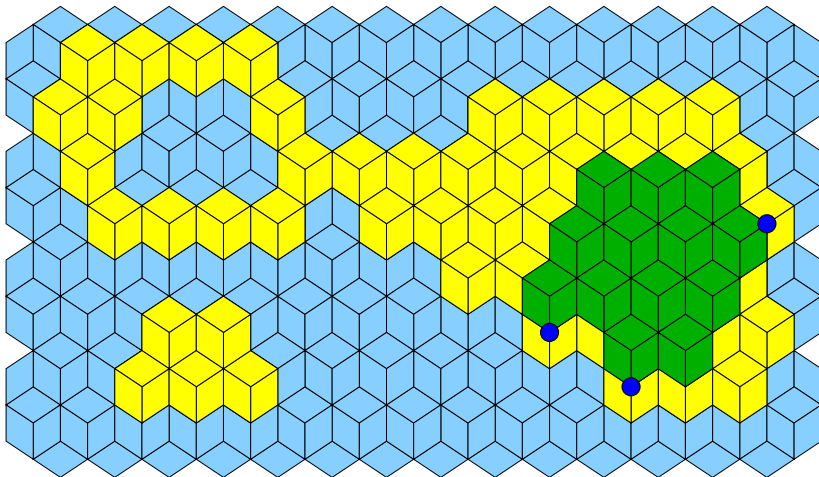
Triple arnaque

2 - Des fusions d'îles peuvent faire augmenter ϕ .



Triple arnaque

3 - Des blocages inter-niveaux peuvent empêcher ϕ de diminuer.



- 1 Pavages et flips
- 2 Processus de refroidissement
- 3 Une borne supérieure quasi-optimale
- 4 Une borne supérieure moins optimale**

Un autre outil

Un autre outil pour borner \widehat{T} :

Proposition

Soit $(\omega_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace Ω . S'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction "potentiel" $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

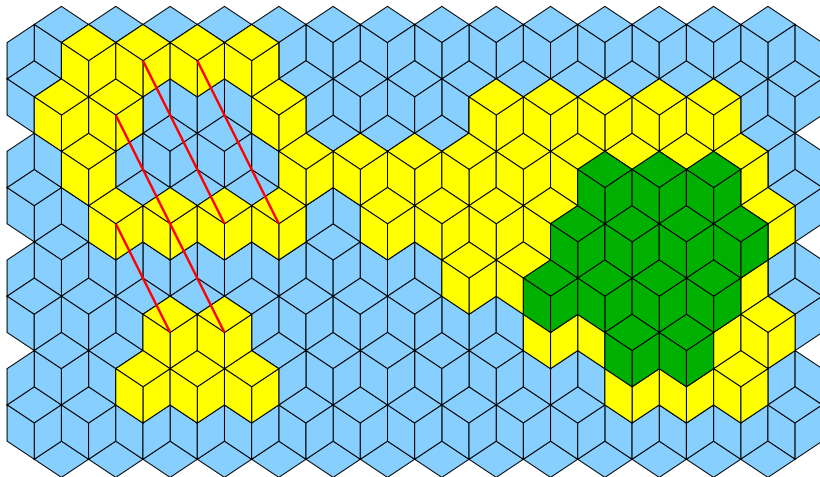
$$\phi(\omega_t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[\phi(\omega_{t+1}) - \phi(\omega_t) | \omega_t] \leq -\varepsilon,$$

alors

$$\mathbb{E}(\min\{t \mid \phi(\omega_t) = 0\}) \leq \frac{\phi(\omega_0)}{\varepsilon}.$$

