Génération aléatoire de chemins par contraction

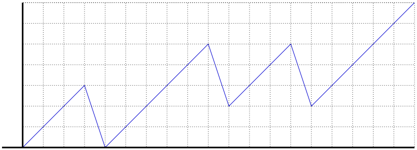
Lucas Gerin (Université Paris-Ouest et ANR GAMMA)

Journées ALÉA 2010

Chemins culminants

Mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, -b\}$.

Chemin associé au mot $(1, 1, 1, -3, 1, 1 \dots)$:



On veut tirer uniformément un chemin

- positif,
- dont le maximum est atteint en n.

déjà fait : **[Bousquet-Mélou/Ponty 2008]**

La stratégie

- Trouver une chaîne de Markov sur les chemins culminants
    - irréductible
    - de mesure stationnaire la mesure uniforme
- La faire tourner longtemps (combien de temps ?)

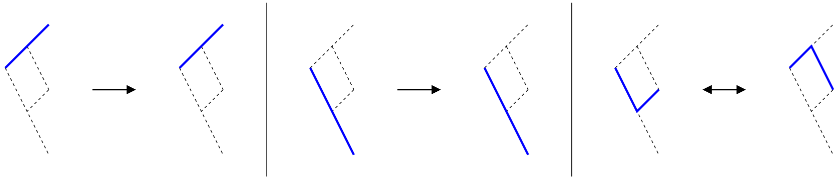
Plan

L'opérateur de *flip*

Définition

- *Pour* $i = 1, \ldots, n-1$, $\phi(\mathbf{S}, i, \uparrow)$ *est le chemin défini par : s'il y a une "vallée" en* i, *on la transforme en "pic".*

(Définition symétrique pour $\phi(\mathbf{S}, n, \downarrow)$*)*



Méthode de Monte-Carlo

Paramètres : T (grand) entier
probabilité $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$

Algorithme

initialiser **S**
faire T *fois,*
| *tirer au sort* i *selon* **p**
| *tirer au sort* ε *dans* $\{\uparrow, \downarrow\}$
| $\mathbf{S} \leftarrow \phi(\mathbf{S}, i, \varepsilon)$
Renvoyer **S**

Méthode de Monte-Carlo

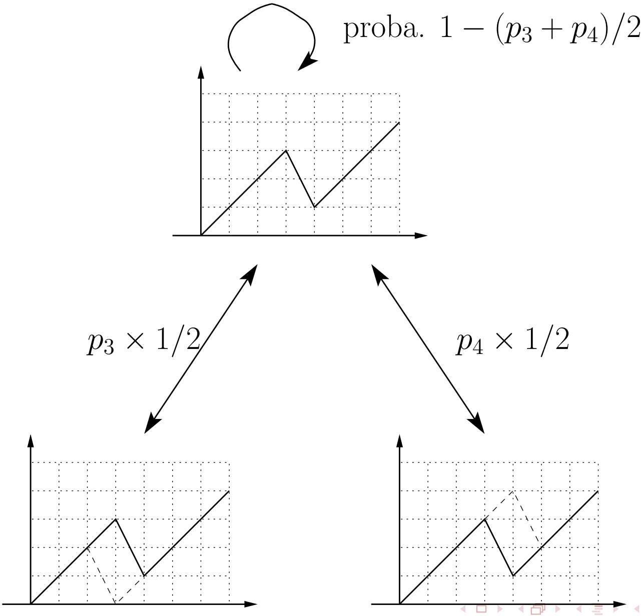
Paramètres : T (grand) entier
probabilité $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$

Algorithme

initialiser $\mathbf{S}$
faire T *fois,*
| *tirer au sort* i *selon* $\mathbf{p}$
| *tirer au sort* ε *dans* $\{\uparrow, \downarrow\}$
| $\mathbf{S} \leftarrow \phi(\mathbf{S}, i, \varepsilon)$
Renvoyer $\mathbf{S}$

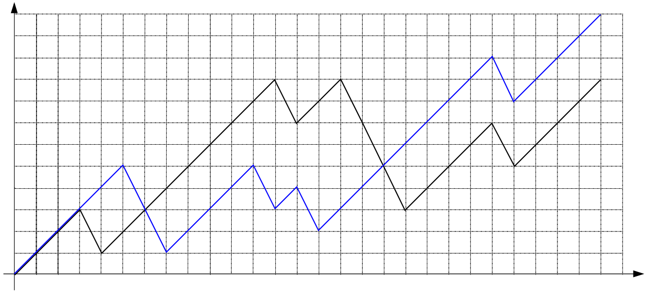
$\mathbf{S}(t) =$ chemin obtenu à la t-ème boucle.
$(\mathbf{S}(t))_{t=0,\ldots,T}$ est une chaîne de Markov sur $\mathcal{C}_n$.

