Configurations de Fully Packed Loops
et
Coefficients de Littlewood Richardson

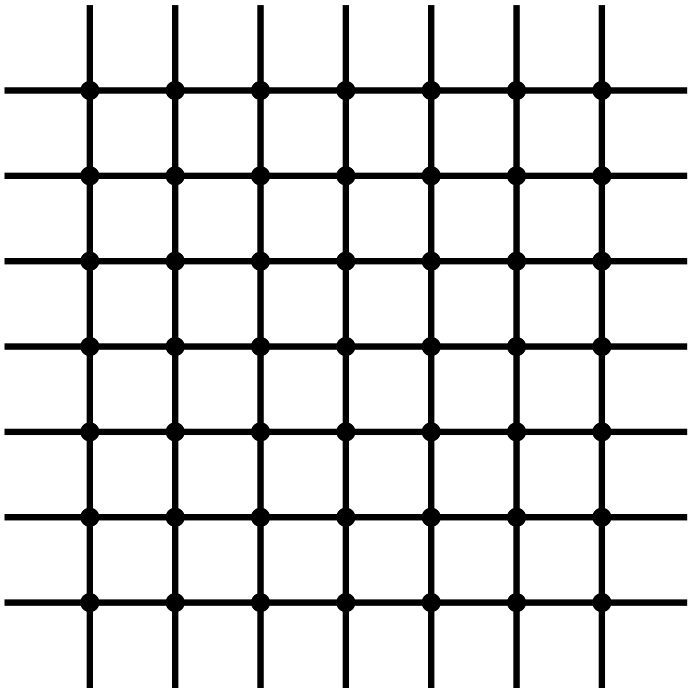
Philippe Nadeau

Faculté de Mathématiques, Université de Vienne

Journées ALEA 2010

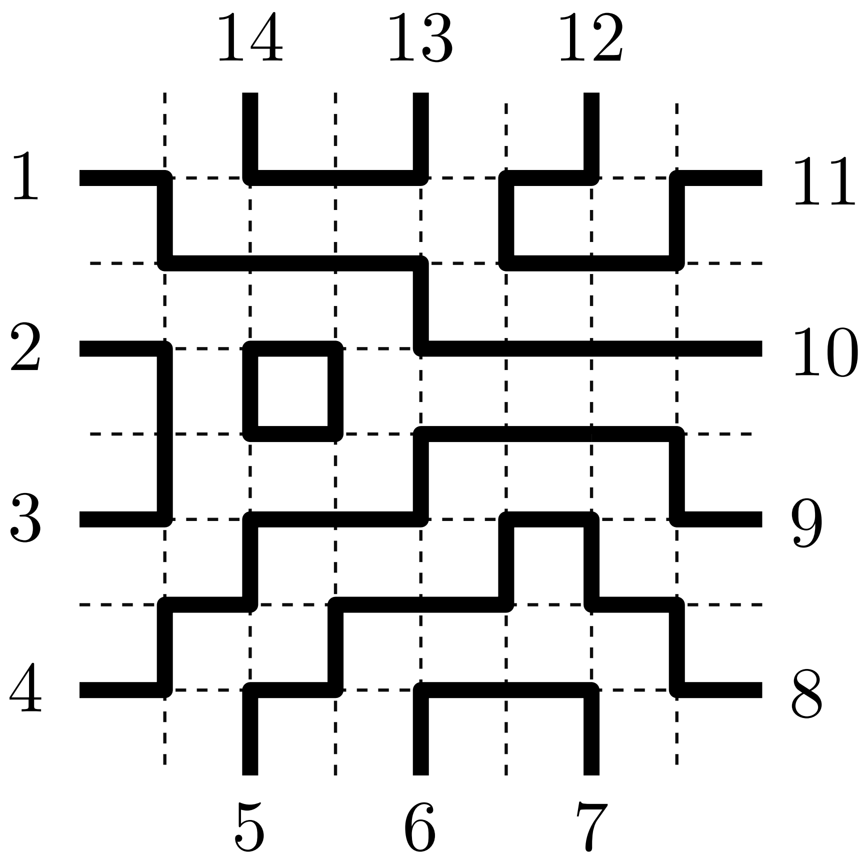
Configurations FPL : Définition

On considère la grille carrée G_n avec n^2 sommets et $4n$ arêtes externes.



Configurations FPL : Définition

On considère la grille carrée G_n avec n^2 sommets et $4n$ arêtes externes.



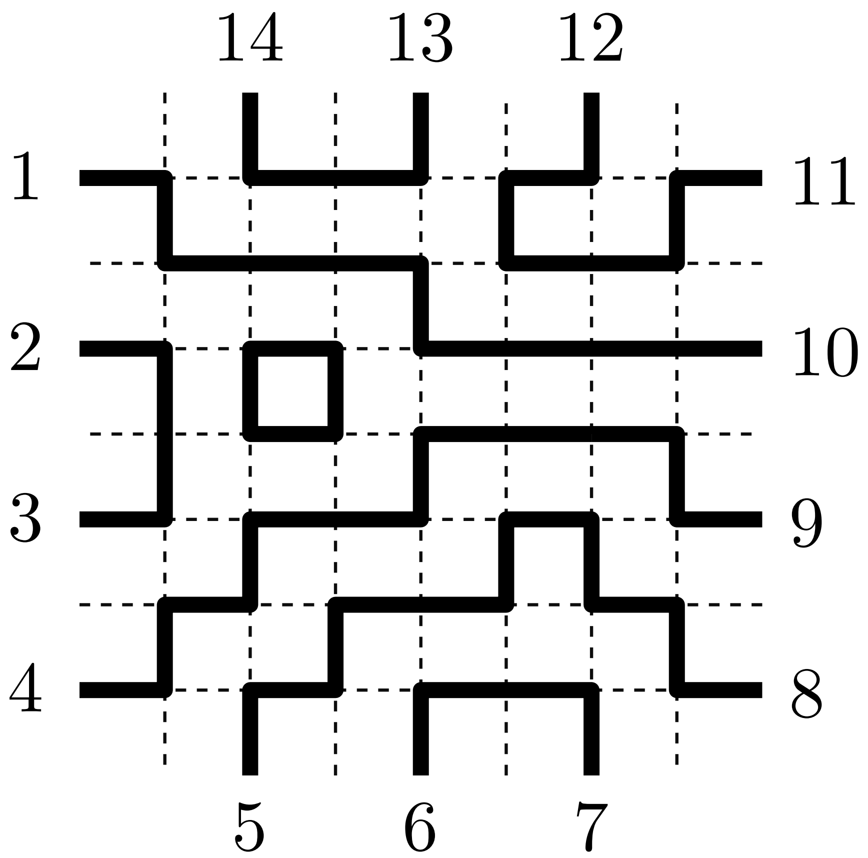
Une configuration FPL de taille n est un sous-graphe de la grille G_n

(1) comprenant 2 arêtes autour de chaque sommet de G_n (parmi 4 possibles) ("fully packed") ;

(2) comprenant alternativement une arête externe sur deux (boundary condition).

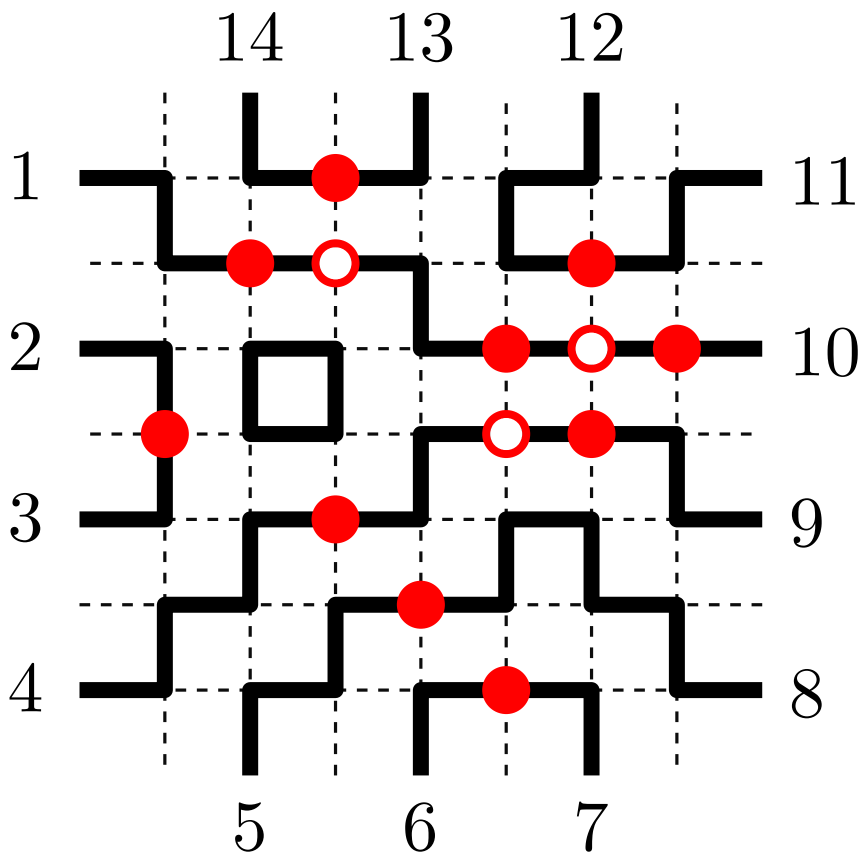
Configurations FPL : Énumération

Les configurations FPL sont en bijection avec de nombreux autres objets : matrices à signe alternant, matrices de hauteur, configurations du modèle à 6 sommets, triangles Gog, ...



Configurations FPL : Énumération

Les configurations FPL sont en bijection avec de nombreux autres objets : matrices à signe alternant, matrices de hauteur, configurations du modèle à 6 sommets, triangles Gog, ...



FPLs de taille n

$\updownarrow$ bijection

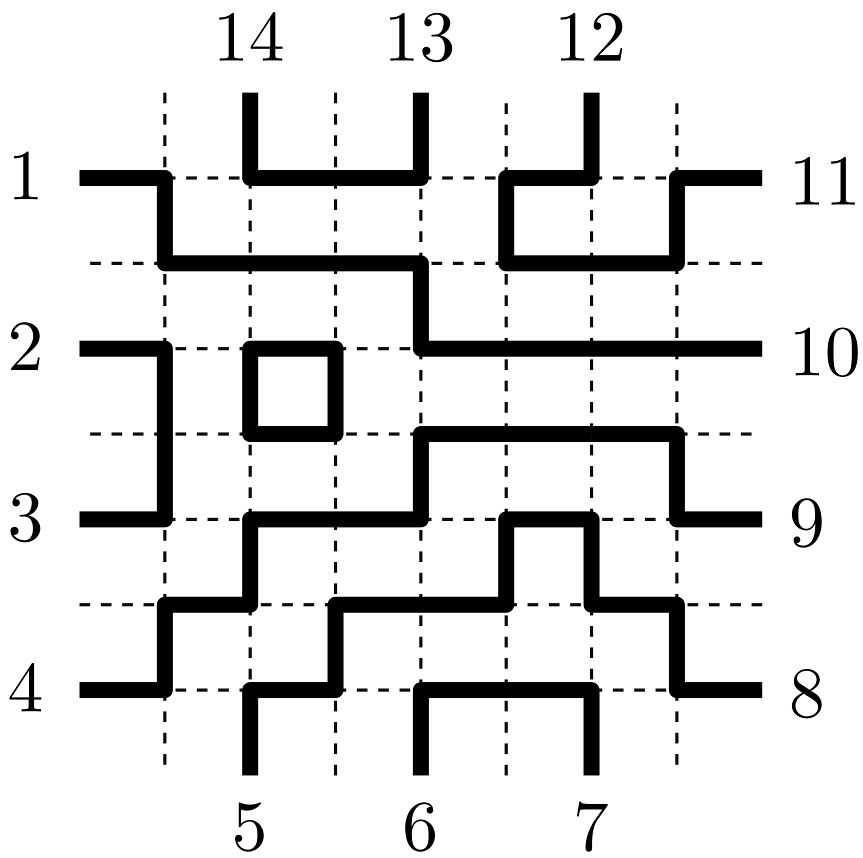
Matrices à signe alternant de taille n

[MSA $=$ matrice avec des coefficients dans $\{1, 0, -1\}$ telle que sur chaque ligne et chaque colonne, les coefficients non nuls ont des signes qui alternent et leur somme vaut 1.]

Ici $1 \longrightarrow$ ● et -1 $\longrightarrow$ ○

Configurations FPL : Énumération

Les configurations FPL sont en bijection avec de nombreux autres objets : matrices à signe alternant, matrices de hauteur, configurations du modèle à 6 sommets, triangles Gog, ...



FPLs de taille n

$\updownarrow$ bijection

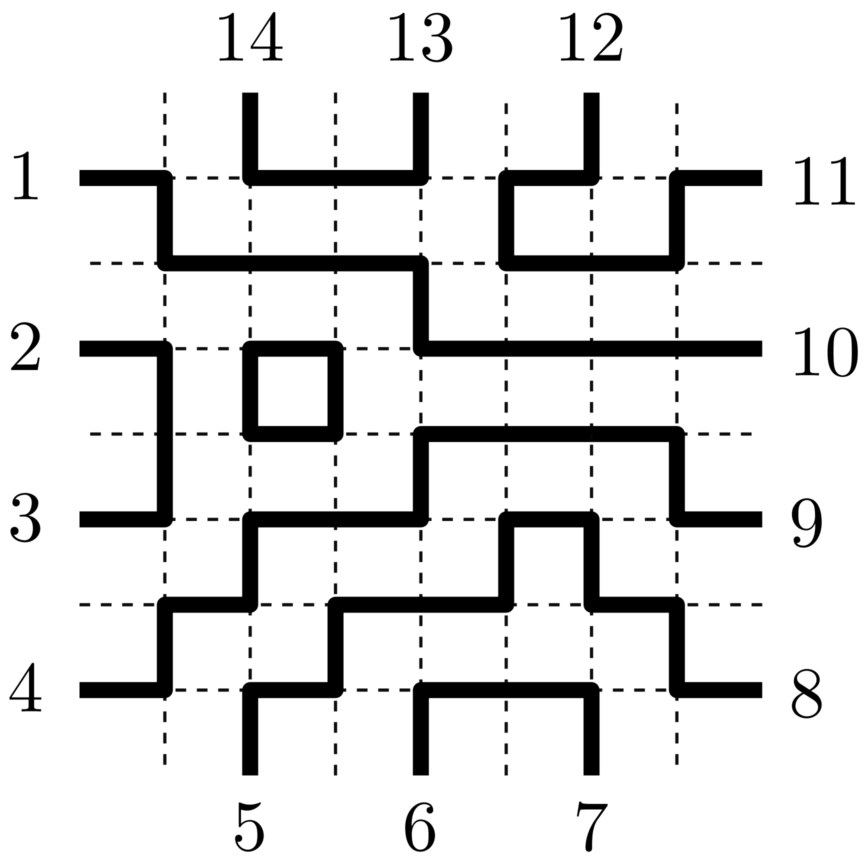
Matrices à signe alternant de taille n

$$|FPL_n| = A_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$$

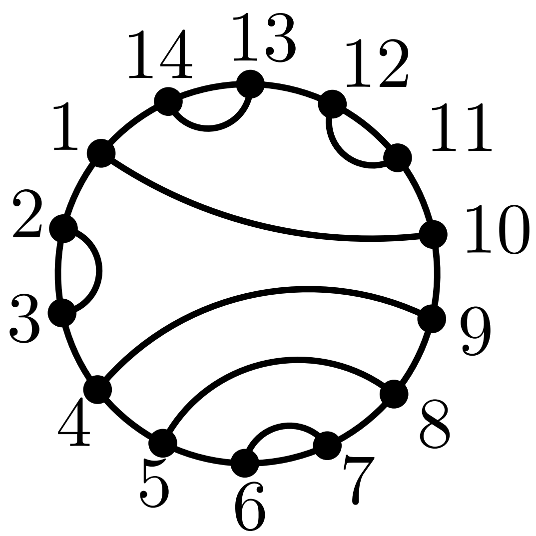
[Zeilberger '96, Kuperberg '96]

Configurations FPL : Énumération

Toute configuration FPL détermine un couplage non croisé des arêtes externes choisies de G_n.



Couplage non croisé $=$ n cordes qui ne se coupent pas entre $2n$ points fixés sur un cercle

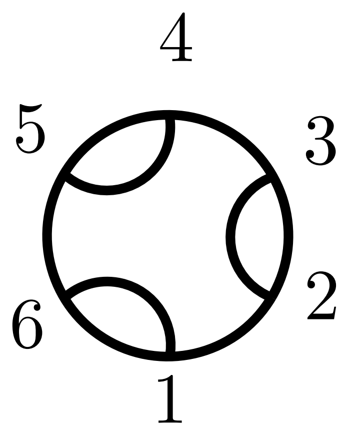


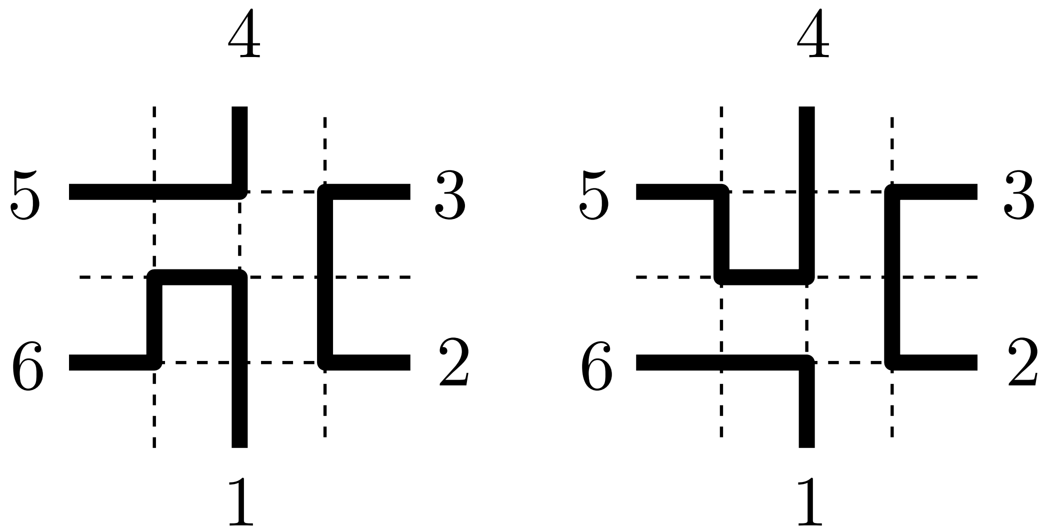
$$|LP_n| = C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Configurations FPL : Énumération

Question principale : étant donné X un couplage non croisé, combien de configurations FPL donnent lieu à X ?

Définition On note A_X le nombre de configurations FPL qui donnent lieu à X.

Si $X =$ 

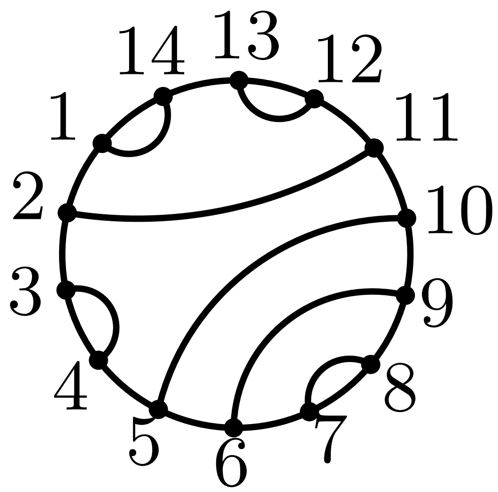


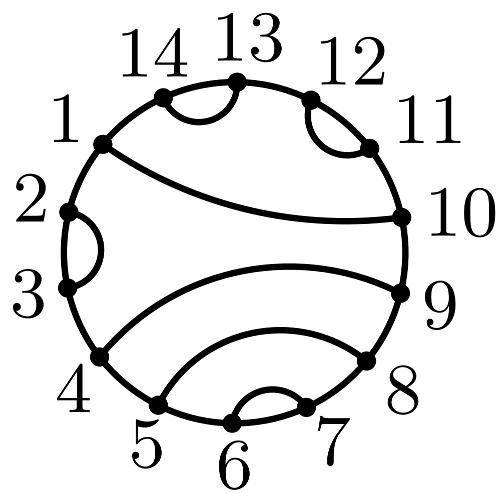
Pour ce couplage on a $A_X = 2$.

