Comptage de matrices à signe alternant en fonction du nombre d'entrées négatives.

Robert Cori, Philippe Duchon, Florent Le Gac

23 mars 2010

Outline

Matrices à signe alternant

Définition

Une matrice à signe alternant (ASM) de taille n est une matrice $n \times n$ vérifiant que :

- les entrées de la matrice sont dans $\{-1, 0, 1\}$.
- les entrées alternent en signe sur chaque ligne et colonne.
- la somme des entrées de chaque ligne et chaque colonne vaut 1.

Cas particulier d'ASM : les permutations, qui n'ont pas de -1.

Matrices à signe alternant

$$\begin{array}{cccccccc}
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
1 & . & -1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & -1 & . & . & 1 \\
. & 1 & -1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & .
\end{array}$$

Un ASM de taille 8 avec 3 entrées négatives

Matrices à signe alternant

- $A(n)$ est l'ensemble des ASMs de taille n
- $A(n,k)$ est l'ensemble des ASMs de taille n avec k entrées négatives.

Le nombre de matrices à signe alternant est donné par :

Théorème (Zeilberger 96)

$$|A(n)| = \prod_{0 \leq i < n} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$$

Matrices à signe alternant

Théorème (Aval, Cori, Duchon, Le Gac)

$$
\begin{aligned}
|A(n,0)| &= n! \\
|A(n,1)| &= n!(f(n,3)) \\
|A(n,2)| &= n!(2.f(n,4) + 44.f(n,5) + 200.f(n,6)) \\
|A(n,3)| &= n!(14.f(n,5) + 780.f(n,6) + 15590.f(n,7) \\
&+ 137984.f(n,8) + 470400.f(n,9))
\end{aligned}
$$

avec $f(n,t) = \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{(t!)^2}$

Résultats

Nous présentons :

- une formule générale :

$$|A(n,k)| = \sum_{t=?}^{?} |C(t,k)| f(n,t)$$

- une interprétation des coefficients $|C(t,k)|$
- le calcul du coefficient dominant (l'asymptotique)

Outline

Contraction d'ASM

Definition (entrée isolée)

Une entrée d'ASM est dite *isolée* si à la fois sa ligne et sa colonne ne contiennent aucune autre entrée non nulle.

$$
\begin{array}{cccccccc}
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
1 & . & -1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & {\color{red}1} & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & -1 & . & . & 1 \\
. & 1 & -1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & {\color{red}1} & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & .
\end{array}
$$

Seul les entrées positives sont susceptibles d'être isolées.

Contraction d'ASM

Definition (ASM contracté)

Un ASM est dit contracté s'il ne contient aucune entrée isolée.

Tout ASM A admet un unique ASM contracté. On l'obtient en retirant la ligne et la colonne de chaque entrée isolée de A.

$$\begin{array}{cccccc}
. & . & 1 & . & . & . \\
1 & . & -1 & 1 & . & . \\
. & . & 1 & -1 & . & 1 \\
. & 1 & -1 & . & 1 & . \\
. & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & .
\end{array}$$

L'ordre dans lequel on retire les 1 isolés n'a pas d'importance.

Nombre d'ASMs de taille n associés à un ASM contracté

$C(n,k)$ est l'ensemble des ASMs contractés de taille n possédant k entrées négatives.

Propriété

Pour tout ASM contracté c de taille t, le nombre d'ASMs de taille n se contractant en c est donné par $n!f(n,t)$.

$$
\begin{aligned}
n!f(n,t) &= (n-t)!\binom{n}{t}^2 \\
&= n!\frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{(t!)^2}
\end{aligned}
$$

Ce nombre ne dépend que de la taille de l'ASM contracté.

Nombre d'ASMs de taille n associés à un ASM contracté

Preuve

Nous donnons une bijection entre les ASMs de taille n, et les quadruplets formés de :

- l'ASM contracté associé, de taille t,
- une matrice de permutation de taille $(n-t)$,
- un ensemble d'entiers $L = \{l_1, \ldots, l_{n-t}\}$ représentant des indices de lignes,
- un ensemble d'entiers $C = \{c_1, \ldots, c_{n-t}\}$ représentant des indices de colonnes.

