Le grand plongeon d'un type lambda

Une bijection entre λ-termes et cartes

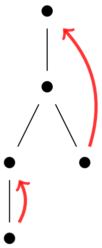
O. Bodini, D. Gardy, A. Jacquot

26 mars 2010

1. **Definitions**
   - BCI
   - Cartes triangulées
2. **Bijection entre BCI et cartes**
   - Dans un sens
   - Et dans l'autre
3. **Et on en déduit...**
   - Génération aléatoire
   - Asymptotique
   - BCK
4. **Extensions ?**
   - Variables libres
   - Et ensuite...

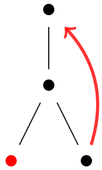
λ-terme associé à une formule BCI

BCI est un système de logique. Par l'isomorphisme de Curry-Howard, les formules de cette logique correspondent à des λ-termes sans variable libre où **chaque λ lie exactement une variable**.

$\lambda x.(\lambda y.y)\ x \simeq$ 

"BCI" avec variables libres

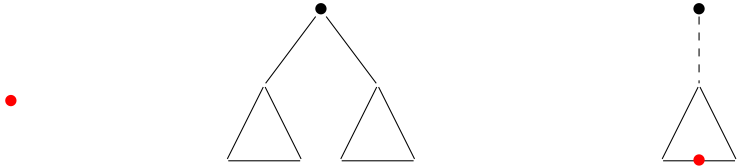
On autorise les feuilles sans arcs retour :



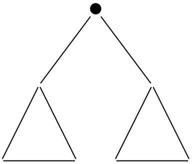
$T(x, u)$ est la série génératrice bivariée des BCI avec feuilles libres, où x compte le nombre de noeuds et u le nombre de feuilles libres.
$T(x, 0)$ est la série génératrice des BCI.

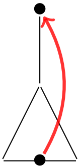
$$T(x,u) =$$

$$xu \quad + \quad x\,T^2(x,u) \quad + \quad x\,\frac{\partial T}{\partial u}(x,u)$$



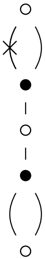
$$T(x,u) = xu + x\,T^2(x,u) + x\,\frac{\partial T}{\partial u}(x,u)$$

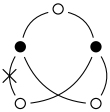




Carte triangulée pointée

Une *carte triangulée pointée* est un graphe plongé sur une surface orientable sans bord pouvant être construire par recollement de triangles.
On considèrera plutôt les diagrammes triangulaires $\mathcal{C}$ associés, qui sont des cartes biparties entre sommets de degré 2 et sommets de degré 3 représentant l'adjacence des faces :

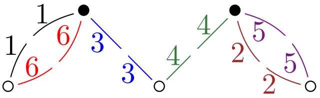




Spécification étiquetée

Spécification étiquetée : “Trivalent Diagrams, Modular Group and Triangular Maps” de S. Vidal.

$$A = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_3(x))$$



$$(1, 6, 3)(4, 2, 5)$$

$$(1, 6)(3, 4)(2, 5)$$

$$B = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_2(x))$$

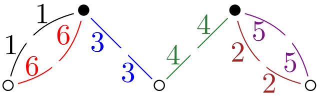
Produit de Hadamard étiqueté : $E = A \odot B$

$$E = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

Spécification étiquetée

Spécification étiquetée : "Trivalent Diagrams, Modular Group and Triangular Maps" de S. Vidal.

$$A = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_3(x))$$

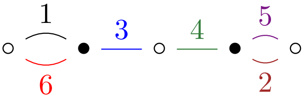


$$(1,6,3)(4,2,5)$$

$$(1,6)(3,4)(2,5)$$

$$B = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_2(x))$$

Produit de Hadamard étiqueté : $E = A \odot B$

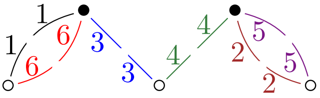


$$E = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

Spécification étiquetée

Spécification étiquetée : “Trivalent Diagrams, Modular Group and Triangular Maps” de S. Vidal.

$$A = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_3(x))$$

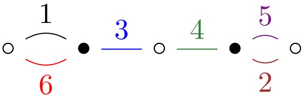


$$(1, 6, 3)(4, 2, 5)$$

$$(1, 6)(3, 4)(2, 5)$$

$$B = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_2(x))$$

Produit de Hadamard étiqueté : $E = A \odot B$



$$E = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

Spécification

$$E = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

Une composante connexe pointée sur une arête de E est un diagramme triangulé pointé étiqueté de $\mathcal{C}^\bullet$.
La classe $\mathcal{C}^\bullet$ est rigide : chaque objet non-étiqueté correspond à $n!$ objets étiquetés et les séries génératrices ordinaires et exponentielles sont les mêmes. (Vidal)

Premiers termes

Les diagrammes triangulés pointés, comptés selon leurs arêtes :

$$\textsc{Set}(\ \textsc{Cyc}_3(x)) \odot \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_2(x)) = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C}^\bullet(x) = 5x^6 + 60x^{12} + 1105x^{18} + 27120x^{24} + 828250x^{30} + \ldots$$

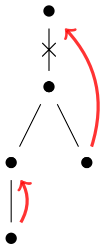
Les λ-termes "BCI", comptés selon leurs sommets :

$$T(x,u) = xu + xT^2(x,u) + x\frac{\partial T}{\partial u}(x,u)$$

$$T(x,0) = x^2 + 5x^5 + 60x^8 + 1105x^{11} + 27120x^{14} + 828250x^{17} + \ldots$$

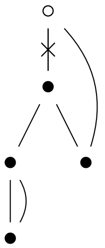
Plonger les BCI

On force les arcs retour à arriver à droite des noeuds λ :
on a ainsi une orientation sur les sommets.
Un parcours droit donne l'arbre du λ-terme sans les arcs retour.
On pointe l'arête à gauche de la racine.