Configurations FPL : Énumération

Étant donné $X \in LP_n$, définissons un couplage X' par :

$$(i, j) \in X' \Leftrightarrow (i-1, j-1) \in X$$

X' 

X 

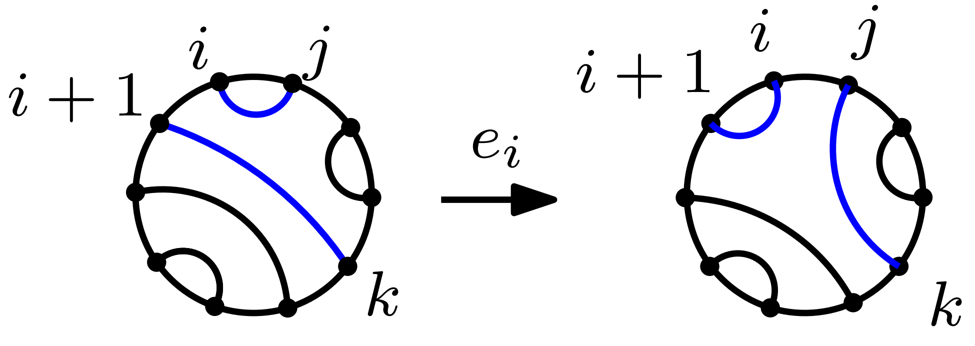
Theorem [Wieland '00]

$$A_X = A_{X'}$$

Cela signifie que "faire tourner un couplage" ne modifie pas le nombre de configurations FPL.

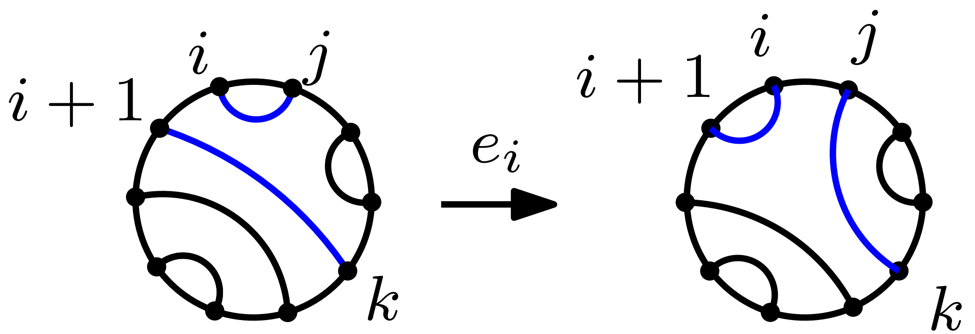
Conjecture de Razumov-Stroganov.

Définition : On définit les opérateurs e_i sur les couplages non croisés par $\{i,j\},\{i+1,k\} \in X \to \{i,i+1\},\{j,k\} \in e_i(X)$ pour $i = 1 \ldots 2n$.



Conjecture de Razumov-Stroganov.

Définition : On définit les opérateurs e_i sur les couplages non croisés par $\{i,j\},\{i+1,k\} \in X \to \{i,i+1\},\{j,k\} \in e_i(X)$ pour $i = 1 \dots 2n$.



Chaîne de Markov $\mathcal{M}_n$

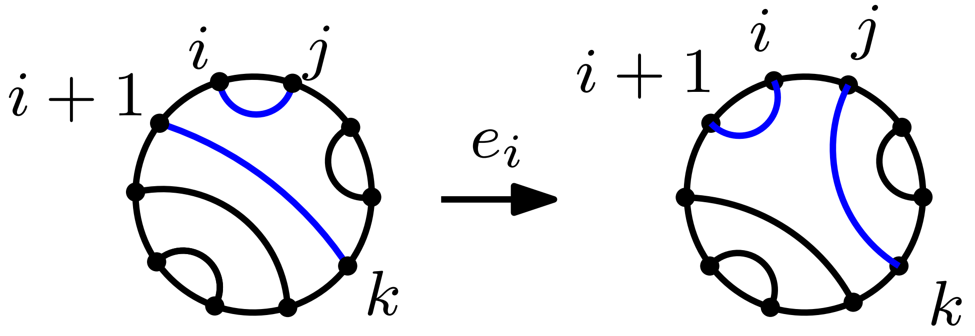
• États $= LP_n$, i.e. les couplages non croisés de n cordes.

• Probabilités de transition : $P(X \to Y) = \frac{k}{2n}$, avec $k =$ le nombre d'indices $i \in \{1, \dots, 2n\}$ tels que $e_i(X) = Y$.

$\mathcal{M}_n$ possède une unique distribution stationnaire $(\psi_X)_{X \in LP_n}$.

Conjecture de Razumov-Stroganov.

Définition : On définit les opérateurs e_i sur les couplages non croisés par $\{i,j\},\{i+1,k\} \in X \to \{i,i+1\},\{j,k\} \in e_i(X)$ pour $i = 1 \ldots 2n$.



Chaîne de Markov $\mathcal{M}_n$

- États $= LP_n$, i.e. les couplages non croisés de n cordes.
- Probabilités de transition : $P(X \to Y) = \frac{k}{2n}$, avec $k =$ le nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ tels que $e_i(X) = Y$.

$\mathcal{M}_n$ possède une unique distribution stationnaire $(\psi_X)_{X \in LP_n}$.

Conjecture RS : $\psi_X = \dfrac{A_X}{A_n}$

Conjecture de Razumov-Stroganov.

Remarque : Les probabilités ψ_X sont en fait déterminées comme unique solution d'une équation matricielle. On en déduit que la conjecture RS est équivalente à l'égalité suivante :

$$\forall X \in LP_n, \quad 2nA_X = \sum_{(i,Y),e_i(Y)=X} A_Y$$

Conjecture de Razumov-Stroganov.

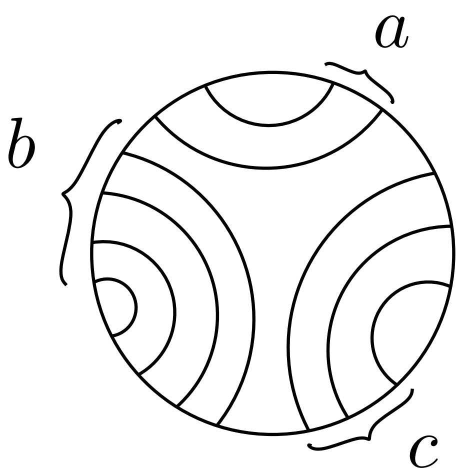
Remarque : Les probabilités ψ_X sont en fait déterminées comme unique solution d'une équation matricielle. On en déduit que la conjecture RS est équivalente à l'égalité suivante :

$$\forall X \in LP_n, \quad 2nA_X = \sum_{(i,Y),e_i(Y)=X} A_Y$$

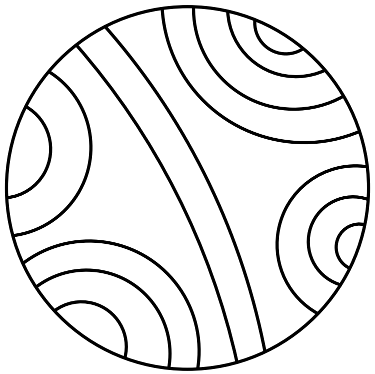
Des expressions intégrales ont été obtenues par Di Francesco et Zinn-Justin pour les nombres ψ_X.
En comparaison, peu de résultats énumératifs ont été démontrés pour les nombres A_X.

Update : la conjecture RS est semble-t-il devenu un théorème de Cantini-Sportiello ; ainsi les intégrales mentionnées comptent de fait les A_X.

Les nombres A_X calculés correspondent aux couplages :



$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$



= Formules compliquées impliquant des déterminants...

On va dans cet exposé montrer une approche possible pour le calcul des nombre A_X, et certains résultats partiels dans cette direction faisant intervenir des configurations dans un triangle.

Plan de l'exposé

(1) De la grille carrée au triangle
Nous rappelons une expression de A_X en termes de configurations FPL dans un certain triangle, basée sur les *couplages avec des arches emboîtées*.

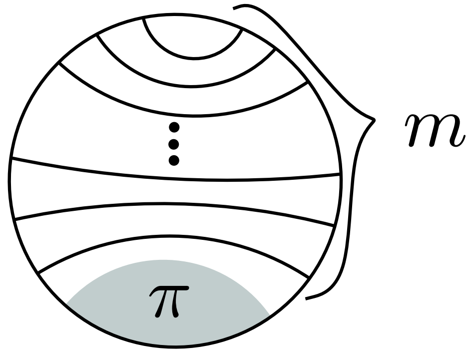
(2) Configurations FPL dans un triangle
Formules et relations pour les configurations FPL dans le triangle.

(3) Configurations extrémales et coefficients de Littlewood Richardson
Nous prouvons que certaines configurations sont énumérées par les célèbres coefficients de Littlewood Richardson.

(1) De la grille carrée au triangle

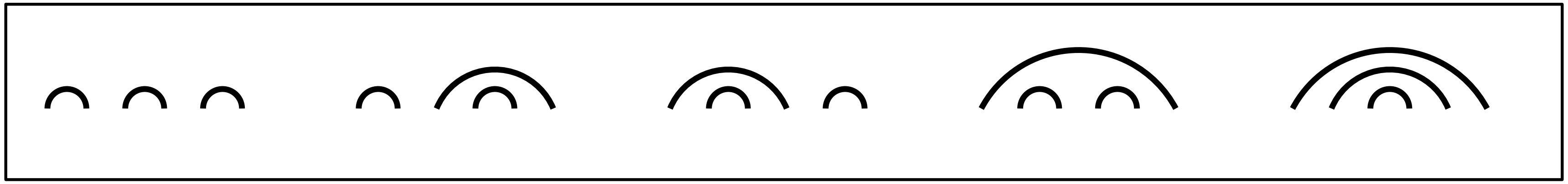
Couplages avec des arches emboîtées

On considère des entiers $n, m \geq 0$, et les couplages X avec m arches emboîtées et π un couplage avec n arches.



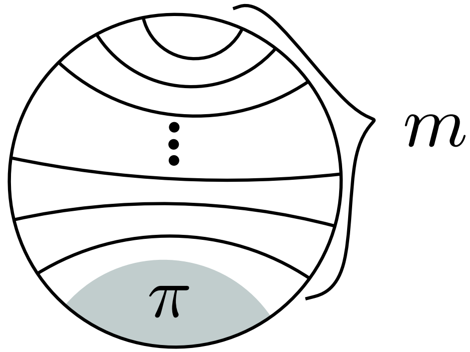
$X = \pi \cup m$

Par exemple pour $n = 3$, il y a 5 π possibles :



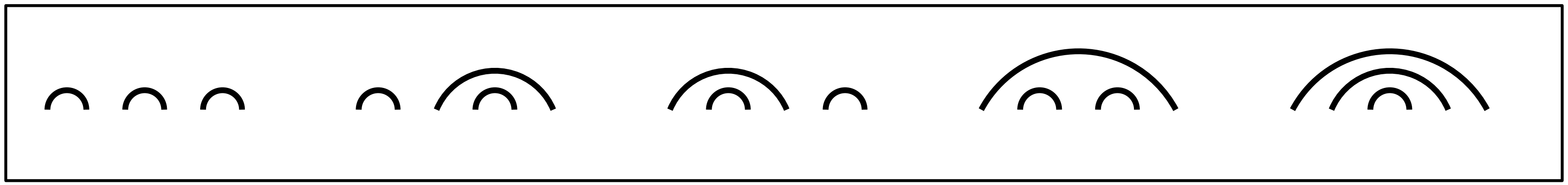
Couplages avec des arches emboîtées

On considère des entiers $n, m \geq 0$, et les couplages X avec m arches emboîtées et π un couplage avec n arches.



$X = \pi \cup m$

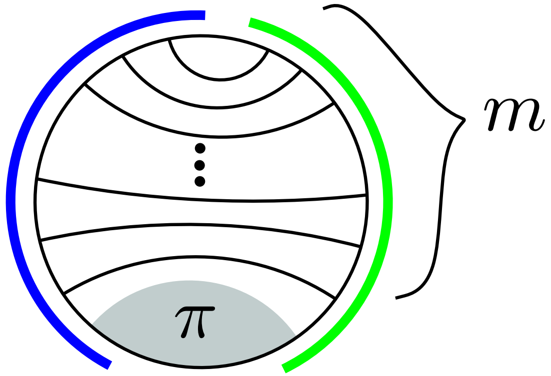
Par exemple pour $n = 3$, il y a 5 π possibles :

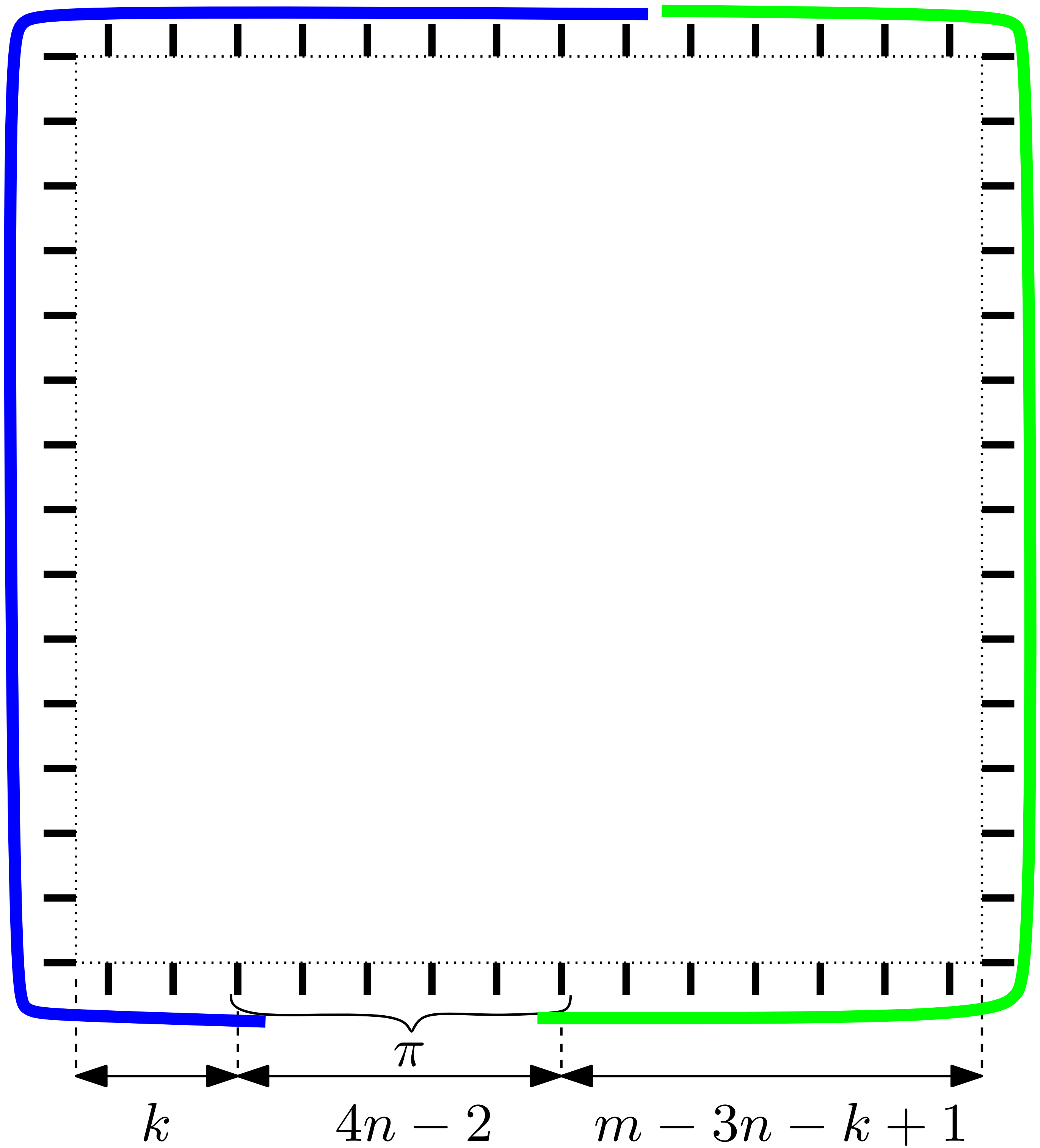


Notation On écrira $A_\pi(m)$ pour $A_{\pi \cup m}$.

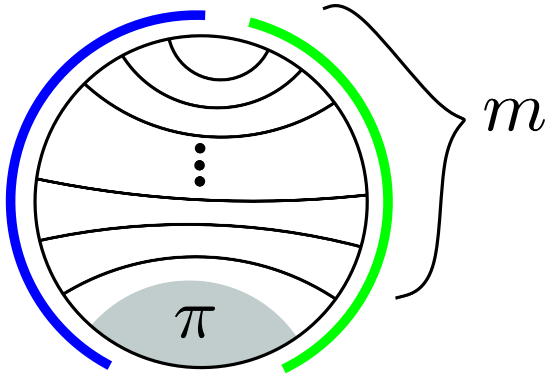
Idée : On donne une formule pour $A_\pi(m)$ basée sur une décomposition combinatoire valable pour m assez grand. Miracle : la formule sera valide pour tout $m \geq 0$.

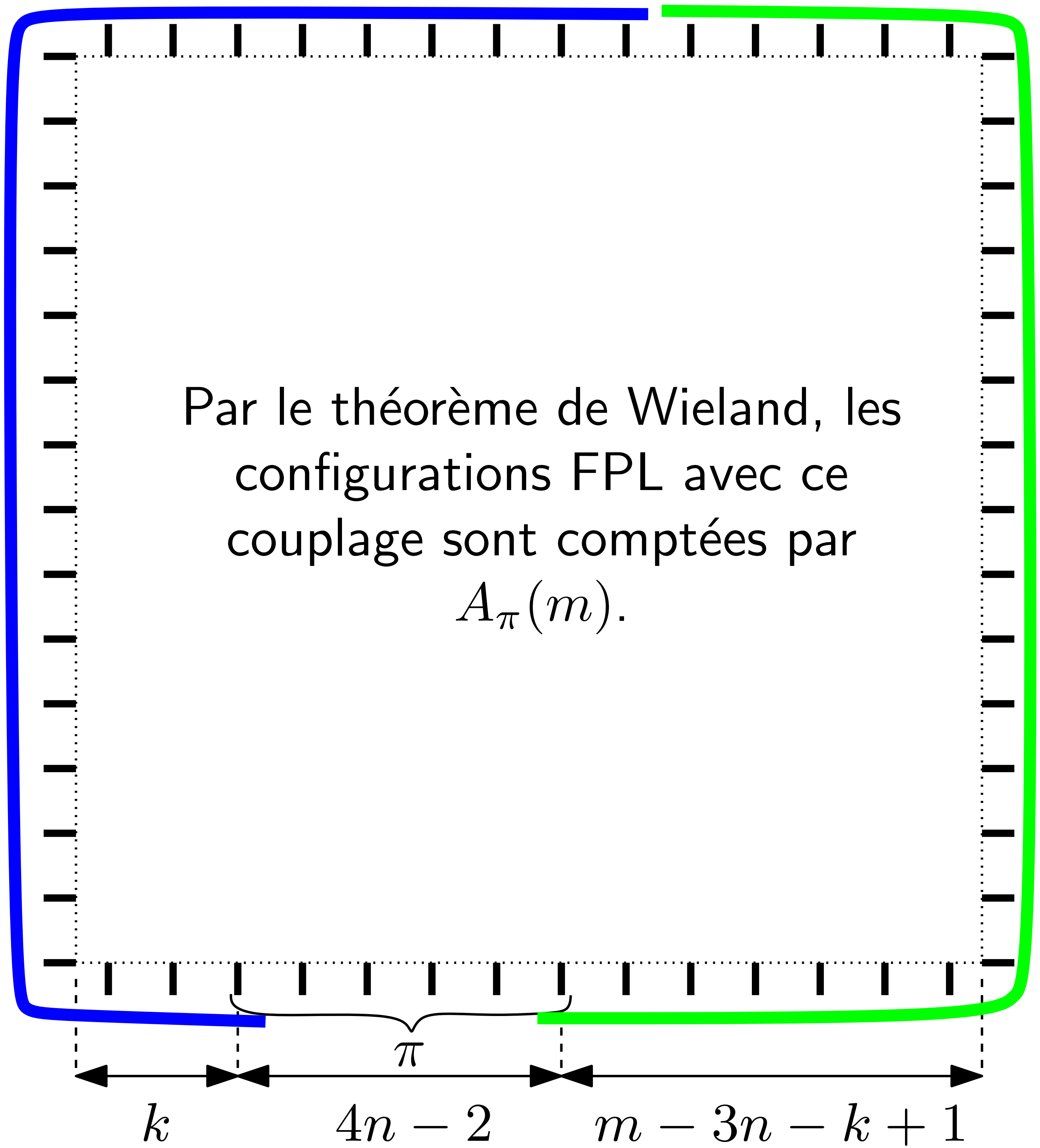
On suppose $m \geq 3n-1$, et on choisit k tel que $0 \leq k \leq m-(3n-1)$.