Le nombre de choix possibles est donné par $(n-t)! \binom{n}{n-t}^2$.

Nombre d'ASMs de taille n associés à un ASM contracté

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$L = \{3, 4, 7\},\ C = \{1, 3, 7\}$$

$$\begin{matrix} . & 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & 1 & . & 0 & -1 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & . & 1 & . & . & . & 0 & . & . \\ 1 & . & 0 & . & . & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & 1 & -1 & . & 0 & 1 \\ . & 0 & . & 1 & -1 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & 0 & . & 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 \end{matrix}$$

Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

Dès lors, nous pouvons écrire :

Formule de comptage

$$|A(n,k)| = n! \sum_{t=1}^{??} |C(t,k)| f(n,t)$$

Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

Taille maximale

La taille maximale d'un ASM contracté comptant k entrées négatives est $3k$.

- $taille(ASM) = \#(1) - \#(-1)$
- pour un contracté, $\#(1)$ est plus petit que 4 fois $\#(-1)$.

Taille minimale

La taille minimale d'un ASM contracté est donnée par :

$$low(k) = \begin{cases} 2i & \text{if } (i-1)^2 < k \leq (i-1)i, \\ 2i+1 & \text{if } (i-1)i < k \leq i^2 \end{cases}$$

Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

Le nombre maximal de -1 dans un ASM contracté est donné par :

- i^2 pour la taille $2i + 1$,
- $(i - 1)i$ pour la taille $2i$
- Le nombre maximal de -1 est une fonction croissante de n.

$$\begin{array}{ccccc}
. & . & 1 & . & . \\
. & 1 & {\color{red}-1} & 1 & . \\
1 & {\color{red}-1} & 1 & {\color{red}-1} & 1 \\
. & 1 & {\color{red}-1} & 1 & . \\
. & . & 1 & . & .
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
. & . & 1 & . & . & . \\
. & 1 & {\color{red}-1} & 1 & . & . \\
1 & {\color{red}-1} & 1 & {\color{red}-1} & 1 & . \\
. & 1 & {\color{red}-1} & 1 & {\color{red}-1} & 1 \\
. & . & 1 & {\color{red}-1} & 1 & . \\
. & . & . & 1 & . & .
\end{array}$$

Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

Théorème

$$|A(n,k)| = n! \sum_{t=low(k)}^{3k} |C(t,k)| f(n,t)$$

Outline

Asymptotique pour $|A(n,k)|$

Formule de comptage

$$|A(n,k)| = n! \sum_{t=low(k)}^{3k} |C(t,k)| \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{(t!)^2}$$

- $\frac{|A(n,k)|}{n!}$ est un polynôme en n de degré $3k$.
- Son coefficient dominant est donc $\frac{|C(3k,k)|}{(3k)!^2}$.

Asymptotique pour $|A(n, k)|$

On appelle *contracté maximal* de taille k un ASM contracté de $C(3k, k)$.
Remarquons que pour un contracté maximal de taille $3k$, il y a exactement :

- k entrées négatives
- $4k$ entrées positives

Donc un tel ASM posséde exactement :

- k lignes ayant 3 valeurs non nulles (1, -1, 1),
- $2k$ lignes avec 1 unique valeur non nulle (1).

Codages des contractés maximaux

Definition

On note $M(k)$ l'ensemble des mots de taille k définis comme suit :
Un mot u est dans $M(k)$ ssi :

- u est formé de k triplets et $2k$ singletons dans $[3k]$.
- les k triplets forment une partition de $[3k]$
- chaque triplet (a, b, c) est précédé et suivi d'un singleton (b)

Propriété

L'ensemble des mots dans $M(k)$ est en bijection avec $C(3k, k)$.

Bijection entre $M(k)$ et $C(3k, k)$

$$\begin{matrix}
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & 1 & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & -1 & . & 1 \\
1 & . & . & -1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & .
\end{matrix}$$

Chaque ligne est remplacée par la suite des indices de colonne de ses valeurs non nulles.