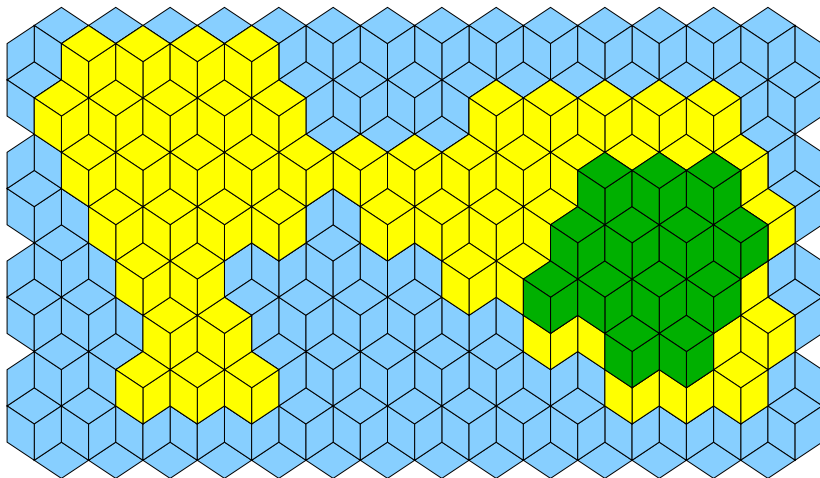
Rustine : enveloppe triconvexe

Enveloppe triconvexe $\bar{\omega}$ de ω : convexité dans trois directions.



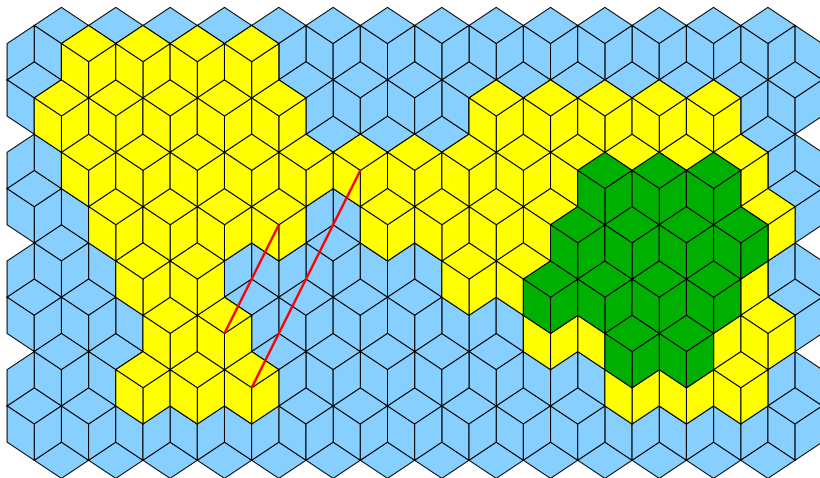
Rustine : enveloppe triconvexe

Enveloppe triconvexe $\bar{\omega}$ de ω : convexité dans trois directions.



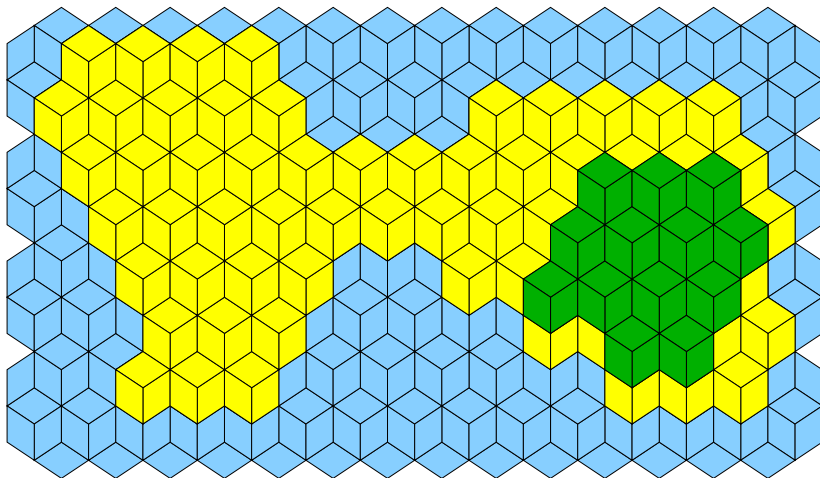
Rustine : enveloppe triconvexe

Enveloppe triconvexe $\bar{\omega}$ de ω : convexité dans trois directions.