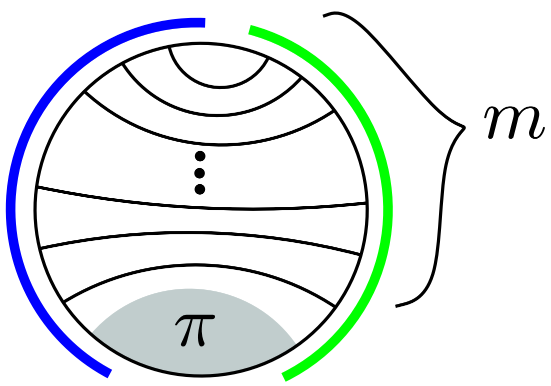


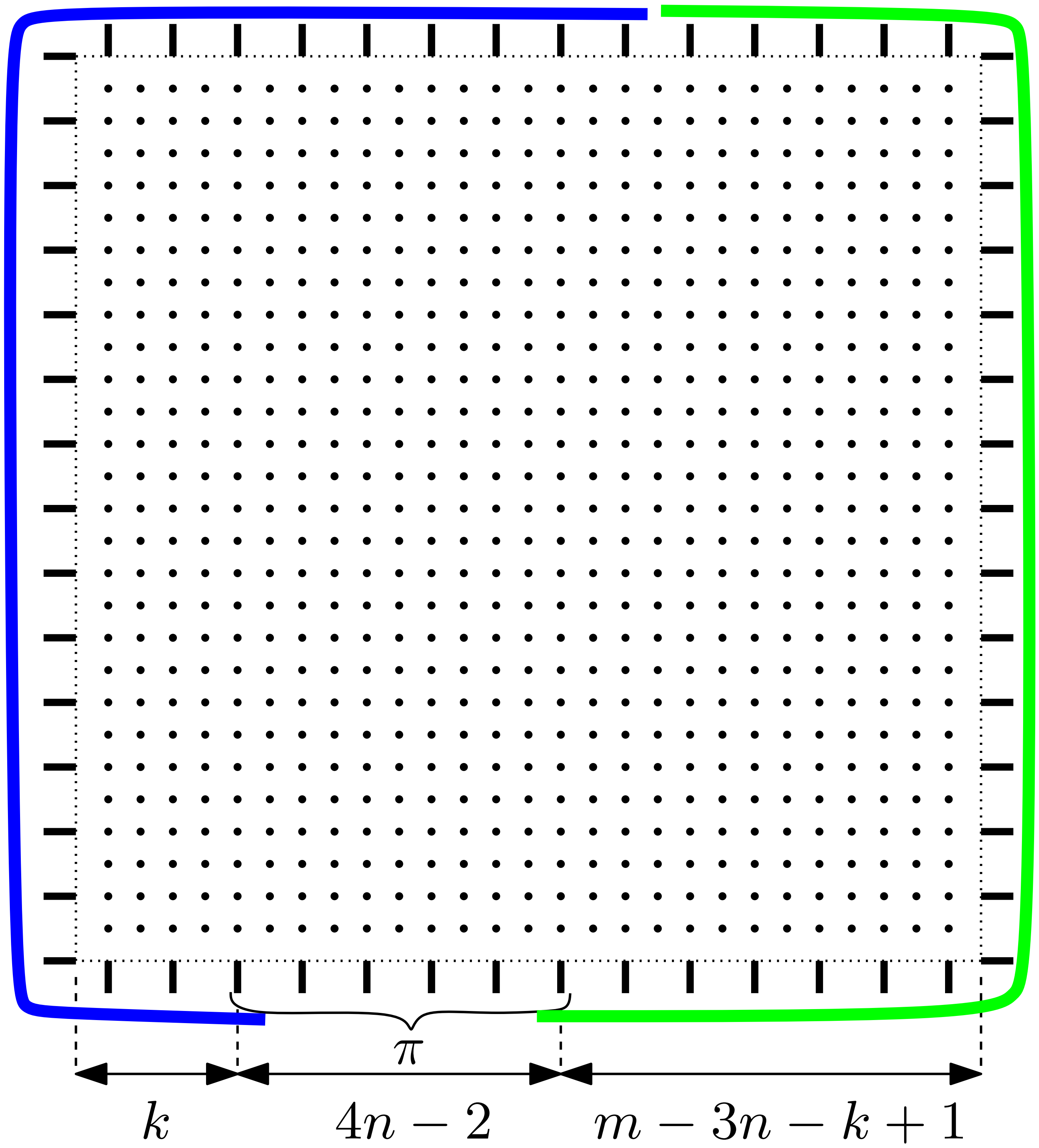
On suppose $m \geq 3n-1$, et on choisit k tel que $0 \leq k \leq m-(3n-1)$.



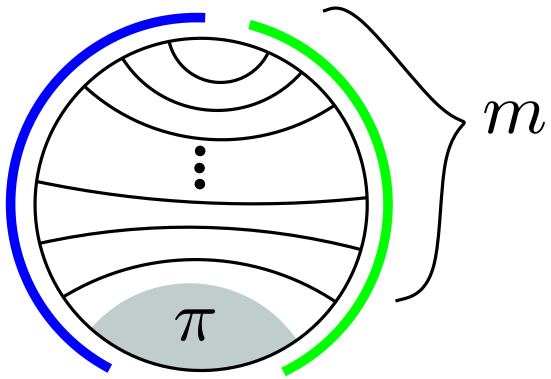


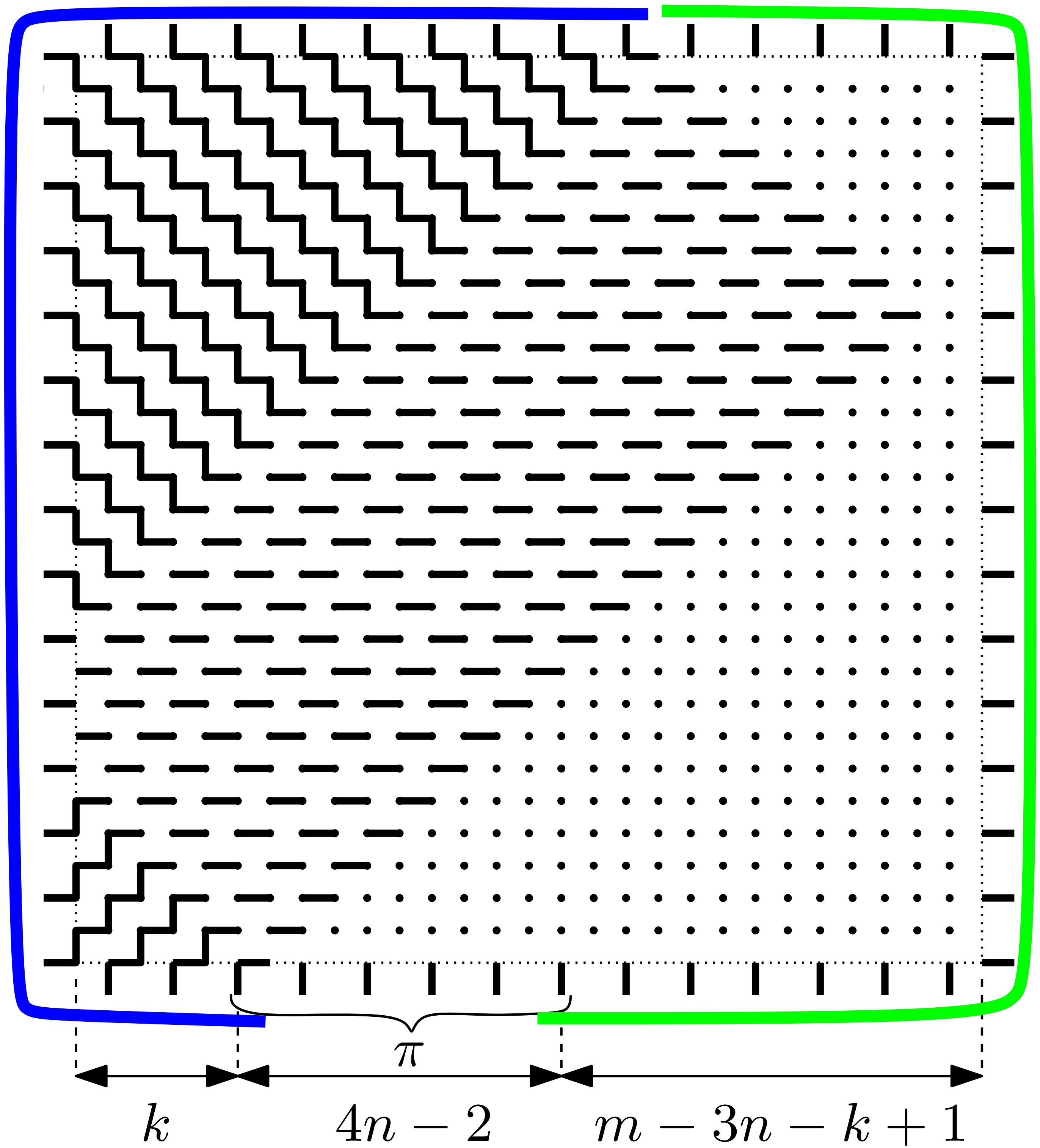
Arêtes fixées : ce sont les arêtes qui appartiennent à toutes les configurations respectant le couplage.



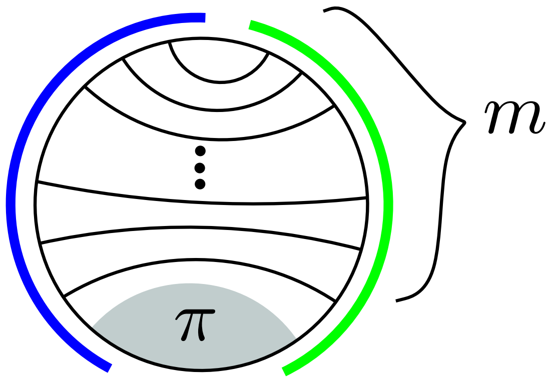


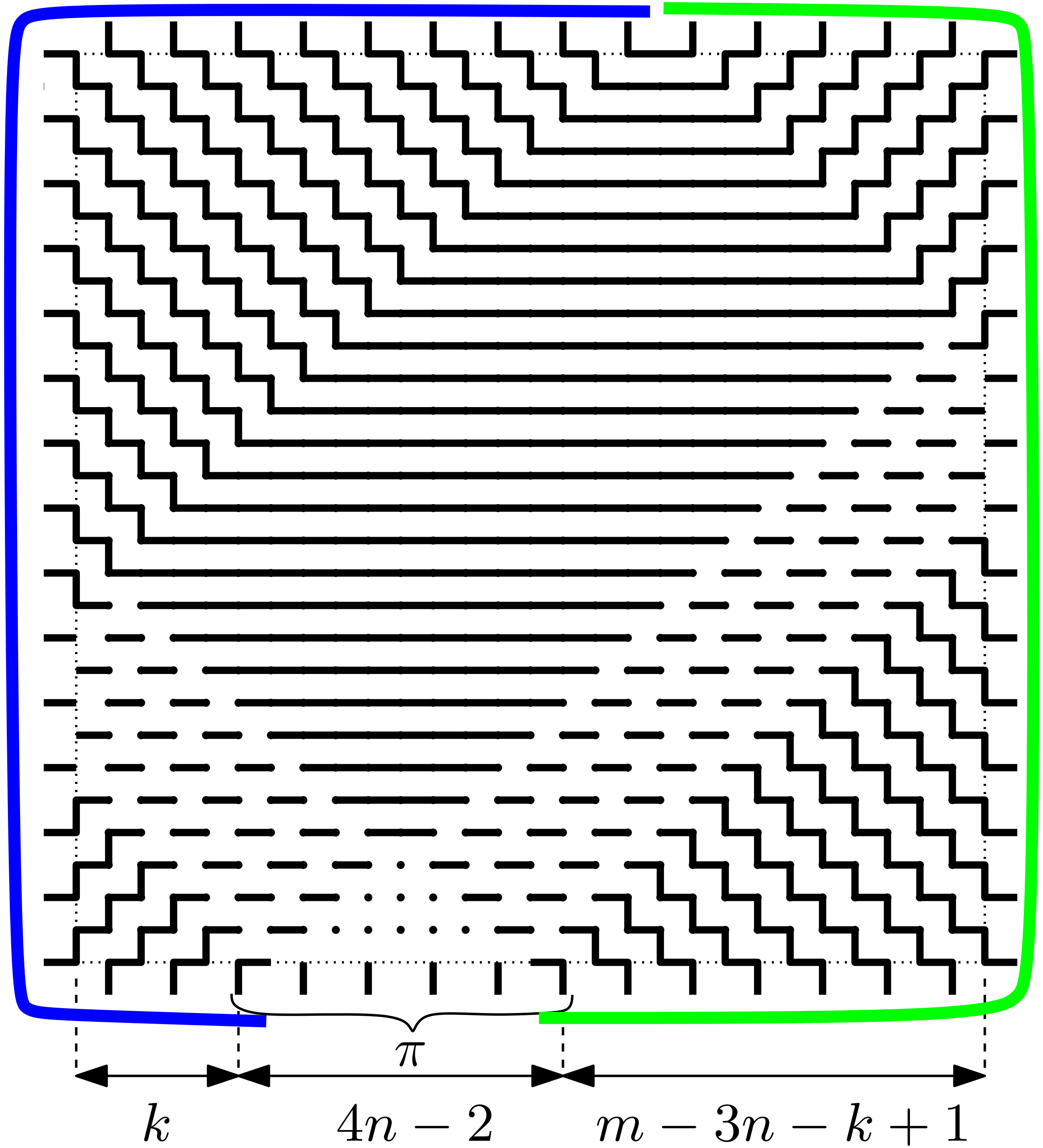
Arêtes fixées : ce sont les arêtes qui appartiennent à toutes les configurations respectant le couplage.



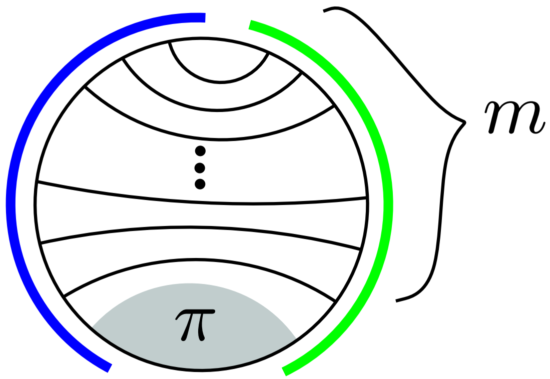


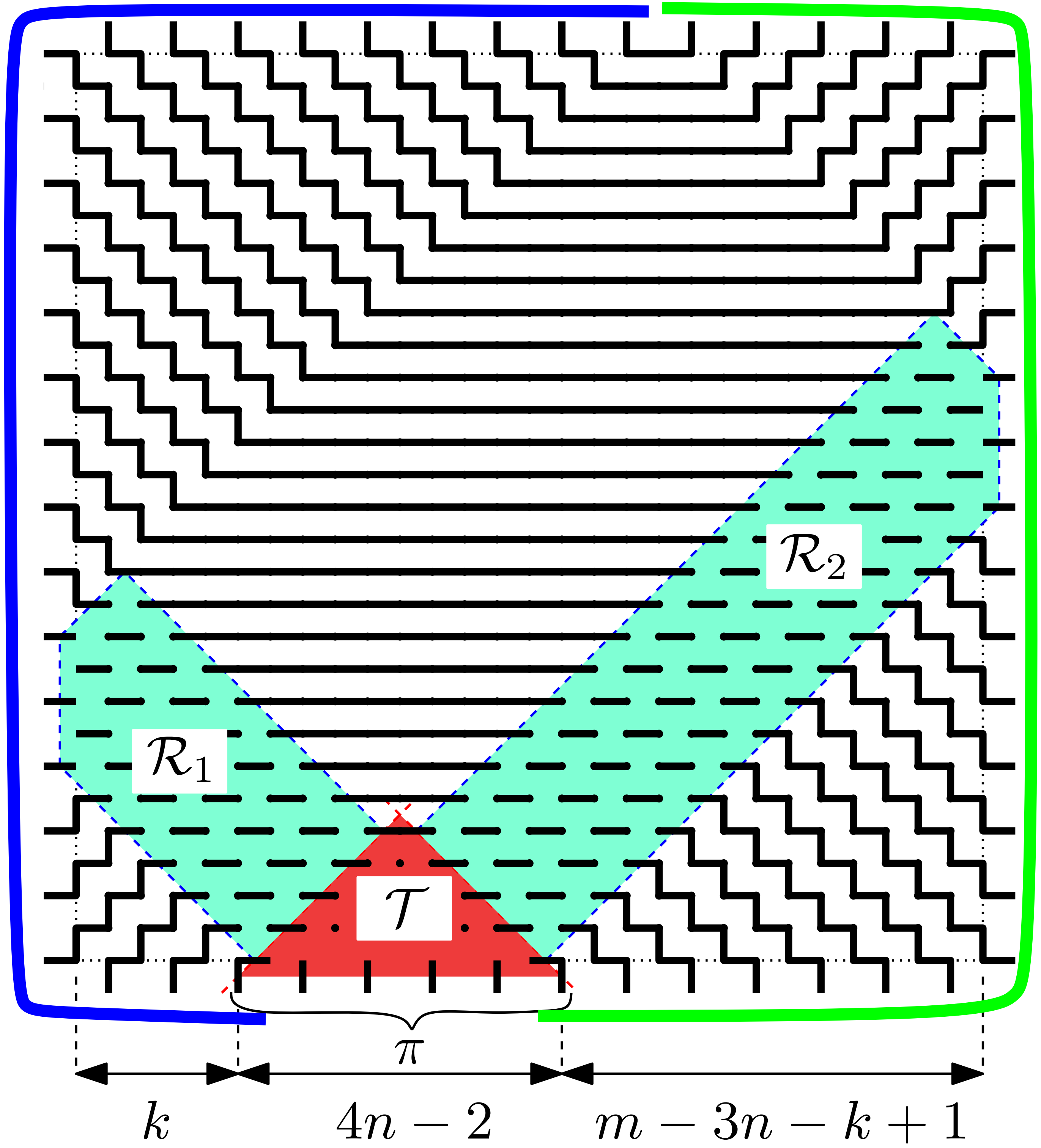
Arêtes fixées : ce sont les arêtes qui appartiennent à toutes les configurations respectant le couplage.





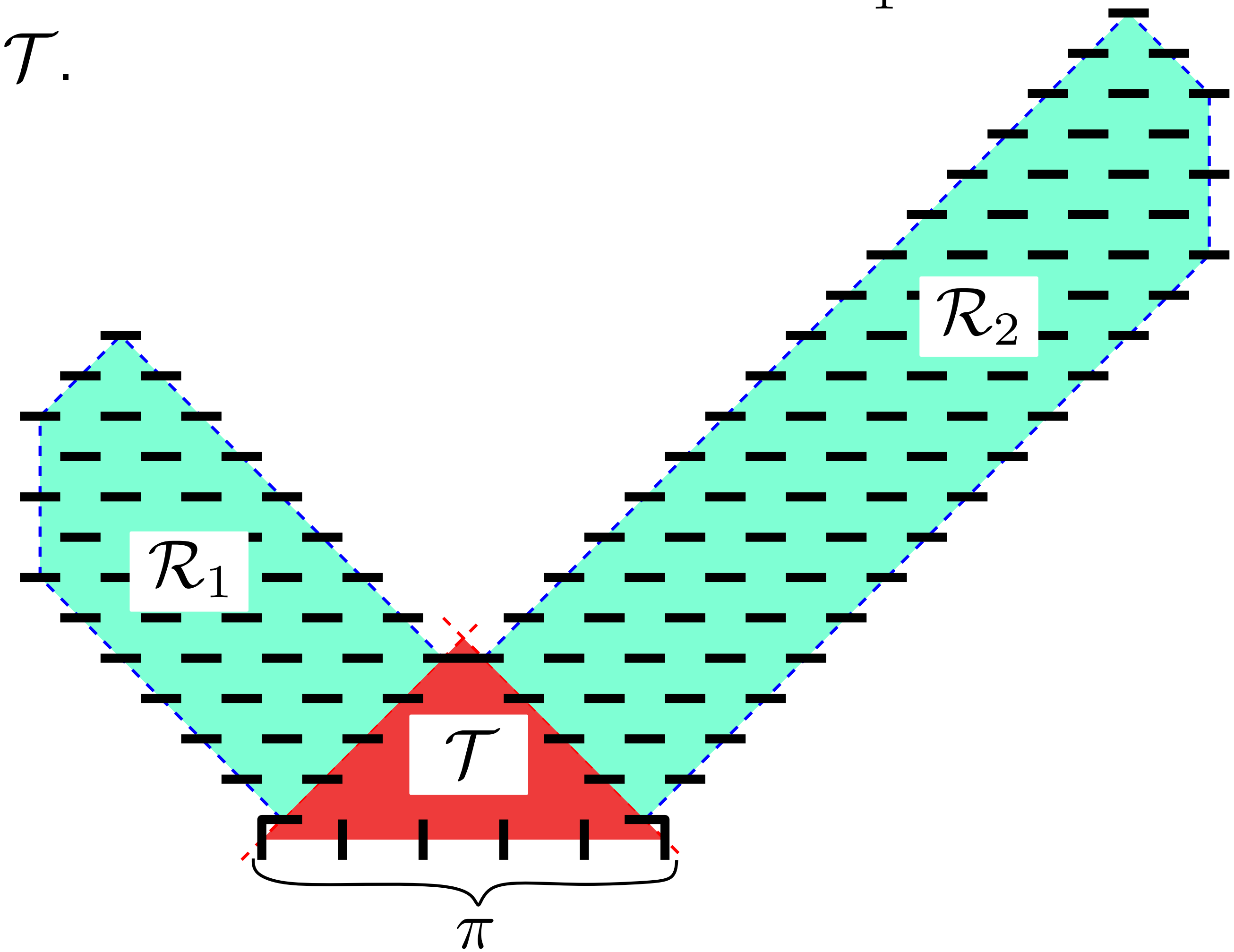
Arêtes fixées : ce sont les arêtes qui appartiennent à toutes les configurations respectant le couplage.