Bijection entre $M(k)$ et $C(3k, k)$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & 1 & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & -1 & . & 1 \\
1 & . & . & -1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & .
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(3) \\
(7) \\
(2,3,6) \\
(4) \\
(3) \\
(5,7,9) \\
(1,4,8) \\
(7) \\
(4)
\end{array}
$$

Bijection entre $M(k)$ et $C(3k, k)$

Remarque

Il existe une bijection semblable en travaillant sur les colonnes plutôt que les lignes.

Relation sur le nombre d'ASMs dans $C(3k, k)$

Nous allons montrer que :

Propriété

$$|C(3k, k)| = \frac{(3k)!}{6^k} \frac{(3k)!}{6^k k!}$$

Preuve du nombre d'ASMs dans $C(3k,k)$

Nous donnons une bijection entre $M(k)$ et les couples formés de :

- S_1, une partition (ordonnée) en k triplets de $[3k]$.
- S_2, une partition (non ordonnée) en k triplets de $[3k]$.

Propriété

Le nombre de couples (S_1, S_2) possibles est compté par : $\frac{(3k)!}{6^k}\frac{(3k)!}{6^k k!}$

Preuve du nombre d'ASMs dans $C(3k,k)$

Etant donné un mot $u \in M(k)$, on note c son ASM associé et u' le mot dans $M(k)$ des colonnes de c.

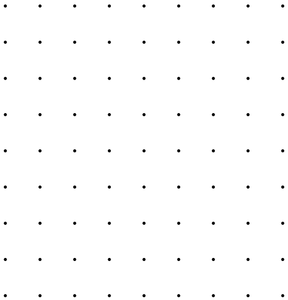
- S_1 est l'ensemble des triplets de u (pris dans l'ordre)
- S_2 est l'ensemble des triplets de u' (pris dans n'importe quel ordre)

Etant donné (S_1, S_2) nous construisons un mot $u \in M(k)$:

- On ordonne S_2 en fonction des valeurs médianes de ses triplets.
- Pour chaque couple de triplets $(g,c,d) \in S_1$ et $(h,l,b) \in S_2$ (pris dans l'ordre) :
  - On place un -1 en position (c,l)
  - On place quatre 1 en positions (g,l), (d,l), (c,h) et (c,b).

Exemple

$$S_1 = \{(2,3,6),(5,7,9),(1,4,8)\},\ S_2 = \{(1,3,5),(2,6,8),(4,7,9)\}$$



Exemple

$S_1 = \{(5,7,9),(1,4,8)\},\ S_2 = \{(2,6,8),(4,7,9)\}$
$[(2,3,6),(1,3,5)]$

$$
\begin{matrix}
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{matrix}
$$

Exemple

$S_1 = \{(1,4,8)\},\ S_2 = \{\}$
$[(2,3,6),(1,3,5)],\ [(5,7,9),(2,6,8)]$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & 1 & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & -1 & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Exemple

$S_1 = \{\}$, $S_2 = \{\}$
$[(2,3,6),(1,3,5)]$, $[(5,7,9),(2,6,8)]$, $[(1,4,8),(4,7,9)]$

$$\begin{matrix}
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & 1 & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & -1 & . & 1 \\
1 & . & . & -1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & .
\end{matrix}$$

Asymptotique de $|A(n, k)|$

L'asymptotique des ASMs de taille n avec k entrées négatives est donnée par :

Theorem

$$|A(n, k)| = n! \frac{n^{3k}}{36^k k!}(1 + O(1/n))$$

Outline

Conclusion

Nous avons donné :

- une formule (non explicite) pour $|A(n, k)|$
- l'asymptotique pour $|A(n, k)|$
- la formule exacte pour $|A(n, 3)|$

Nous travaillons actuellement sur :

- une formule pour calculer les $|C(t, k)|$
- Calculer $|A(n, k)|$ pour $k = 4, 5, \ldots$