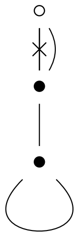
Transformer la carte.

1. Oublier la différence entre les arcs retour et les arcs de l'arbre syntaxique.
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Ajouter des sommets de degré 2 sur chaque arête, sauf celles incidentes à la racine.



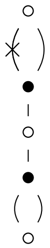
Transformer la carte.

1. Oublier la différence entre les arcs retour et les arcs de l'arbre syntaxique.
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Ajouter des sommets de degré 2 sur chaque arête, sauf celles incidentes à la racine.



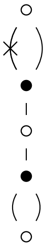
Transformer la carte.

1. Oublier la différence entre les arcs retour et les arcs de l'arbre syntaxique.
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Ajouter des sommets de degré 2 sur chaque arête, sauf celles incidentes à la racine.



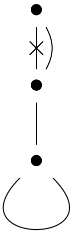
Bijection inverse

1. Distinguer la racine
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Trouver l'arbre par un parcours droit.
4. Faire apparaître les feuilles et les arcs retour.



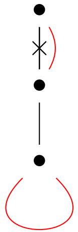
Bijection inverse

1. Distinguer la racine
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Trouver l'arbre par un parcours droit.
4. Faire apparaître les feuilles et les arcs retour.



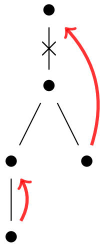
Bijection inverse

1. Distinguer la racine
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Trouver l'arbre par un parcours droit.
4. Faire apparaître les feuilles et les arcs retour.



Bijection inverse

1. Distinguer la racine
2. Contracter les sommets de degré 2, sauf la racine.
3. Trouver l'arbre par un parcours droit.
4. Faire apparaître les feuilles et les arcs retour.



1. Definitions
2. Bijection entre BCI et cartes
3. Et on en déduit...
    - Génération aléatoire
    - Asymptotique
    - BCK
4. Extensions ?

Génération aléatoire

On a maintenant une description étiquetée $\mathcal{C}^\bullet$ des λ-termes qui permet la génération aléatoire automatique :

$$\textsc{Set}(\ \textsc{Cyc}_3(x)) \odot \textsc{Set}\ (\textsc{Cyc}_2(x)) = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

1. On tire deux permutations
2. On forme les sommets du diagramme par groupement de 2 ou 3 éléments
3. Un produit de Hadamard nous permet de construire un ensemble de cartes

On obtient ainsi un générateur uniforme linéaire de $\textsc{Set}(\mathcal{C})$.

On prend ensuite une composante connexe de l'ensemble de diagrammes obtenu, que l'on pointe.
Comme la classe est rigide, le générateur non-étiqueté reste uniforme si on oublie les étiquettes.

Théorème

Le générateur de $\mathcal{C}^\bullet$ est linéaire.

Preuve : L'ensemble obtenu contient presque surement un seul élément. (Voir Bender 74.)

Asymptotique

Par la spécification des cartes faisant intervenir le produit de Hadamard étiqueté :

$$\textsc{Set}(\ \textsc{Cyc}_3(x)) \odot \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_2(x)) = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

on peut résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\mathcal{C}^\bullet(x) = T(x,0) \text{ dans } T(x,u) = xu + xT^2(x,u) + x\frac{\partial T}{\partial u}(x,u)$$

$$\textsc{Set}(\mathcal{C}) = \sum_{n\geq 1} \frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!2^{3n}3^{2n}} x^{6n}$$

Asymptotique, par la formule de Stirling :

$$[x^{6n}]\textsc{Set}(\mathcal{C}) \sim \frac{(6n/e)^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

$$[x^{6n}]\textsc{Set}(\mathcal{C}) \sim \frac{(6n/e)^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Théorème

Asymptotiquement, $\textsc{Set}(\mathcal{C}) \sim \mathcal{C}$ (Bender 74).

Corollaire

$$[x^{6n}]\mathcal{C}^\bullet(x) = [x^{3n+2}]T(x) \sim \frac{6n(6n/e)^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Autoriser les λ non liés

Le système de logique BCK correspond aux λ-termes sans variables libres où chaque λ lie au plus une feuille.

$$S(z,u) = uz + zS^2 + z\frac{\partial S}{\partial u} + zS$$

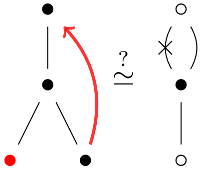
$$S(z,0)$$

$$S(z) = T\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

Autoriser les variables libres

Peut-on étendre la bijection aux BCI avec variables libres et aux cartes biparties entre sommets de degré 3 et sommets de degré 1 ou 2 pointée sur une arête ?

$$T = u\mathcal{Z} + \mathcal{Z}T^2 + \mathcal{Z}\frac{\partial T}{\partial u}$$



$$\textsc{Set}(\ \textsc{Cyc}_3(\mathcal{Z})) \odot \textsc{Set}(\mathcal{Z} + \textsc{Cyc}_2(\mathcal{Z})) = \textsc{Set}(\mathcal{C})$$

Et ensuite...

Peut-on étendre la bijection aux lambda-termes généraux ?

Peut-on résoudre tout une classe d'équations aux dérivées partielles ?