L'énumération de $\mathcal{A}_\pi(m)$ se ramène donc à compter les configurations dans les régions $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{T}$.

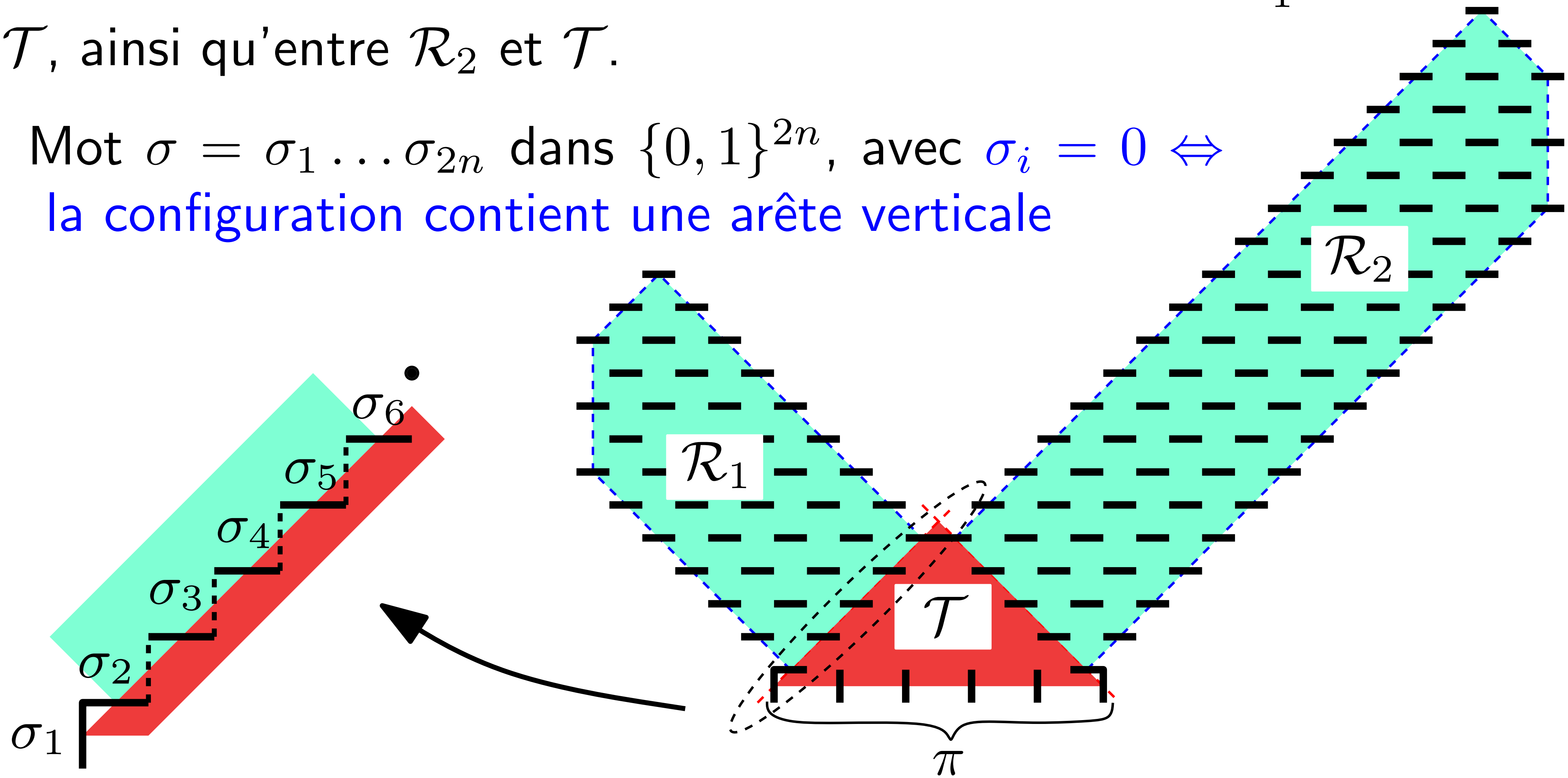
Pour cela il faut d'abord encoder les frontières entre $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{T}$, ainsi qu'entre $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{T}$.



L'énumération de $\mathcal{A}_\pi(m)$ se ramène donc à compter les configurations dans les régions $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{T}$.

Pour cela il faut d'abord encoder les frontières entre $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{T}$, ainsi qu'entre $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{T}$.

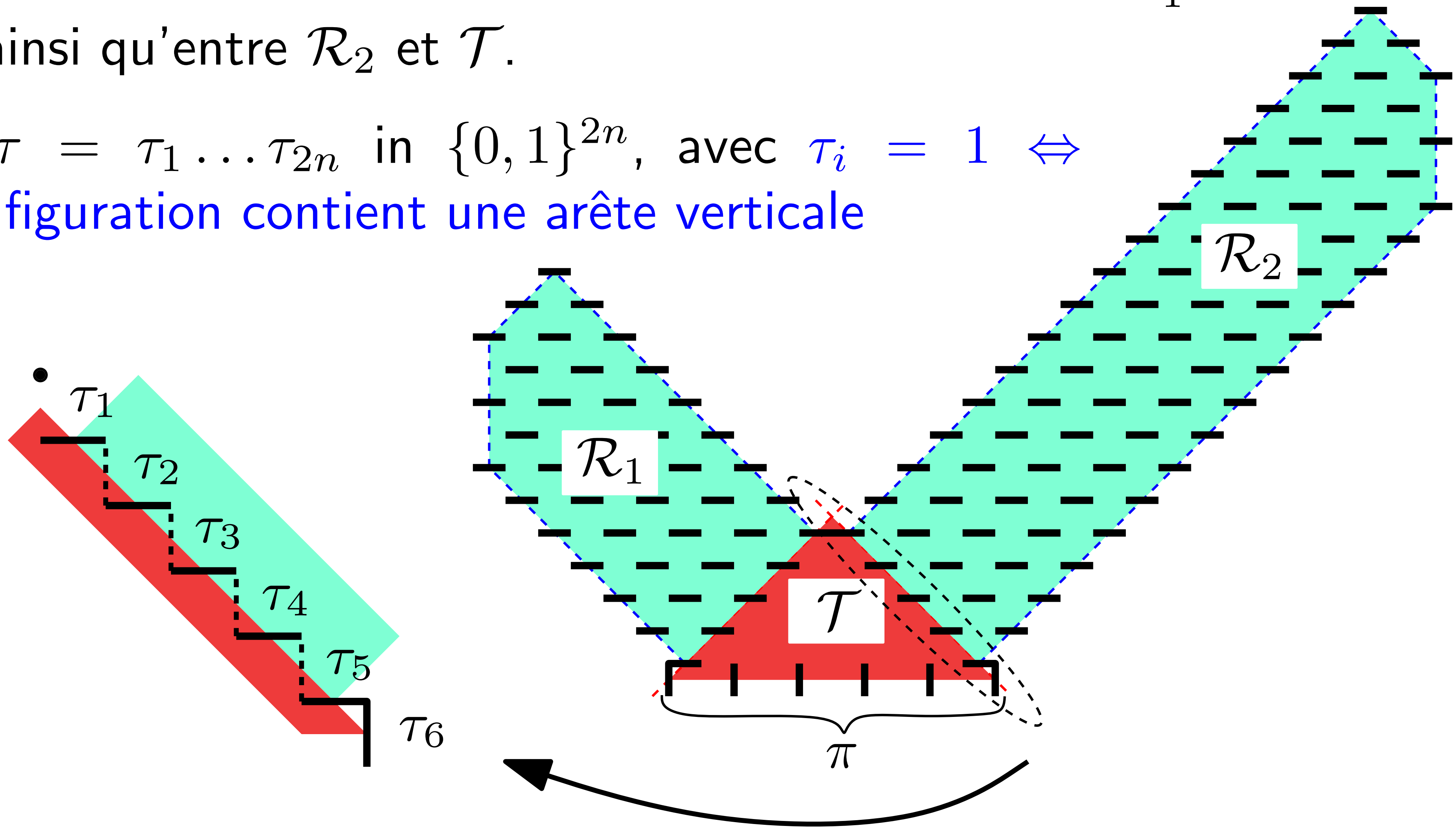
Mot $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_{2n}$ dans $\{0,1\}^{2n}$, avec $\sigma_i = 0 \Leftrightarrow$ la configuration contient une arête verticale



L'énumération de $\mathcal{A}_\pi(m)$ se ramène donc à compter les configurations dans les régions $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{T}$.

Pour cela il faut d'abord encoder les frontières entre $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{T}$, ainsi qu'entre $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{T}$.

Mot $\tau = \tau_1 \ldots \tau_{2n}$ in $\{0,1\}^{2n}$, avec $\tau_i = 1 \Leftrightarrow$ la configuration contient une arête verticale



On peut donc écrire, pour $m \geq 3n-1$ et $0 \leq k \leq m-(3n-1)$

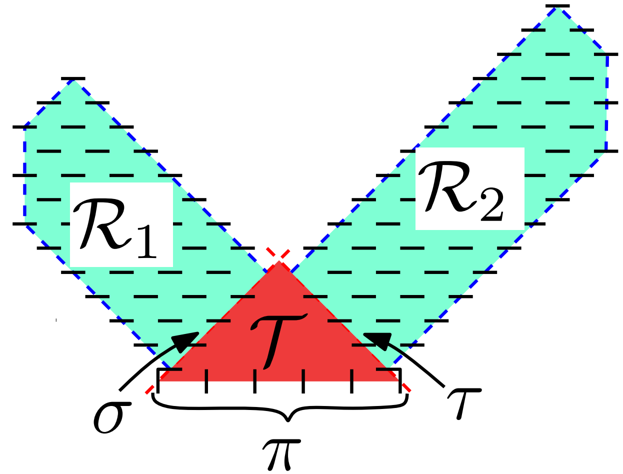
$$A_\pi(m) = \sum_{\sigma,\tau} |\mathcal{R}_1(\sigma,k)| \times t^\pi_{\sigma,\tau} \times |\mathcal{R}_2(\tau, m-3n-k+1)|$$

avec

• σ, τ sont des mots avec $2n$ lettres dans $\{0,1\}$;

• $\mathcal{R}_1(\sigma,.), \mathcal{R}_2(\tau,.)$ sont les configurations FPL dans les régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, avec les frontières encodées par σ, τ respectivement ;

• $t^\pi_{\sigma,\tau}$ est le nombre de configurations FPL dans le triangle $\mathcal{T}$ avec frontières encodées par $\{\sigma, \pi, \tau\}$.

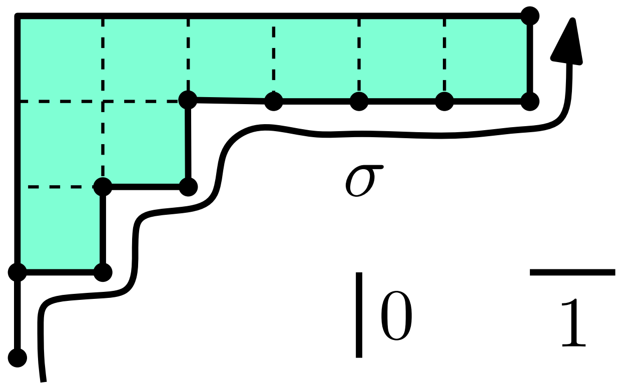


Mots et Diagrammes

Soit $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p$ un mot dans $\{0,1\}^p$.

Mots $=$ diagrammes de Ferrers dans une boîte.

$\sigma = 0101011110$



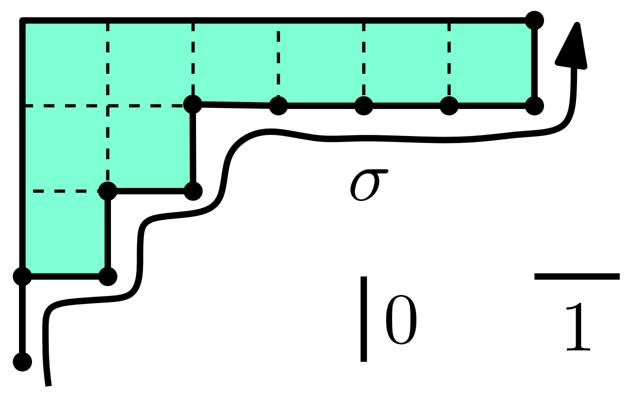
$$|\sigma| = 10, |\sigma|_0 = 4, |\sigma|_1 = 6$$

Mots et Diagrammes

Soit $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p$ un mot dans $\{0,1\}^p$.

Mots $=$ diagrammes de Ferrers dans une boîte.

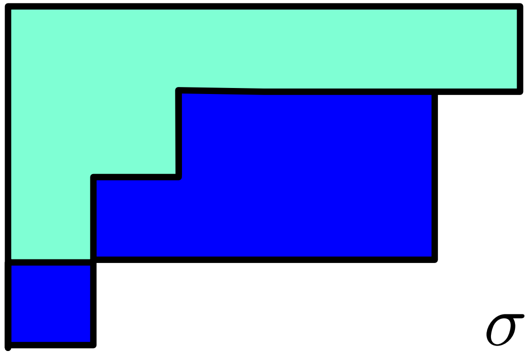
$$\sigma = 0101011110$$



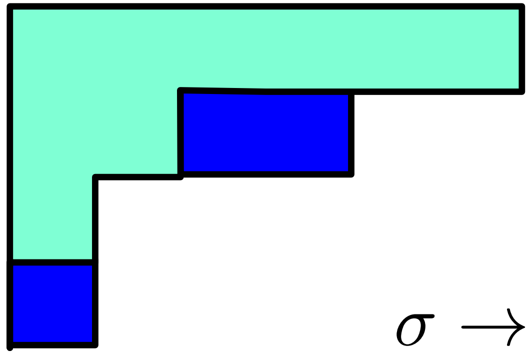
$$|\sigma| = 10, |\sigma|_0 = 4, |\sigma|_1 = 6$$

$d(\sigma)$:= nombre de cases dans le diagramme de σ. $\quad d(\sigma) = 9$

$\sigma^* := (1-\sigma_p)\cdots(1-\sigma_2)(1-\sigma_1) \quad \sigma^* = 1000010101$

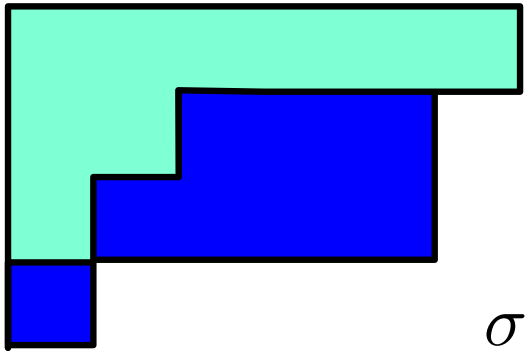


$\sigma \leq \sigma'$

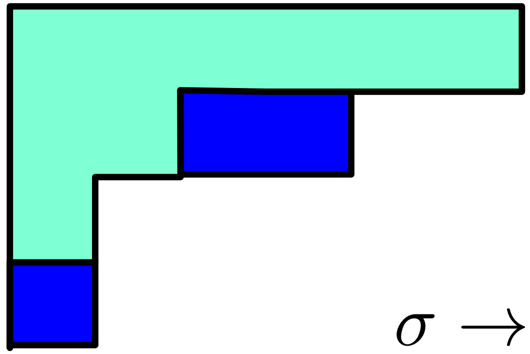


$\sigma \to \sigma'$

Au plus une case par colonne



$\sigma \leq \sigma'$



$\sigma \to \sigma'$

Au plus une case par colonne

> Un tableau semi standard de forme σ à valeurs dans $1, \ldots, N$ est un diagramme σ dont les case sont remplies par des entiers entre 1 et N, de sorte que ces entiers croissent au sens large dans les lignes et au sens strict dans les colonnes.

Le nombre de ces tableaux est donné par $SSYT(\sigma, N)$, où $SSYT(\sigma, X)$ est un polynôme de terme dominant $\frac{1}{H(\sigma)} X^{d(\sigma)}$.

$(H(\sigma)$ est le produit des *longueurs d'équerre* de la forme σ.)

Régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$

Proposition [Caselli,Krattenthaler,Lass,N. '05]

Soit σ tel que $|\sigma| = 2n$, et $k \geq 0$. Il existe une bijection explicite entre $\mathcal{R}_1(\sigma, k)$ et les tableaux semistandards de forme σ avec valeurs bornées par $n + k$.

Régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$

Proposition [Caselli,Krattenthaler,Lass,N. '05]

Soit σ tel que $|\sigma| = 2n$, et $k \geq 0$. Il existe une bijection explicite entre $\mathcal{R}_1(\sigma, k)$ et les tableaux semistandards de forme σ avec valeurs bornées par $n + k$.

Pour $m \geq 3n - 1$ (et $k = 0$) on obtient :

$$A_\pi(m) = \sum_{\sigma,\tau} |\mathcal{R}_1(\sigma, 0)| \ \cdot \ t^\pi_{\sigma,\tau} \ \cdot \ |\mathcal{R}_2(\tau, m - 3n + 1)|$$

$$= \sum_{\sigma,\tau} SSYT(\sigma, n) \cdot t^\pi_{\sigma,\tau} \cdot SSYT(\tau^*, m - 2n + 1)$$

Régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$

Proposition [Caselli,Krattenthaler,Lass,N. '05]

> Soit σ tel que $|\sigma| = 2n$, et $k \geq 0$. Il existe une bijection explicite entre $\mathcal{R}_1(\sigma, k)$ et les tableaux semistandards de forme σ avec valeurs bornées par $n + k$.

Pour $m \geq 3n - 1$ (et $k = 0$) on obtient :

$$A_\pi(m) = \sum_{\sigma,\tau} |\mathcal{R}_1(\sigma, 0)| \ \cdot \ t^\pi_{\sigma,\tau} \ \cdot \ |\mathcal{R}_2(\tau, m - 3n + 1)|$$

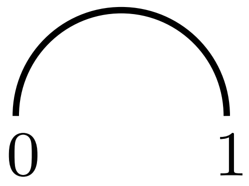
$$= \sum_{\sigma,\tau} SSYT(\sigma, n) \cdot t^\pi_{\sigma,\tau} \cdot SSYT(\tau^*, m - 2n + 1)$$

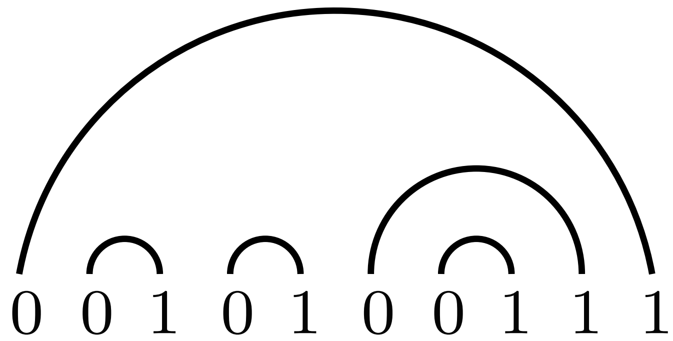
Théorème [CKLN '05]

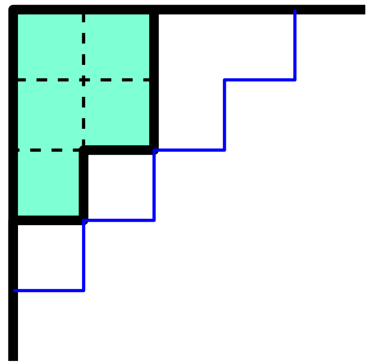
> $A_\pi(m)$ est un polynôme en m pour $m \geq 0$.