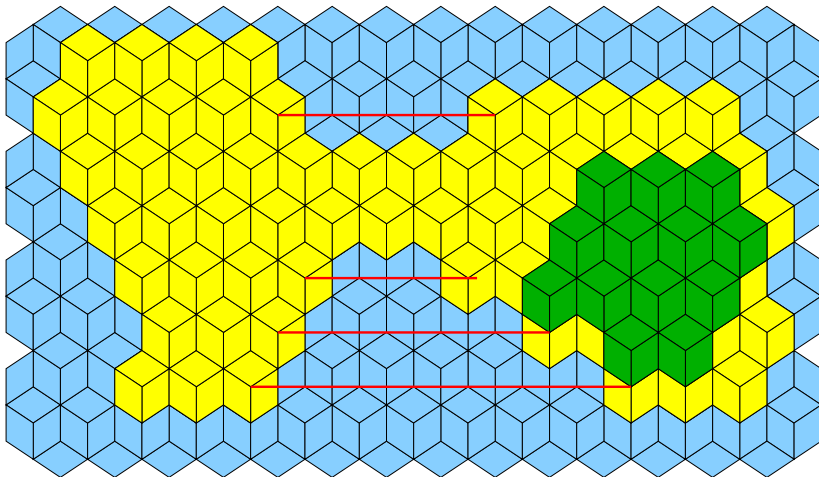
Rustine : enveloppe triconvexe

Enveloppe triconvexe $\bar{\omega}$ de ω : convexité dans trois directions.



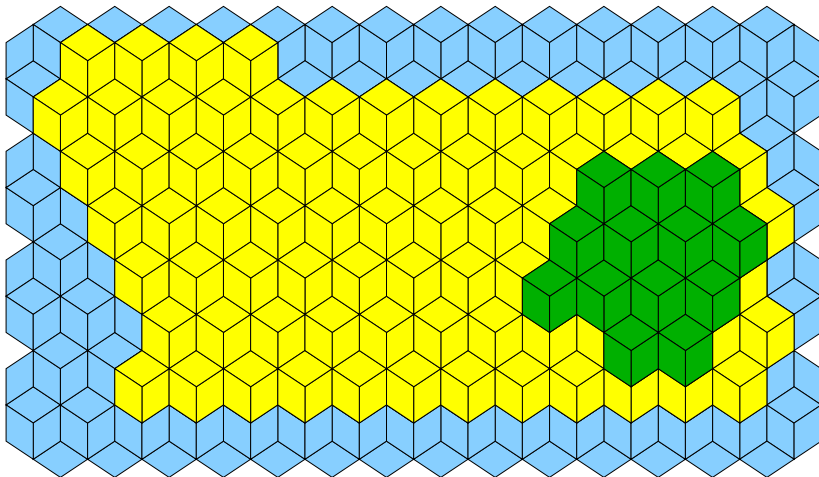
Rustine : enveloppe triconvexe

Enveloppe triconvexe $\bar{\omega}$ de ω : convexité dans trois directions.



Rustine : enveloppe triconvexe

Enveloppe triconvexe $\bar{\omega}$ de ω : convexité dans trois directions.