Le graphe de la chaîne



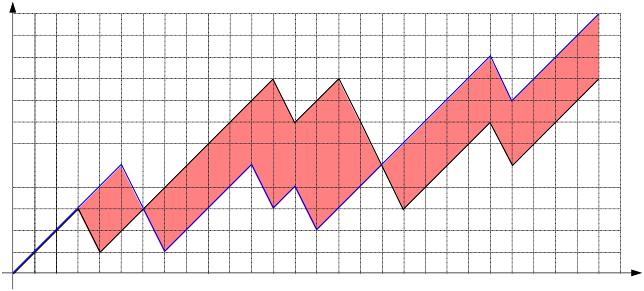
L'irréductibilité (= connexité du graphe)

Deux chemins R,S.



L'irréductibilité (= connexité du graphe)

Deux chemins R,S.



Proposition

Nb de pas minimal $R \to S = (a+b)\times$ *Aire entre* R *et* S.

Convergence vers la mesure stationnaire

La mesure uniforme π est **réversible** (donc **stationnaire**) :

$$\pi(R)\mathbb{P}(R \to S) = \pi(S)\mathbb{P}(S \to R).$$

Théorème

Soit $\mathbf{s}$ *un chemin fixé,*

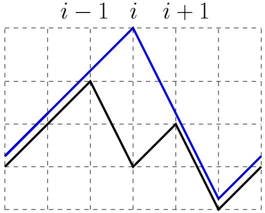
$$\mathbb{P}(\mathbf{S}(t) = \mathbf{s}) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathrm{card}\{\ \textit{chem. culminants}\ \}}.$$

Plan

Courbure de la chaîne

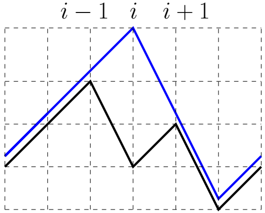
Deux chemins R,S "voisins de flip"

On veut montrer que ϕ rapproche R et S



Courbure de la chaîne

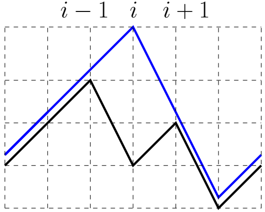
Deux chemins R,S "voisins de flip"
On veut montrer que ϕ rapproche R et S



$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\operatorname{dist}(\phi(S,I,\varepsilon),\phi(R,I,\varepsilon))\right] &= 0\times(p_i/2+p_i/2)\\
&+2\times(p_{i-1}/2+p_{i+1}/2)\\
&+1\times(1-p_i-p_{i-1}/2-p_{i+1}/2)\\
&=1-(p_i-p_{i-1}/2-p_{i+1}/2)\,.
\end{aligned}
$$

Courbure de la chaîne (choix particulier des p_i)

Deux chemins R,S "voisins de flip"
On veut montrer que ϕ rapproche R et S



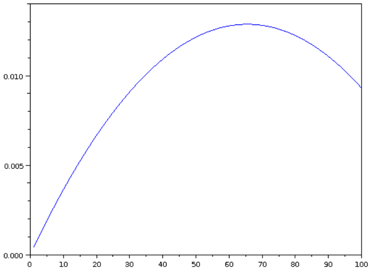
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{dist}(\phi(S,I,\varepsilon),\phi(R,I,\varepsilon))\right] =& 0\times(p_i/2+p_i/2)\\ &+2\times(p_{i-1}/2+p_{i+1}/2)\\ &+1\times(1-p_i-p_{i-1}/2-p_{i+1}/2)\\ =& 1-1/n^3.\end{aligned}$$

(La chaîne a une courbure de $1/n^3$)

Le choix pour les p_i

On prend

$$p_i \approx \frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{n^3}$$



(tracé pour $n = 100$)

Vitesse de convergence

Théorème (Dobrushin ? (50's))

(X_t) chaîne de Markov sur un graphe G, de courbure κ :

$$\textit{Pour tout } A \subset G, |\mathbb{P}(X_T \in A) - \pi(A)| \leq \mathrm{diam}(G)\,(1-\kappa)^T,$$

Ici :

Proposition (Vitesse de convergence de MCMC)

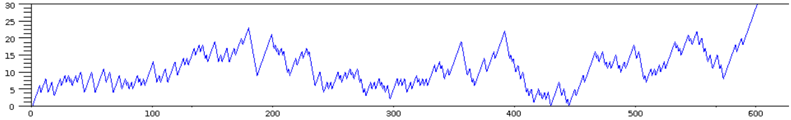
Soit A un ensemble de chemin,

$$|\mathbb{P}(\mathbf{S}(T) \in A) - \pi(A)| \leq n^2 \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^T,$$

avec $\mathbf{S}(t)$ = chemin obtenu à la t-ème boucle de MCMC.

Simulation

$n = 600, a = 1, b = 2$



Conclusion

- On peut faire du Propp-Wilson (en $n^3 \log^2 n$)
- Autres familles de chemins 1D
- chemins 2D ?

L.Gerin
Random sampling of lattice paths with constraints, via transportation (2010).