Quelques dernières définitions

Étant donné π avec n arches, on peut également lui associer un mot , et donc un diagramme :

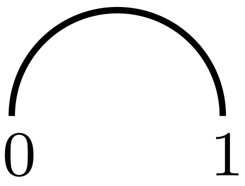


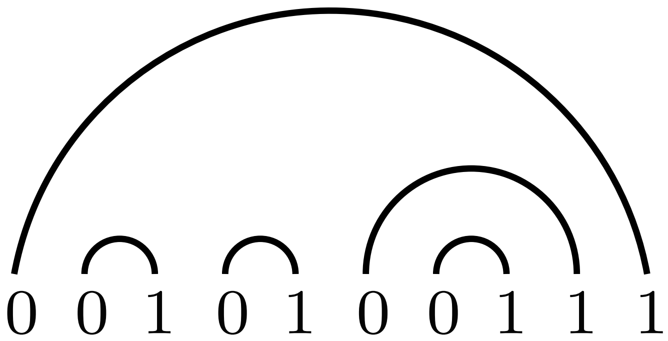


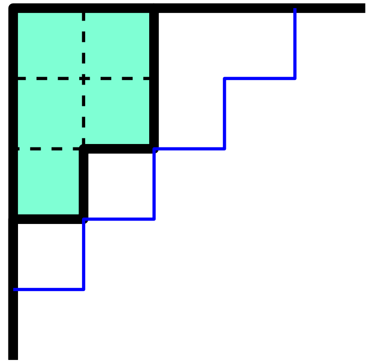


Quelques dernières définitions

Étant donné π avec n arches, on peut également lui associer un mot , et donc un diagramme :







On obtient ainsi les fameux mots de Dyck $\mathcal{D}_n$:

Definition On note $\mathcal{D}_n$ les mots w sur $\{0,1\}$ tels que $|w|_0 = |w|_1 = n$ et $|u|_0 \geq |u|_1$ pour tout préfixe de w.

Si on note $\mathbf{0}_n := 0^n 1^n$ et $\mathbf{1}_n := (01)^n$, alors $(\mathcal{D}_n, \leq)$ forme un ensemble partiellement ordonné avec minimum $\mathbf{0}_n$ et maximum $\mathbf{1}_n$.

Théorème [CKLN '04]

Pour tous σ, τ, π,

$$t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0 \Rightarrow \sigma \leq \pi.$$

De plus $t^{\pi}_{\pi,\mathbf{0}_n} = 1$ et $t^{\pi}_{\pi\tau} = 0$ si $\tau \neq \mathbf{0}_n$.

Théorème [CKLN '04]

Pour tous σ, τ, π,

$$t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0 \Rightarrow \sigma \leq \pi.$$

De plus $t^{\pi}_{\pi,\mathbf{0}_n} = 1$ et $t^{\pi}_{\pi\tau} = 0$ si $\tau \neq \mathbf{0}_n$.

On peut donc restreindre l'expression de $A_\pi(m)$ aux mots $\sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$, i.e. que pour tout $m \geq 0$

$$A_\pi(m) = \sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{D}_n} SSYT(\sigma, n) \cdot t^{\pi}_{\sigma,\tau} \cdot SSYT(\tau^*, m - 2n + 1)$$

Théorème [CKLN '04]

> Pour tous σ, τ, π,
> $$t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0 \Rightarrow \sigma \leq \pi.$$
> De plus $t^{\pi}_{\pi,\mathbf{0}_n} = 1$ et $t^{\pi}_{\pi\tau} = 0$ si $\tau \neq \mathbf{0}_n$.

On peut donc restreindre l'expression de $A_\pi(m)$ aux mots $\sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$, i.e. que pour tout $m \geq 0$

$$A_\pi(m) = \sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{D}_n} SSYT(\sigma, n) \cdot t^{\pi}_{\sigma,\tau} \cdot SSYT(\tau^*, m - 2n + 1)$$

Corollaire

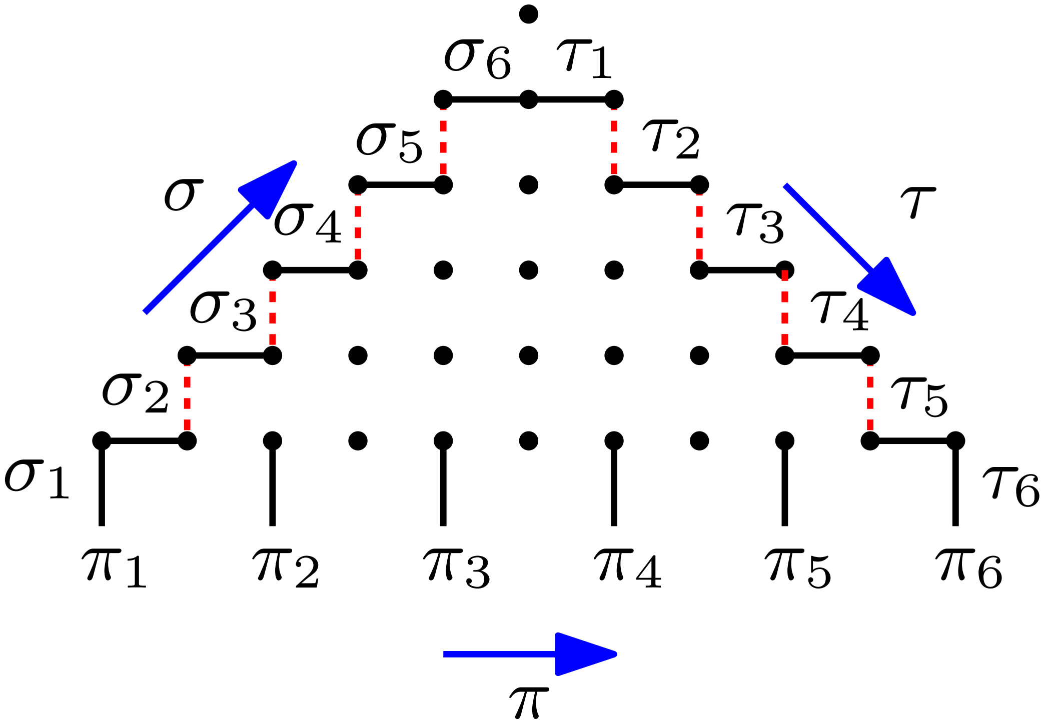
> En tant que polynôme en m, $A_\pi(m)$ a comme terme dominant $\frac{1}{H(\pi)} m^{d(\pi)}$.

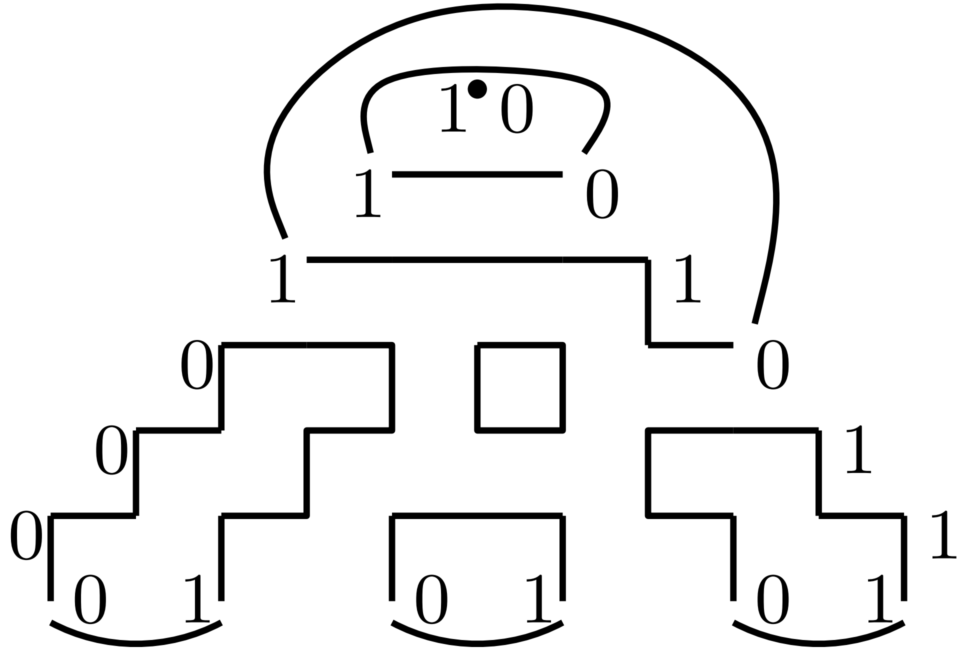
(2) Configurations FPL dans un triangle

Le triangle $\mathcal{T}_n$

On est donc ramené à étudier les configurations FPL dans le triangle (configurations TFPL).

But : comprendre la structure des configurations TFPL avec des conditions aux frontières données, et en déduire des conséquences énumératives.





Premières propriétés

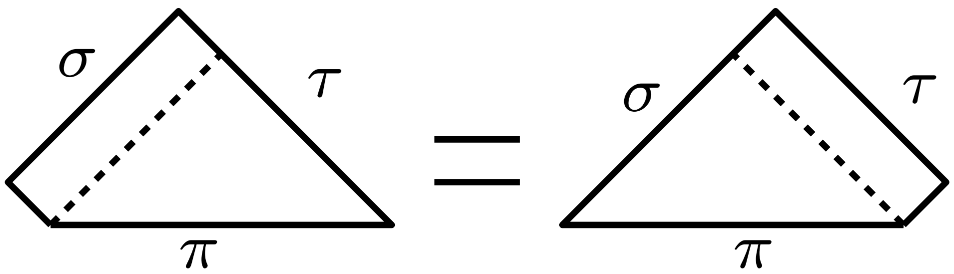
Par une symétrie droite gauche, on a immédiatement

$$t^{\pi}_{\sigma,\tau} = t^{\pi^*}_{\tau^*,\sigma^*}.$$

On a aussi l'identité suivante, dont la preuve repose sur la rotation de Wieland :

Théorème [N '09]

$$\sum_{\substack{\sigma_1 \in \mathcal{D}_n \\ \sigma \to \sigma_1}} t^{\pi}_{\sigma_1,\tau} = \sum_{\substack{\tau_1 \in \mathcal{D}_n \\ \tau^* \to \tau_1^*}} t^{\pi}_{\sigma,\tau_1}.$$



Théorème [CKLN '04, N '09]

$t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0$ implique $\sigma \leq \pi$.

Préfixes et suffixes communs

On a vu que si $\sigma = \pi$, il n'y a qu'une seule configuration TFPL possible, obtenue pour $\tau = \mathbf{0}_n$. Que se passe-t-il si σ est "proche" de π (tout en gardant $\sigma \leq \pi$) ?
Une réponse possible est obtenue en regardant ce qui se passe si les mots σ et π ont un préfixe et/ou un suffixe commun.

Préfixes et suffixes communs

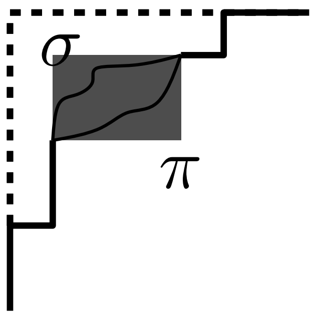
On a vu que si $\sigma = \pi$, il n'y a qu'une seule configuration TFPL possible, obtenue pour $\tau = \mathbf{0}_n$. Que se passe-t-il si σ est "proche" de π (tout en gardant $\sigma \leq \pi$) ?
Une réponse possible est obtenue en regardant ce qui se passe si les mots σ et π ont un préfixe et/ou un suffixe commun.

Proposition [N]

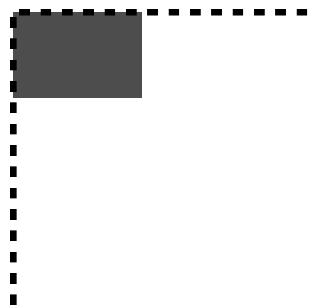
Soient $\pi, \sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$, et supposons qu'il existe u, σ', π', v tels que $\sigma = u\sigma' v$ et $\pi = u\pi' v$. On définit alors a, b par $a = |u|_0 + |v|_0$ et $b = |u|_1 + |v|_1$.

Alors $t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0$ implique $\tau = 0^a \tau' 1^b$ pour un certain τ'.

i.e.



implique $\tau \subseteq$



Préfixes et suffixes communs (suite)

Dans un cas particulier, on peut donner une expression explicite de du coefficient $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$.

Proposition

> Avec les notations précédentes, si on a de plus $\pi' = 1^{n-b}0^{n-a}$, alors $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ = déterminant de taille $\min(n-a, n-b)$ dont les coefficients sont des binomiaux.

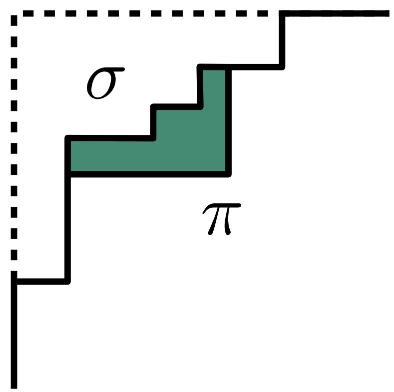
Préfixes et suffixes communs (suite)

Dans un cas particulier, on peut donner une expression explicite de du coefficient $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$.

Proposition

> Avec les notations précédentes, si on a de plus $\pi' = 1^{n-b}0^{n-a}$, alors $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ = déterminant de taille $\min(n-a, n-b)$ dont les coefficients sont des binomiaux.

Cela correspond au cas où les cases de π/σ forment un diagramme après une rotation de $180°$.

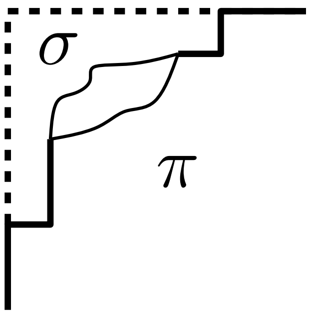


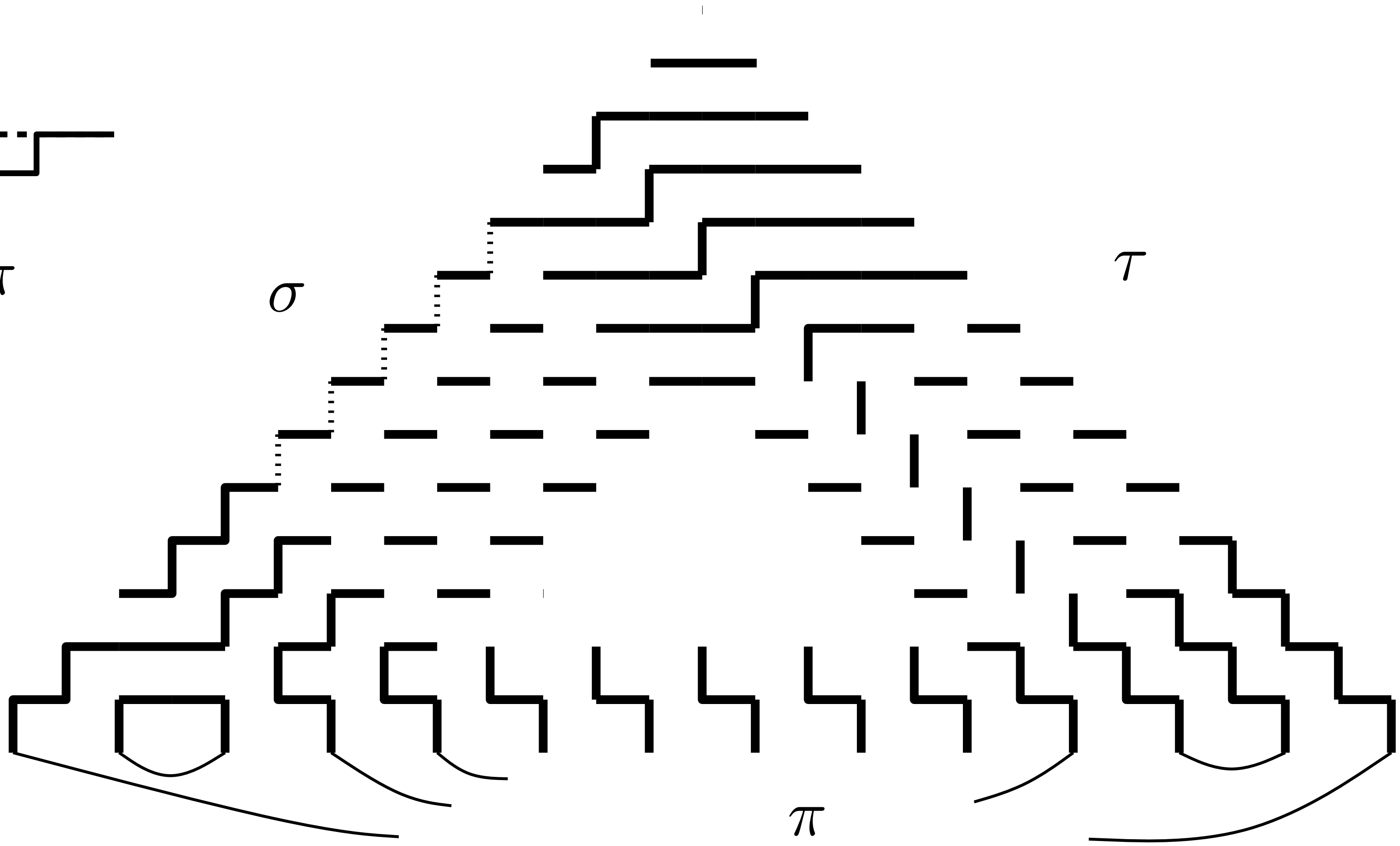
Préfixes et suffixes communs (suite)

Idée de la preuve :beaucoup d'arêtes fixées.

Exemple :

$$\sigma = 00100\sigma'1011$$
$$\pi = 00100\pi'1011$$



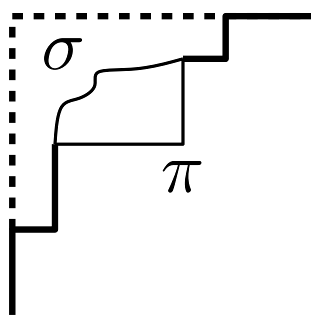


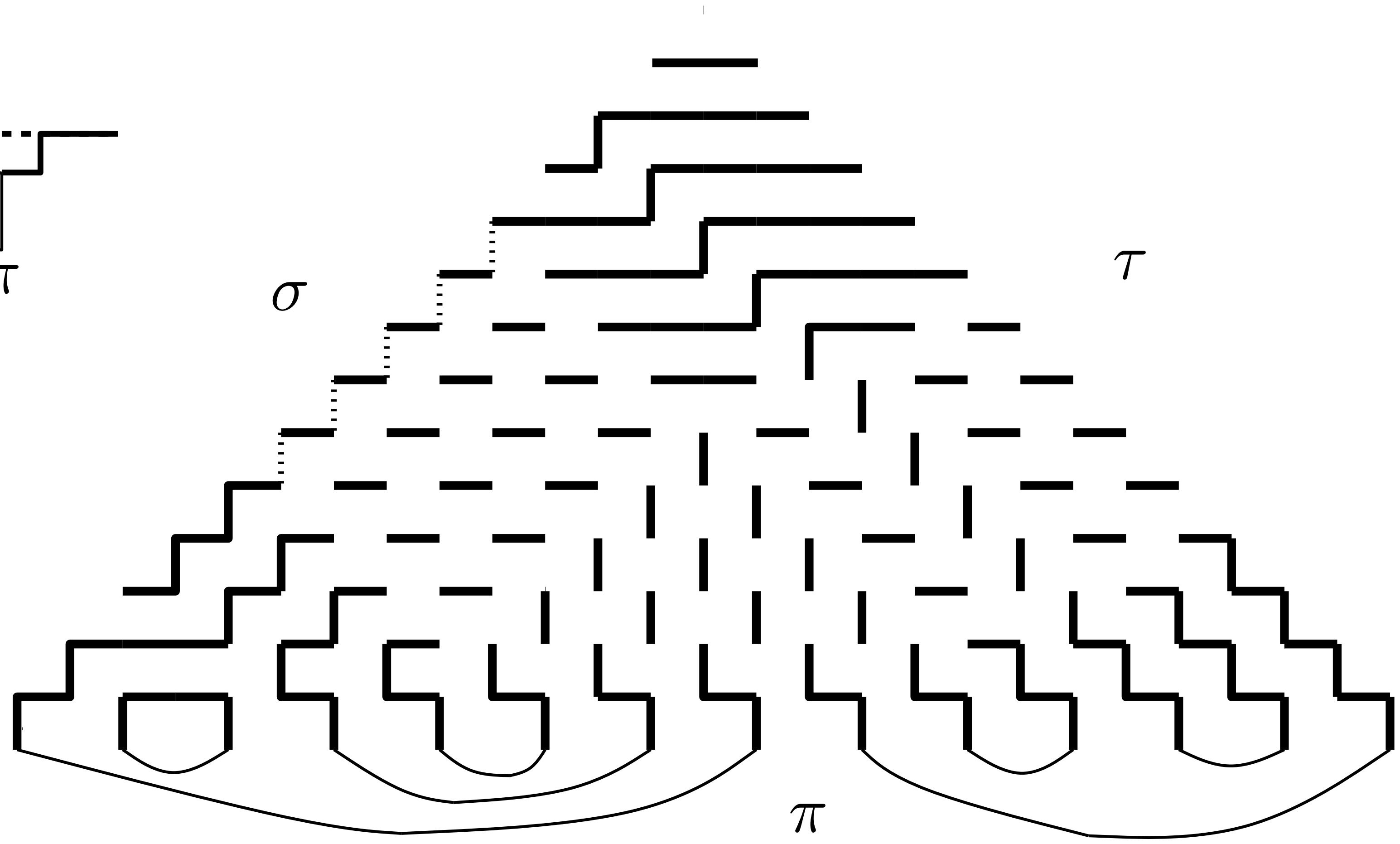
Préfixes et suffixes communs (suite)

Idée de la preuve :beaucoup d'arêtes fixées.