Rustine : enveloppe triconvexe

Si ω n'a que deux niveaux, on retrouve le cas d'une île :

$$\mathbb{E}[\Delta\phi(\bar{\omega})] \leq -\frac{12}{F(\bar{\omega})}.$$

Rustine : enveloppe triconvexe

Si ω n'a que deux niveaux, on retrouve le cas d'une île :

$$\mathbb{E}[\Delta\phi(\bar{\omega})] \leq -\frac{12}{F(\bar{\omega})}.$$

Avec $\bar{\phi}(\omega) := \phi(\bar{\omega})$, on se ramène alors de $\bar{\omega}$ à ω (technique) :

$$\mathbb{E}[\Delta\bar{\phi}(\omega)] \leq -\frac{12}{F(\omega)}.$$

Rustine : enveloppe triconvexe

Si ω n'a que deux niveaux, on retrouve le cas d'une île :

$$\mathbb{E}[\Delta\phi(\bar{\omega})] \leq -\frac{12}{F(\bar{\omega})}.$$

Avec $\bar{\phi}(\omega) := \phi(\bar{\omega})$, on se ramène alors de $\bar{\omega}$ à ω (technique) :

$$\mathbb{E}[\Delta\bar{\phi}(\omega)] \leq -\frac{12}{F(\omega)}.$$

Et comme $\bar{\phi} \leq 6n$ et $F \leq n$, notre outil donne :

$$\mathbb{E}(\min\{t \mid \bar{\phi}(\omega_t) = 0\}) \leq 6n^2.$$

Rustine : enveloppe triconvexe

Si ω n'a que deux niveaux, on retrouve le cas d'une île :

$$\mathbb{E}[\Delta\phi(\bar{\omega})] \leq -\frac{12}{F(\bar{\omega})}.$$

Avec $\bar{\phi}(\omega) := \phi(\bar{\omega})$, on se ramène alors de $\bar{\omega}$ à ω (technique) :

$$\mathbb{E}[\Delta\bar{\phi}(\omega)] \leq -\frac{12}{F(\omega)}.$$

Et comme $\bar{\phi} \leq 6n$ et $F \leq n$, notre outil donne :

$$\mathbb{E}(\min\{t \mid \bar{\phi}(\omega_t) = 0\}) \leq 6n^2.$$

Si ω a $O(\sqrt{n})$ niveaux, le plus haut disparaît en temps $O(n^2)$. D'où

$$\hat{T} = O(n^2\sqrt{n}).$$

Où perd-t-on ce facteur \sqrt{n} ?

Plus d'arnaque ici, mais on a perdu quelque part un facteur \sqrt{n} .

Où perd-t-on ce facteur \sqrt{n} ?

Plus d'arnaque ici, mais on a perdu quelque part un facteur \sqrt{n} .

Prendre l'enveloppe triconvexe : oublie les flips dans l'enveloppe.

Mais le refroidissement triconvexifie naturellement un pavage.

D'ailleurs, sur deux niveaux, les simulations suggèrent $\hat{T} = \Theta(n^2)$.

Où perd-t-on ce facteur \sqrt{n} ?

Plus d'arnaque ici, mais on a perdu quelque part un facteur \sqrt{n} .

Prendre l'enveloppe triconvexe : oublie les flips dans l'enveloppe.
Mais le refroidissement triconvexifie naturellement un pavage.
D'ailleurs, sur deux niveaux, les simulations suggèrent $\hat{T} = \Theta(n^2)$.

Raisonner sur le plus haut niveau : oublie les flips des sous-niveaux.
Or ces flips sont souvent utiles et peuvent être nombreux.
Étude plus fine des blocages inter-niveaux ?

Perspectives

Quelques perspectives pour finir :

- Borne optimale (\rightsquigarrow inférieure aussi !)

Perspectives

Quelques perspectives pour finir :

- Borne optimale (\rightsquigarrow inférieure aussi !)
- Cas moyen (pavage de départ choisi aléatoirement)

Perspectives

Quelques perspectives pour finir :

- Borne optimale (\rightsquigarrow inférieure aussi !)
- Cas moyen (pavage de départ choisi aléatoirement)
- Codimensions supérieures (pavages de Penrose *etc.*)

Perspectives

Quelques perspectives pour finir :

- Borne optimale (\rightsquigarrow inférieure aussi !)
- Cas moyen (pavage de départ choisi aléatoirement)
- Codimensions supérieures (pavages de Penrose *etc.*)
- Aller manger !