Exemple :

$$\sigma = 00100\cdots\cdots1011$$
$$\pi = 00100\textcolor{blue}{111001}1011$$





Configurations extrémales.

Thapper a prouvé une autre contrainte importante :

> $t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0$ implique l'inégalité $d(\sigma) + d(\tau) \leq d(\pi)$.

Configurations extrémales.

Thapper a prouvé une autre contrainte importante :

> $t^{\pi}_{\sigma,\tau} \neq 0$ implique l'inégalité $d(\sigma) + d(\tau) \leq d(\pi)$.

En poursuivant l'idée de Thapper, on peut prouver une identité dans le cas d'égalité $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$:

Proposition Pour tout $\pi \in \mathcal{D}_n$,

$$\frac{1}{H(\pi)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathcal{D}_n \\ d(\sigma)+d(\tau)=d(\pi)}} t^{\pi}_{\sigma,\tau} \cdot \frac{1}{2^{d(\sigma)} H(\sigma)} \cdot \frac{1}{2^{d(\tau)} H(\tau)}$$

On appellera extrémales les configurations TFPL avec conditions aux frontières $\{\sigma, \pi, \tau\}$ vérifiant $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$.

Un peu d'algèbre

Soient λ, μ, ν des diagrammes de Ferrers, et $\Lambda(x)$ l'anneau des fonctions symétriques en les variables $x_1, x_2, \ldots$. Les fonctions de Schur $s_\lambda(x) \in \Lambda(x)$ peuvent être définies par

$$s_\lambda(x) = \sum_T \prod_i x_i^{T_i},$$

où T parcourt les tableaux semistandards de forme λ, et T_i est le nombre de cases remplies par l'entier i.

Un peu d'algèbre

Soient λ, μ, ν des diagrammes de Ferrers, et $\Lambda(x)$ l'anneau des fonctions symétriques en les variables $x_1, x_2, \ldots$. Les fonctions de Schur $s_\lambda(x) \in \Lambda(x)$ peuvent être définies par

$$s_\lambda(x) = \sum_T \prod_i x_i^{T_i},$$

où T parcourt les tableaux semistandards de forme λ, et T_i est le nombre de cases remplies par l'entier i.

Les fonctions de Schur forment une base de $\Lambda(x)$. Si l'on développe $s_\mu(x)s_\nu(x)$, dans cette base, les coefficients $c^\lambda_{\mu,\nu}$ obtenus sont appelés coefficients de Littlewood Richardson (LR).

$$s_\mu(x)s_\nu(x) = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu,\nu} s_\lambda(x)$$

Coefficients de Littlewood Richardson

Par homogénéité des fonctions de Schur on a :

$$c^{\lambda}_{\mu,\nu} \neq 0 \text{ implique } d(\lambda) = d(\mu) + d(\nu).$$

Coefficients de Littlewood Richardson

Par homogénéité des fonctions de Schur on a :

$c^{\lambda}_{\mu,\nu} \neq 0$ implique $d(\lambda) = d(\mu) + d(\nu)$.

On peut montrer que si $s_\lambda(x, y)$ désigne la fonction s_λ en les variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ alors

$$s_\lambda(x, y) = \sum_{\mu,\nu} c^{\lambda}_{\mu,\nu} s_\mu(x) s_\nu(y)$$

Coefficients de Littlewood Richardson

Par homogénéité des fonctions de Schur on a :

$c^{\lambda}_{\mu,\nu} \neq 0$ implique $d(\lambda) = d(\mu) + d(\nu)$.

On peut montrer que si $s_\lambda(x, y)$ désigne la fonction s_λ en les variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ alors

$$s_\lambda(x, y) = \sum_{\mu,\nu} c^{\lambda}_{\mu,\nu} s_\mu(x) s_\nu(y)$$

En spécialisant cette expression en $x_i = y_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, m/2$ et $x_i = y_i = 0$ sinon, on obtient des polynômes en m de chaque côté. Il est alors facile de voir que l'identification des coefficients dominants s'écrit :

$$\frac{1}{H(\lambda)} = \sum_{\mu,\nu} c^{\lambda}_{\mu,\nu} \cdot \frac{1}{2^{d(\mu)} H(\mu)} \cdot \frac{1}{2^{d(\nu)} H(\nu)}$$

Coefficients de Littlewood Richardson

On en déduit qu'il existe des $a_{\sigma\tau} > 0$ tels que pour tout $\pi \in \mathcal{D}_n$,

$$\sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} c^{\pi}_{\sigma,\tau} = \sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} t^{\pi}_{\sigma,\tau} \qquad (E)$$

où $\sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$ parcourent les mots tels que $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$

Coefficients de Littlewood Richardson

On en déduit qu'il existe des $a_{\sigma\tau} > 0$ tels que pour tout $\pi \in \mathcal{D}_n$,

$$\sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} c^{\pi}_{\sigma,\tau} = \sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} t^{\pi}_{\sigma,\tau} \qquad (E)$$

où $\sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$ parcourent les mots tels que $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$

Theorem [N. '09]

Pour tous $\pi, \sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$ vérifiant $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$ on a

$$t^{\pi}_{\sigma,\tau} = c^{\pi}_{\sigma,\tau}$$

Coefficients de Littlewood Richardson

On en déduit qu'il existe des $a_{\sigma\tau} > 0$ tels que pour tout $\pi \in \mathcal{D}_n$,

$$\sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} c^{\pi}_{\sigma,\tau} = \sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} t^{\pi}_{\sigma,\tau} \qquad (E)$$

où $\sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$ parcourent les mots tels que $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$

Theorem [N. '09]

> Pour tous $\pi, \sigma, \tau \in \mathcal{D}_n$ vérifiant $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$ on a
>
> $$t^{\pi}_{\sigma,\tau} = c^{\pi}_{\sigma,\tau}$$

L'équation (E) montre qu'il suffit en fait de prouver $c^{\pi}_{\sigma,\tau} \leq t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ pour tous σ, τ, π tels que $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$.

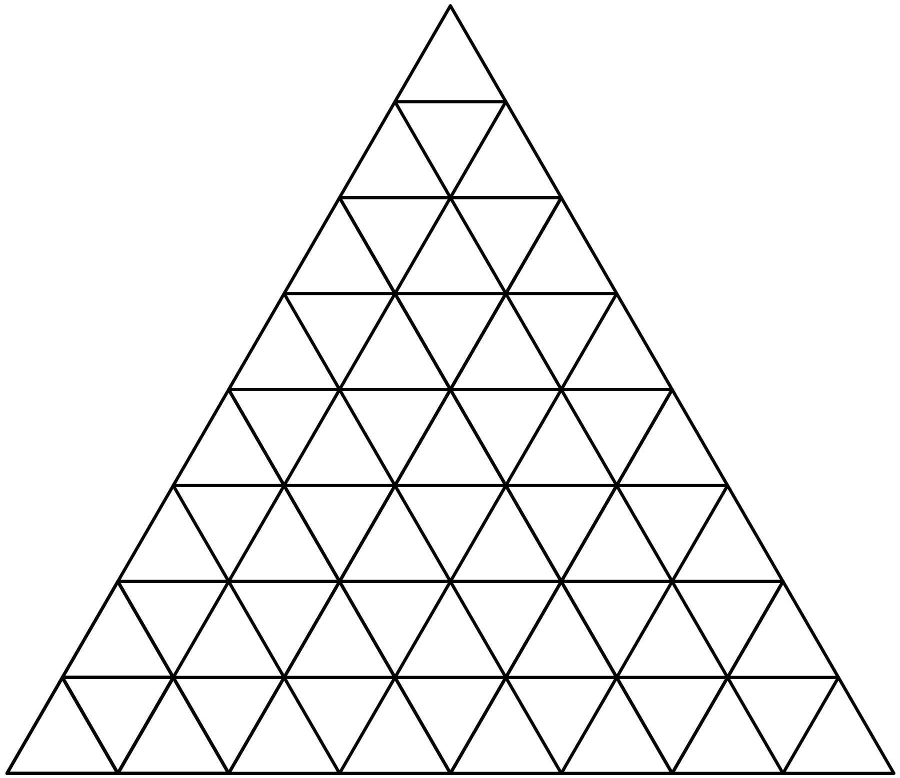
Coefficients LR et puzzles

Il y a de nombreux objets combinatoires comptés par les coefficients LR ; nous utilisons ici les puzzles de Knutson-Tao .

Coefficients LR et puzzles

Il y a de nombreux objets combinatoires comptés par les coefficients LR ; nous utilisons ici les puzzles de Knutson-Tao .

Considérons un triangle de côté $2n$ sur le réseau triangulaire.



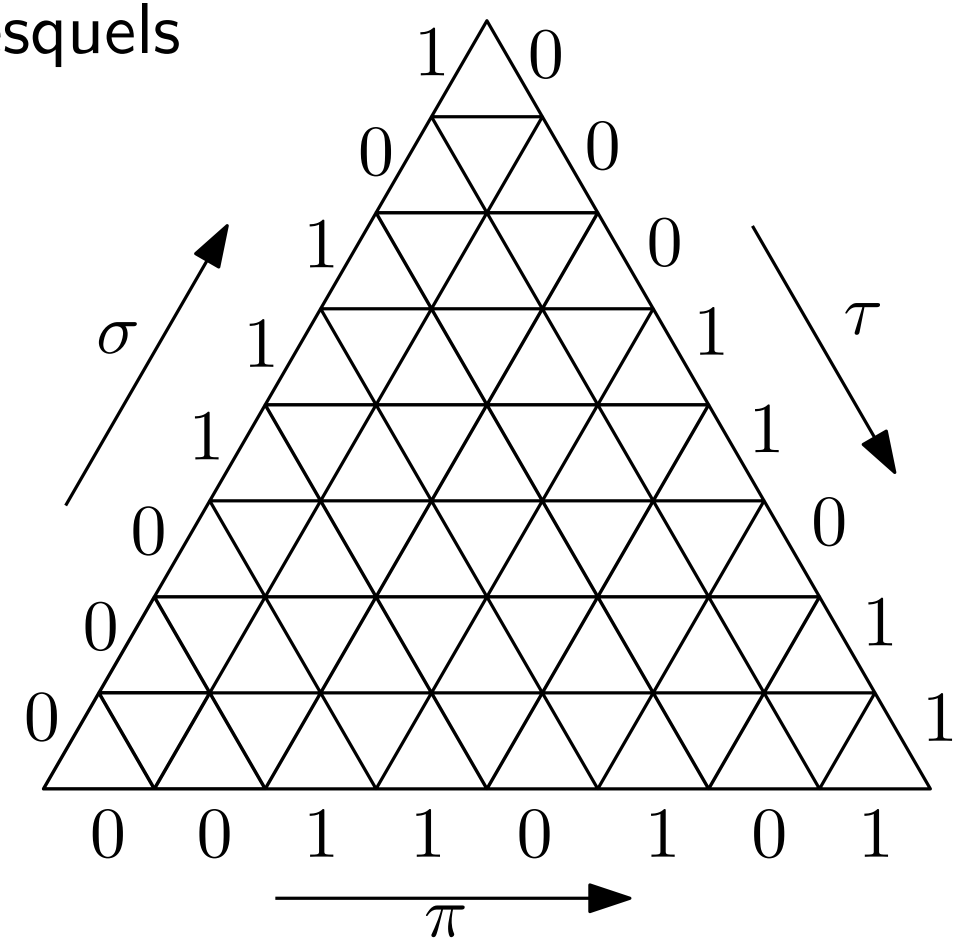
Coefficients LR et puzzles

Il y a de nombreux objets combinatoires comptés par les coefficients LR ; nous utilisons ici les puzzles de Knutson-Tao .

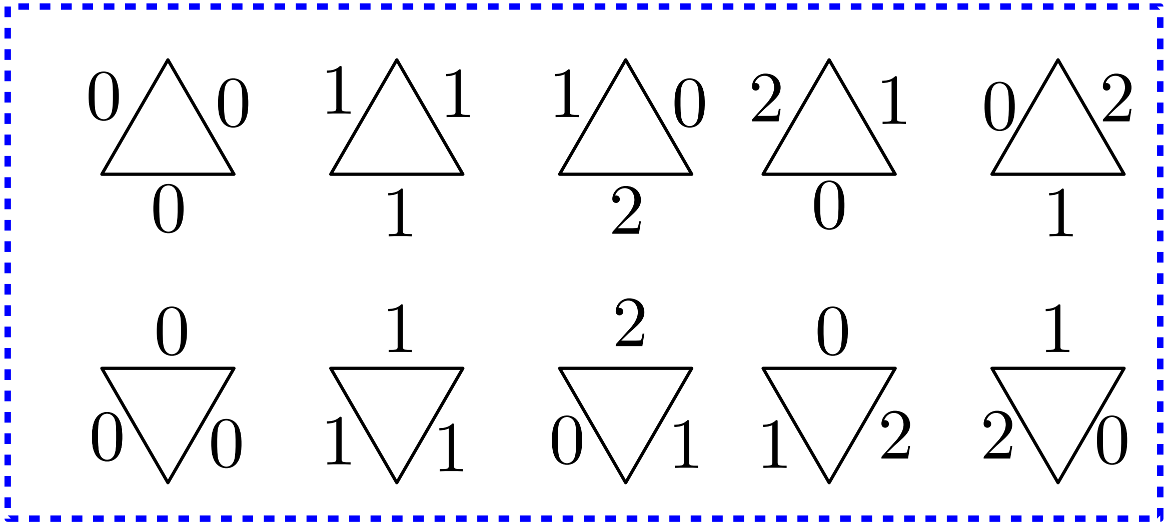
Considérons un triangle de côté $2n$ sur le réseau triangulaire.

On fixe alors $\sigma, \pi, \tau \in \mathcal{D}_n$, avec lesquels on étiquette les côtés du triangle.

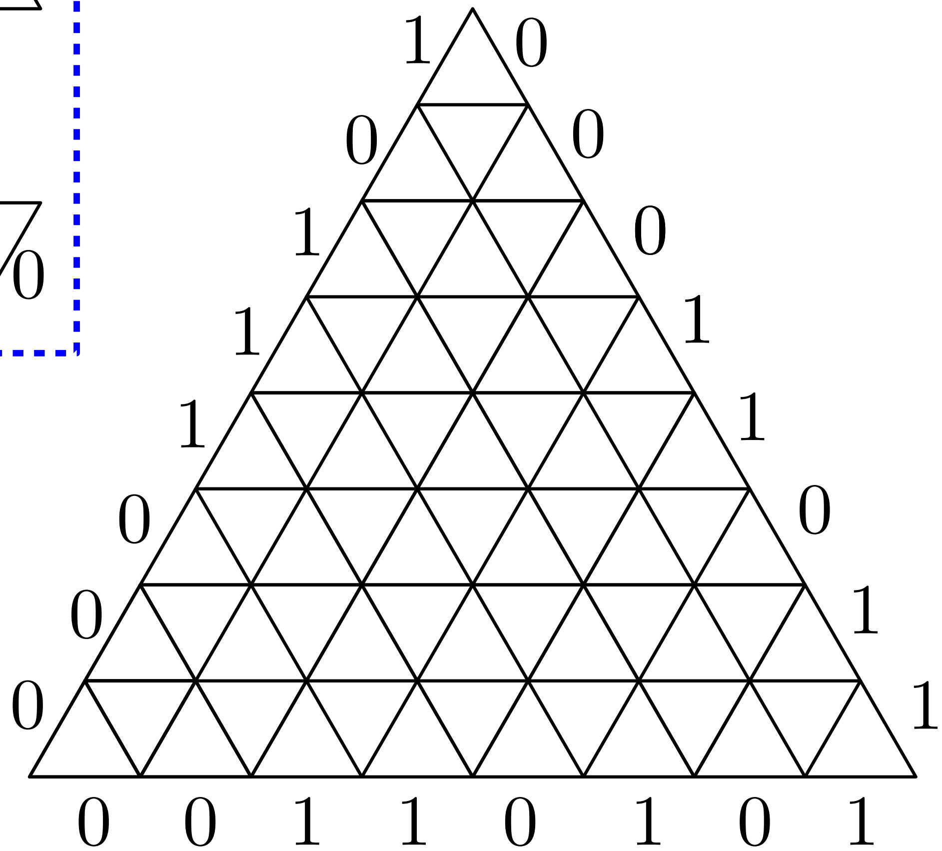
$$\sigma = 00011011$$
$$\pi = 00110101$$
$$\tau = 00011011$$



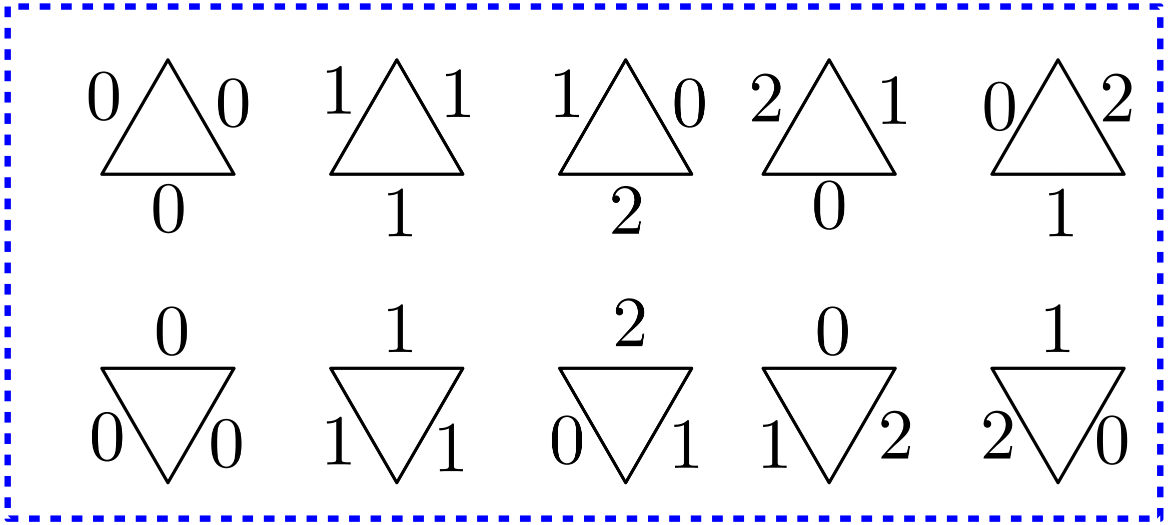
Un puzzle de Knutson Tao avec frontière σ, π, τ est un étiquetage de chaque arête du triangle par $0, 1$ or 2, tel que les étiquettes sur les côtés sont σ, π, τ, et l'étiquetage induit sur chaque triangle élémentaire est parmi :

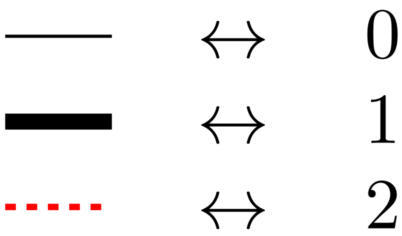


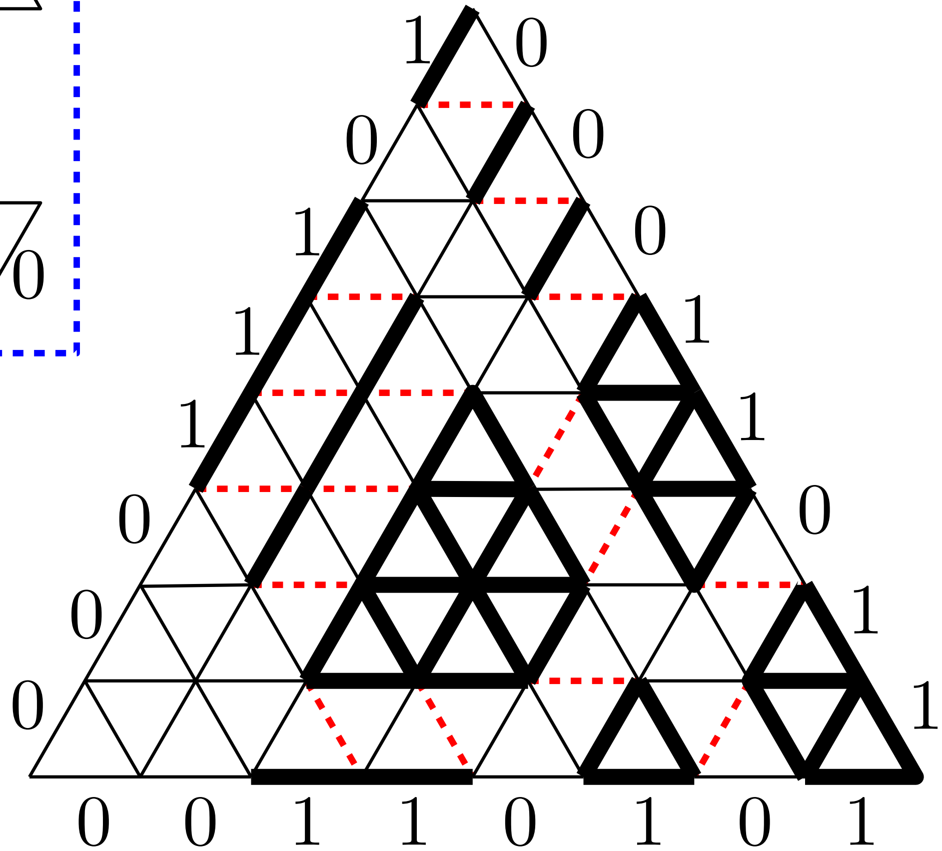
"Que des 0, que des 1, ou bien $0, 1, 2$ dans le sens trigonométrique"



Un puzzle de Knutson Tao avec frontière σ, π, τ est un étiquetage de chaque arête du triangle par $0, 1$ or 2, tel que les étiquettes sur les côtés sont σ, π, τ, et l'étiquetage induit sur chaque triangle élémentaire est parmi :







Théorème **[Knutson, Tao '03][K., T. et Woodward '03]**

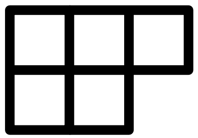
> Soient $\sigma, \tau, \pi \in \mathcal{D}_n$. Alors le nombre de puzzles KT avec frontière σ, π, τ est égal au coefficient $c_{\sigma,\tau}^{\pi}$.

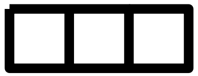
Théorème **[Knutson, Tao ’03][K., T. et Woodward ’03]**

> Soient $\sigma, \tau, \pi \in \mathcal{D}_n$. Alors le nombre de puzzles KT avec frontière σ, π, τ est égal au coefficient $c^{\pi}_{\sigma,\tau}$.

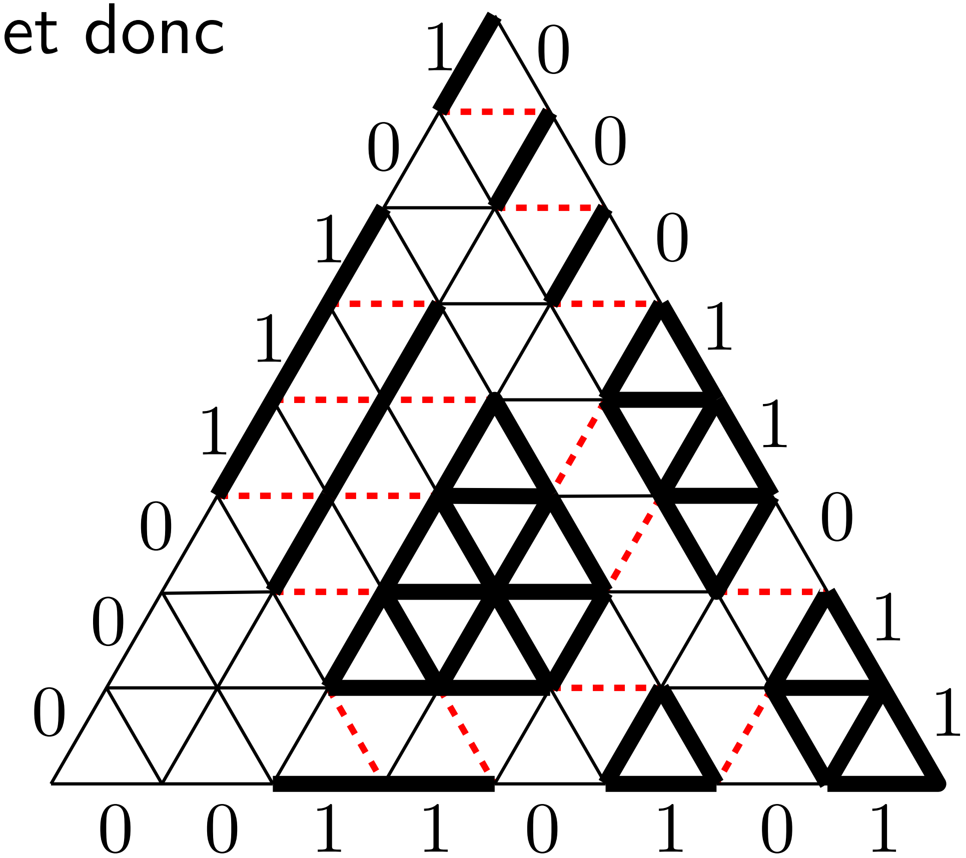
Il est facile de voir qu’il n’y a qu’un seul possible pour les frontières ci-dessous, et donc

$c^{\pi}_{\sigma,\tau} = 1$ pour

$\pi =$ 

$\sigma =$ 

$\tau =$ 



Des puzzles KT aux configurations extrémales.

Soient $\sigma, \pi, \tau \in \mathcal{D}_n$ avec $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$. On définit une fonction Φ :

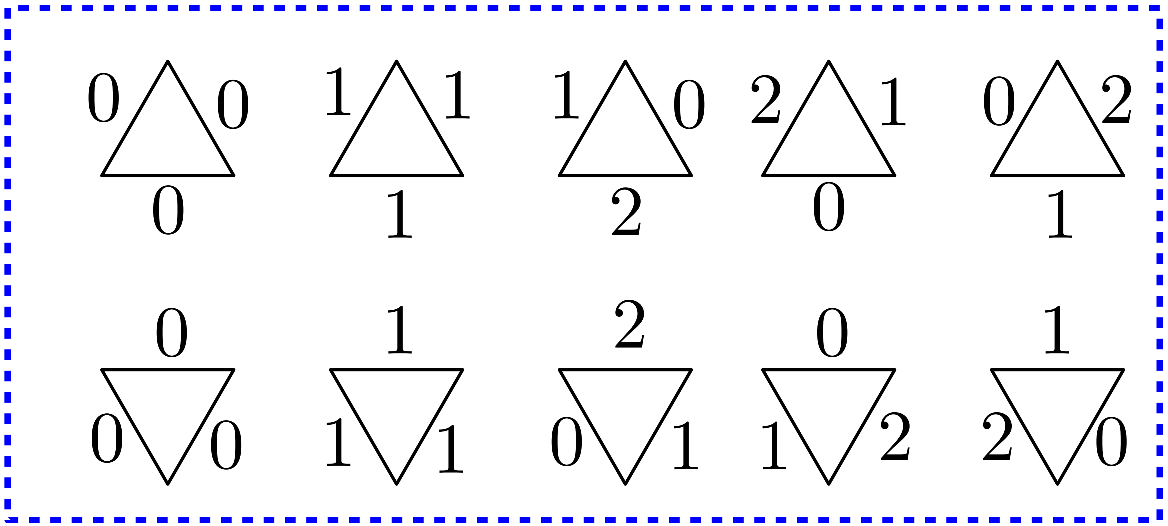
$$\begin{array}{c} \text{Puzzles KT avec frontières } \sigma, \pi, \tau \\ \Big\downarrow \Phi \\ \text{Configurations TFPL avec frontières } \sigma, \pi, \tau \end{array}$$

Des puzzles KT aux configurations extrémales.

Soient $\sigma, \pi, \tau \in \mathcal{D}_n$ avec $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$. On définit une fonction Φ :

$$\begin{array}{c}\text{Puzzles KT avec frontières } \sigma, \pi, \tau \\ \Big\downarrow \Phi \\ \text{Configurations TFPL avec frontières } \sigma, \pi, \tau\end{array}$$

Φ est définie localement sur les 10 triangles étiquetés possibles :



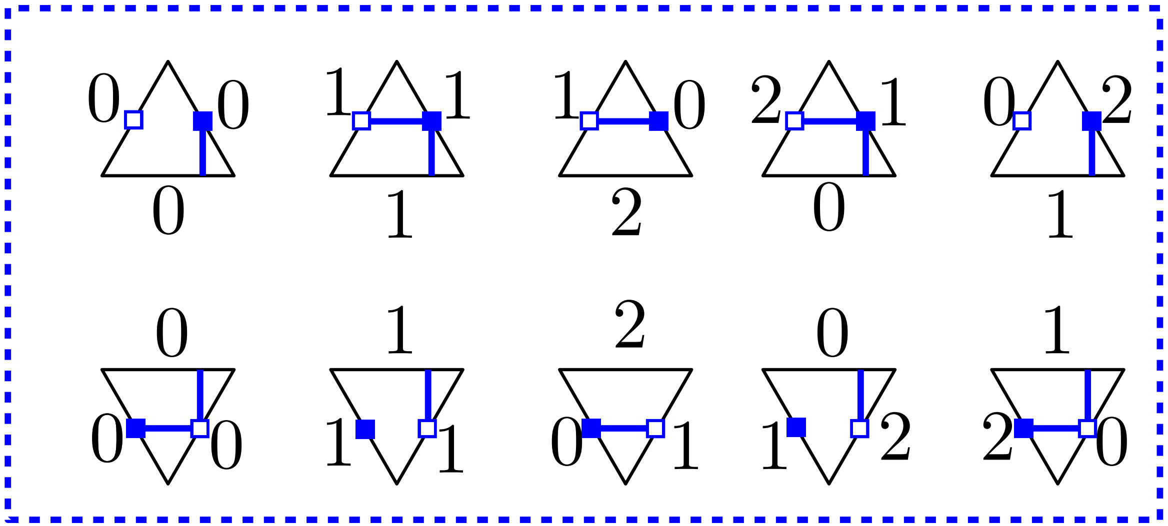
Des puzzles KT aux configurations extrémales.

Soient $\sigma, \pi, \tau \in \mathcal{D}_n$ avec $d(\sigma) + d(\tau) = d(\pi)$. On définit une fonction Φ :

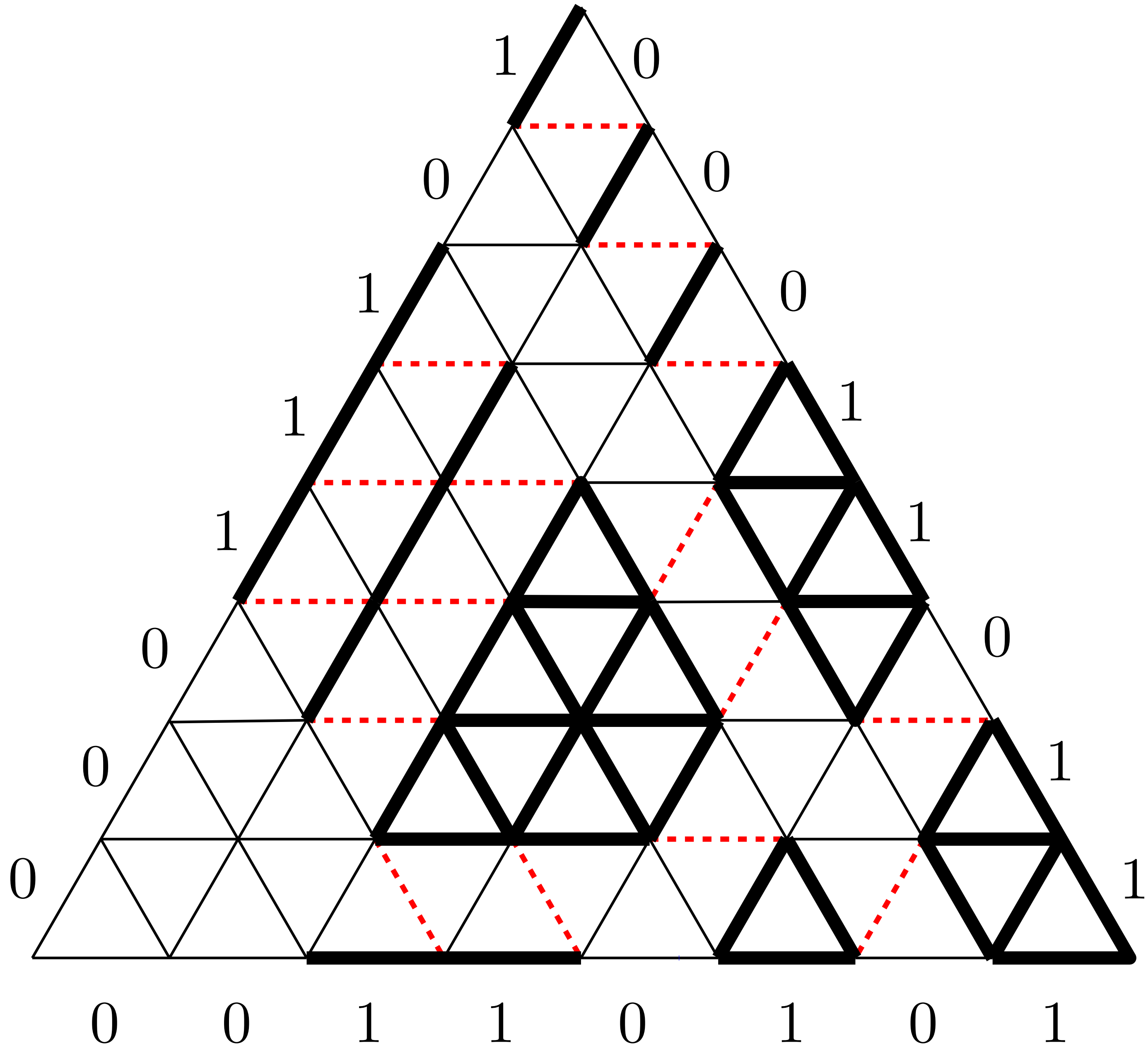
$$\text{Puzzles KT avec frontières } \sigma, \pi, \tau$$
$$\Big\downarrow \Phi$$
$$\text{Configurations TFPL avec frontières } \sigma, \pi, \tau$$

Φ est définie localement sur les 10 triangles étiquetés possibles :

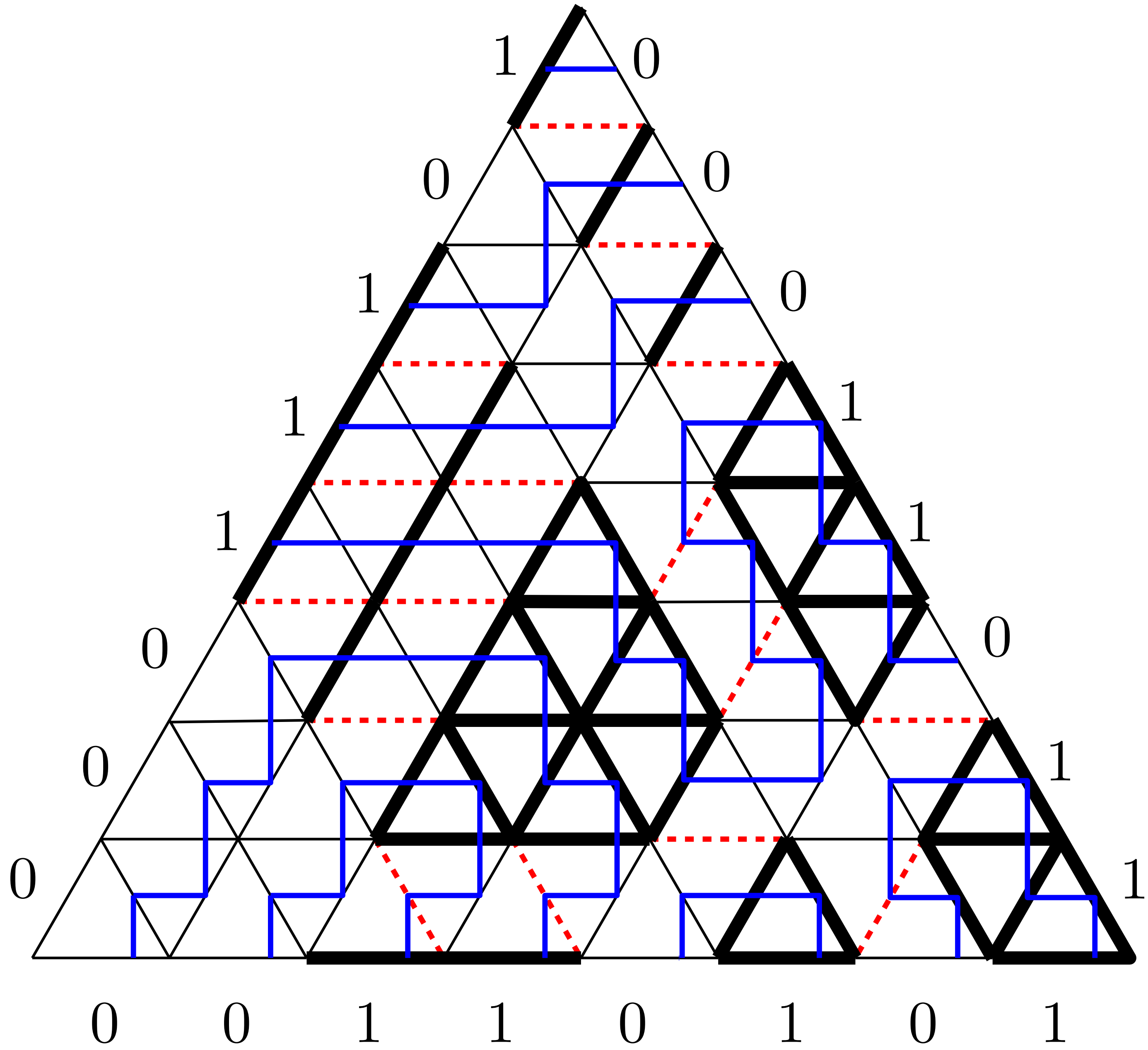
Φ



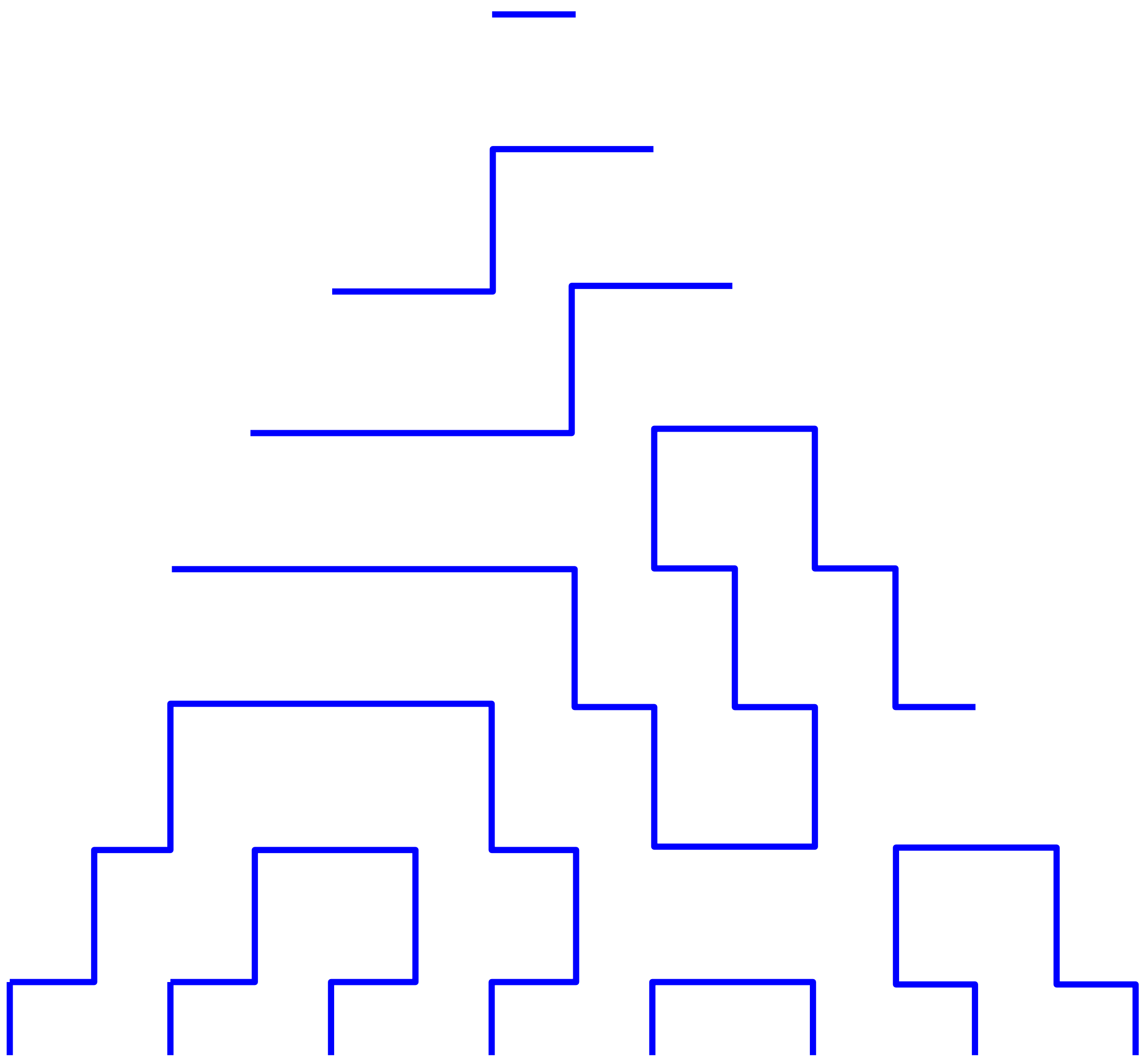
Exemple d'application de Φ :



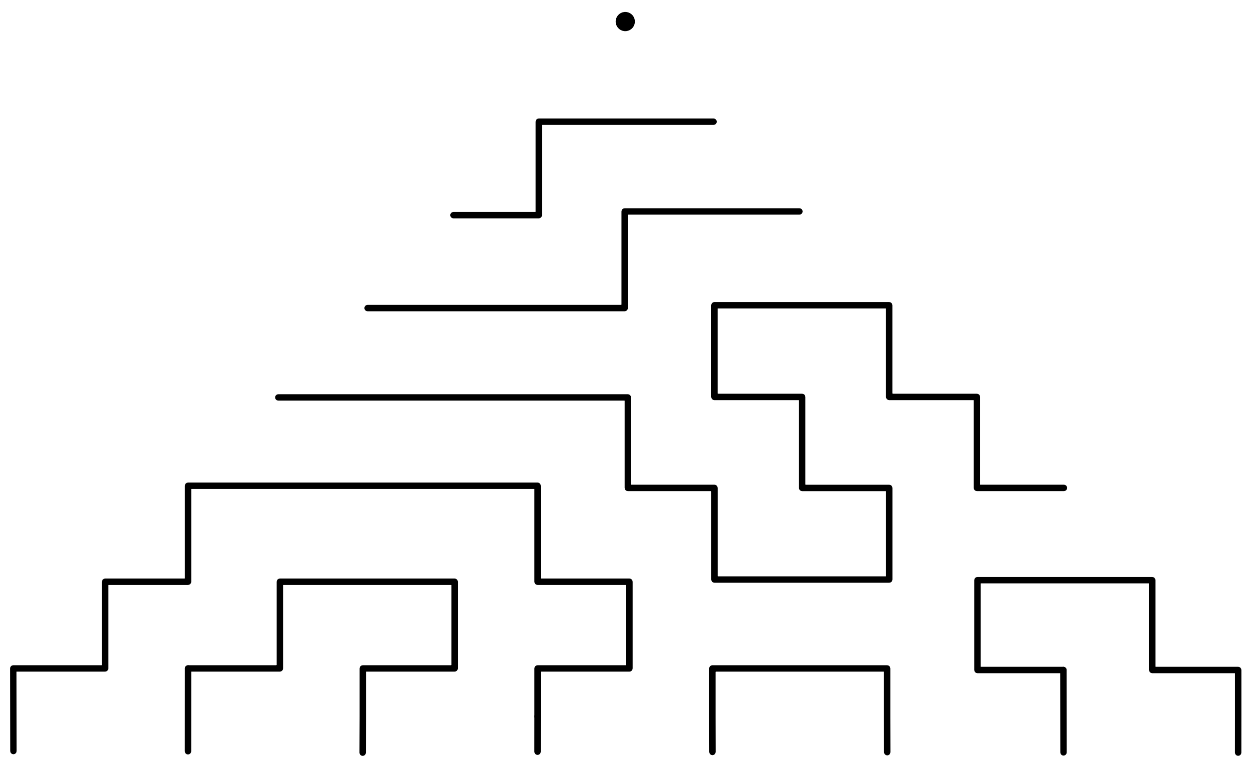
Exemple d'application de Φ :



Exemple d'application de Φ :



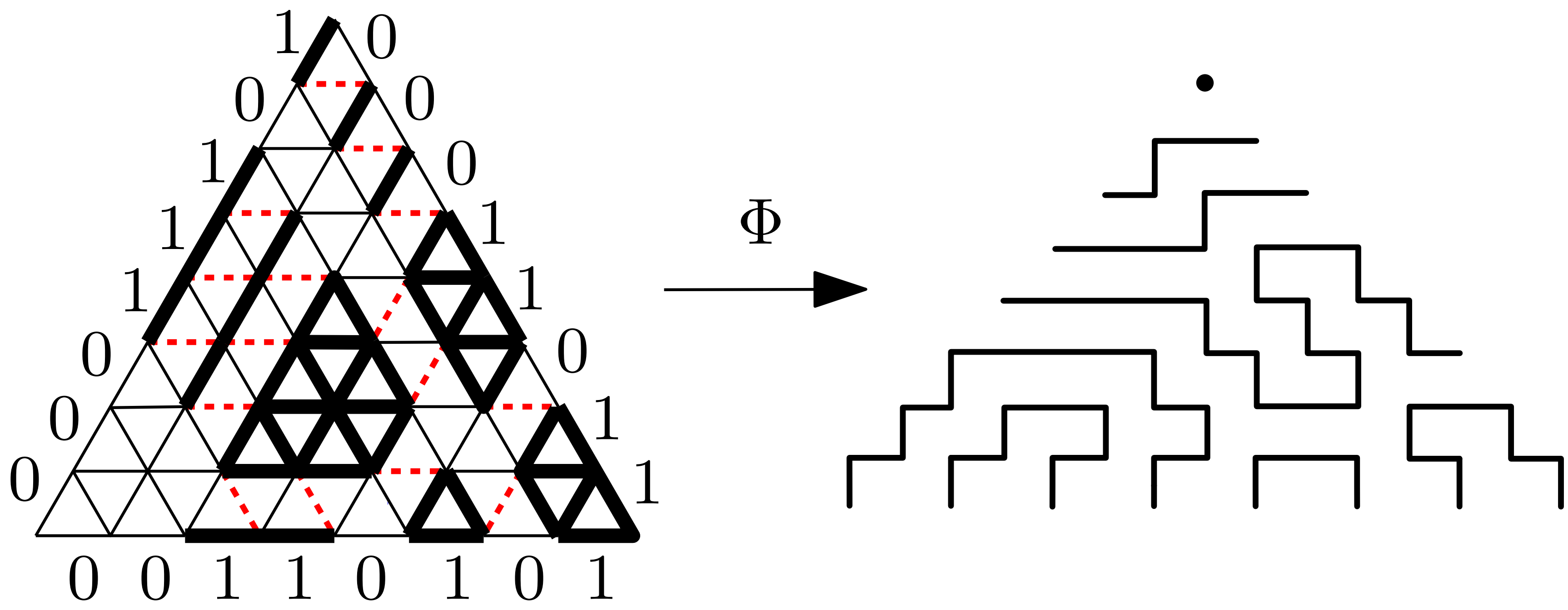
Exemple d'application de Φ :



Φ prouve que $c^{\pi}_{\sigma\tau} \leq t^{\pi}_{\sigma,\tau}$

Il faut montrer que Φ est :

1. bien définie :
   - les sommets de $\Phi(puzzle)$ sont bien de degré 2 , et vérifient les conditions aux bords σ, τ.
   - la connectivité donnée par π est bien vérifiée.
2. injective.



Conclusion

– Pour calculer les nombres A_X, on a en fait besoin de tous les nombres $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ (et pas uniquement du cas extrémal). Un paramètre pour mesurer la complexité de ces nombres est

$$exc(\pi, \sigma, \tau) := d(\pi) - d(\sigma) - d(\tau) \geq 0$$

Les coefficients LR forment le cas de base $exc(\pi, \sigma, \tau) = 0$; quelle est l'extension pour énumérer les $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ généraux ?

Conclusion

– Pour calculer les nombres A_X, on a en fait besoin de tous les nombres $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ (et pas uniquement du cas extrémal). Un paramètre pour mesurer la complexité de ces nombres est

$$exc(\pi,\sigma,\tau) := d(\pi) - d(\sigma) - d(\tau) \geq 0$$

Les coefficients LR forment le cas de base $exc(\pi,\sigma,\tau) = 0$; quelle est l'extension pour énumérer les $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ généraux ?

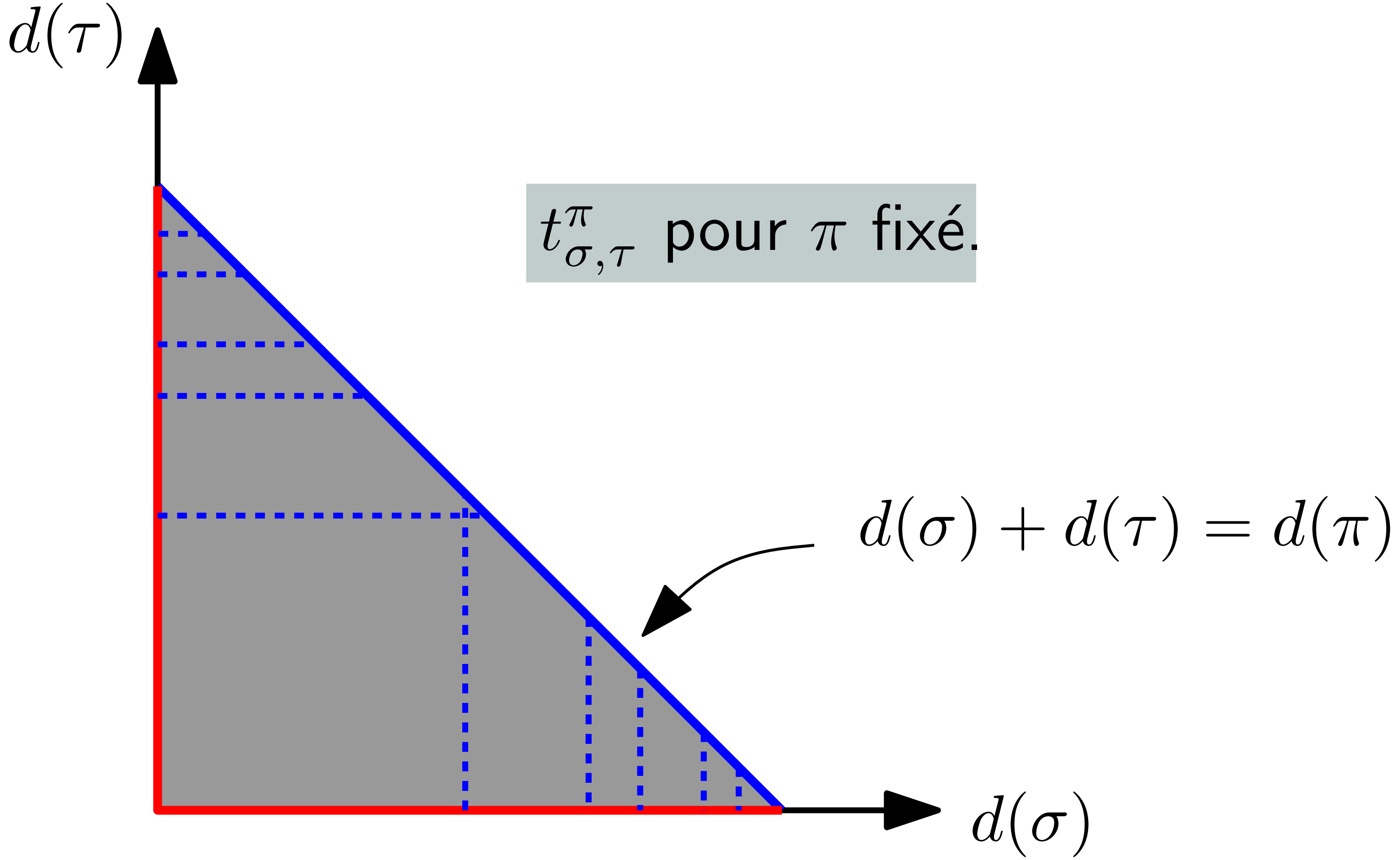
– Autres travaux : on peut montrer que les nombres $A_\pi(m)$ vérifient des récurrences linéaires

$$A_\pi(m) = \sum_{\alpha \leq \pi \in \mathcal{D}_n} c_{\alpha\pi} A_\alpha(m-1),$$

les coefficients $c_{\alpha\pi}$ étant des entiers relatifs définis en fonction des $t^{\pi}_{\sigma\mathbf{0}_n}$. Expression explicite des $c_{\alpha\pi}$?

Conclusion

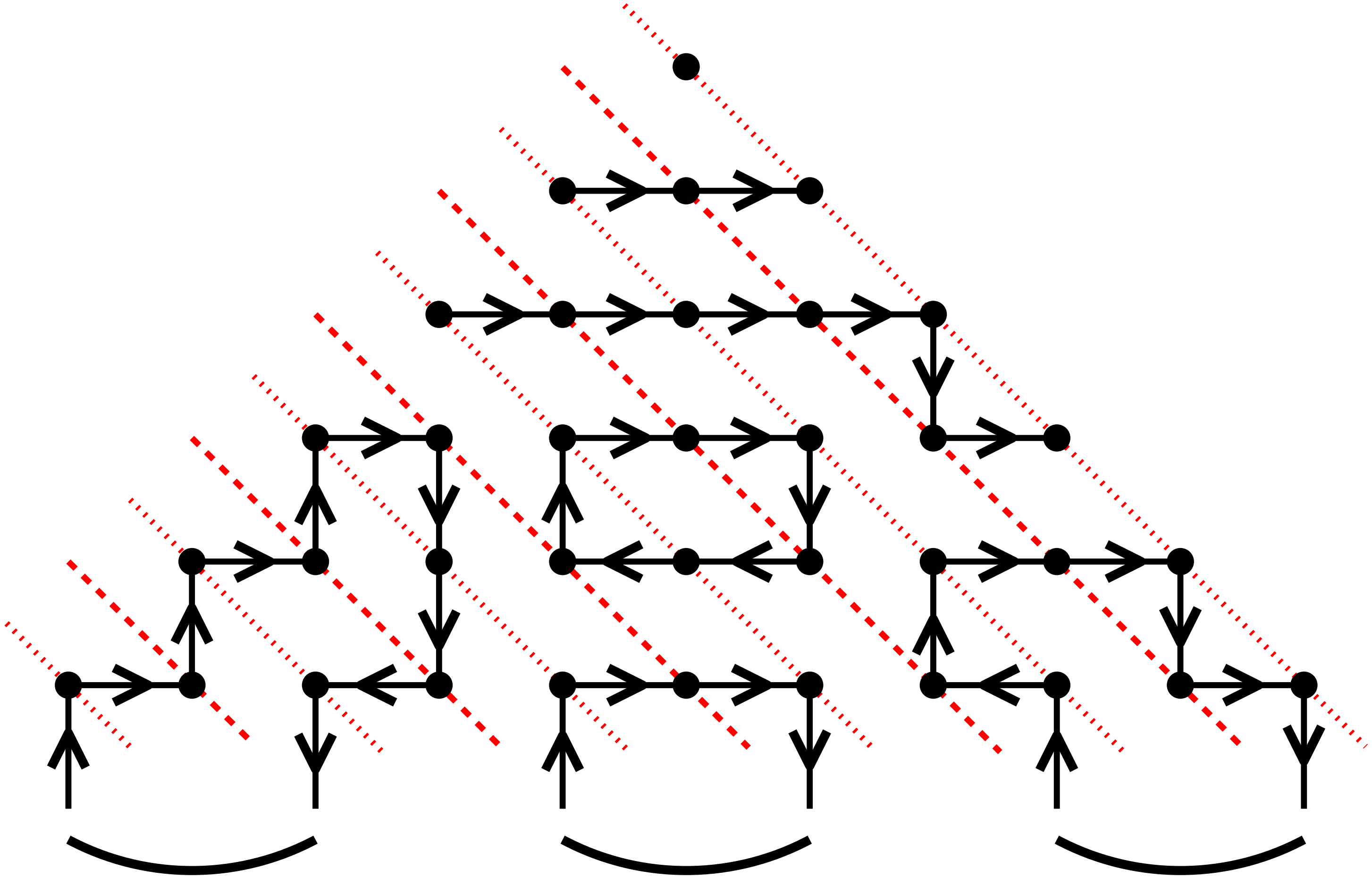
Résultats énumératifs pour certains coefficients $t^{\pi}_{\sigma,\tau}$ en bleu. En rouge, les coefficients $t^{\pi}_{\sigma,\mathbf{0}_n}$.



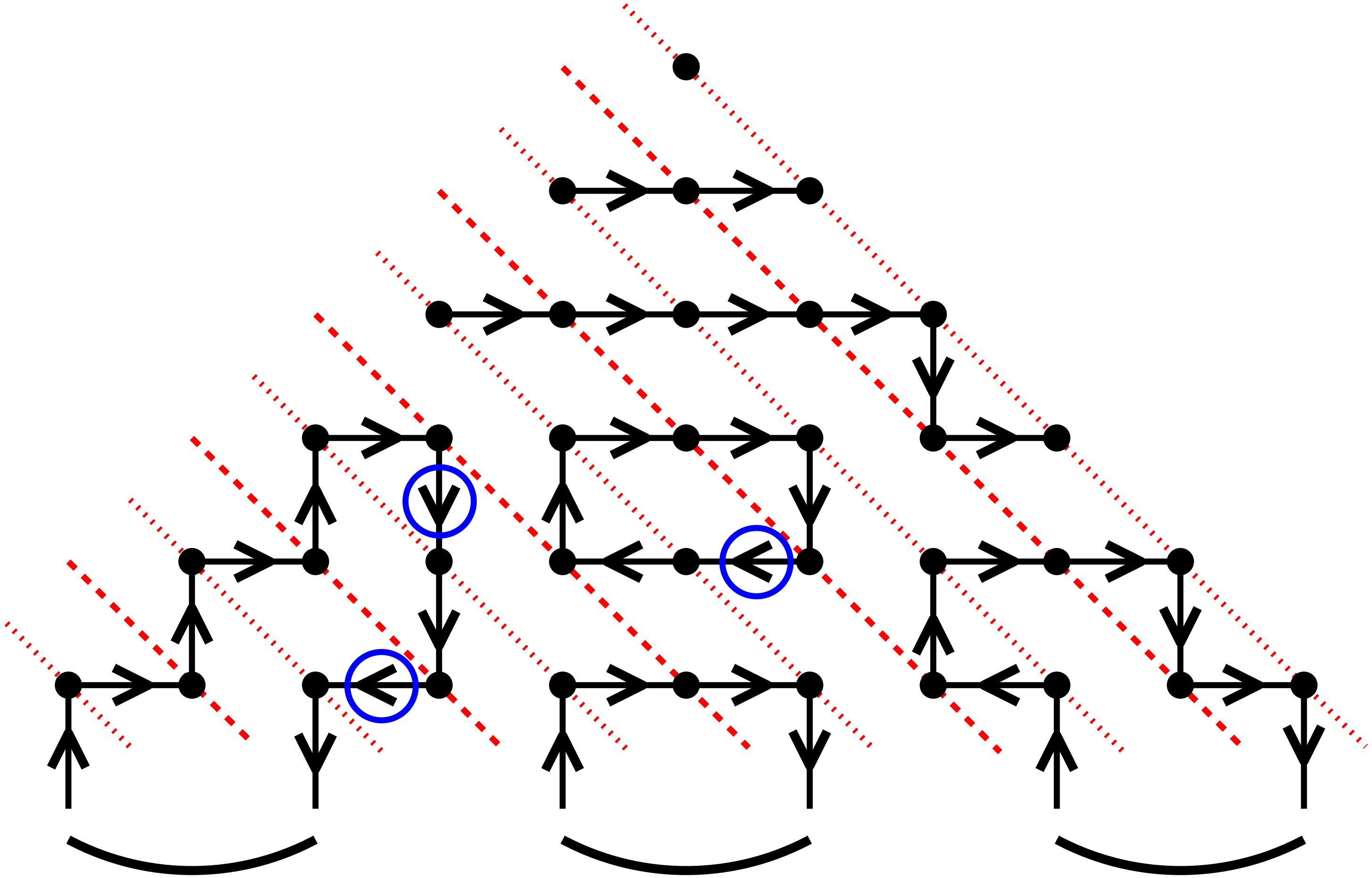
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !

(Merci de votre attention)

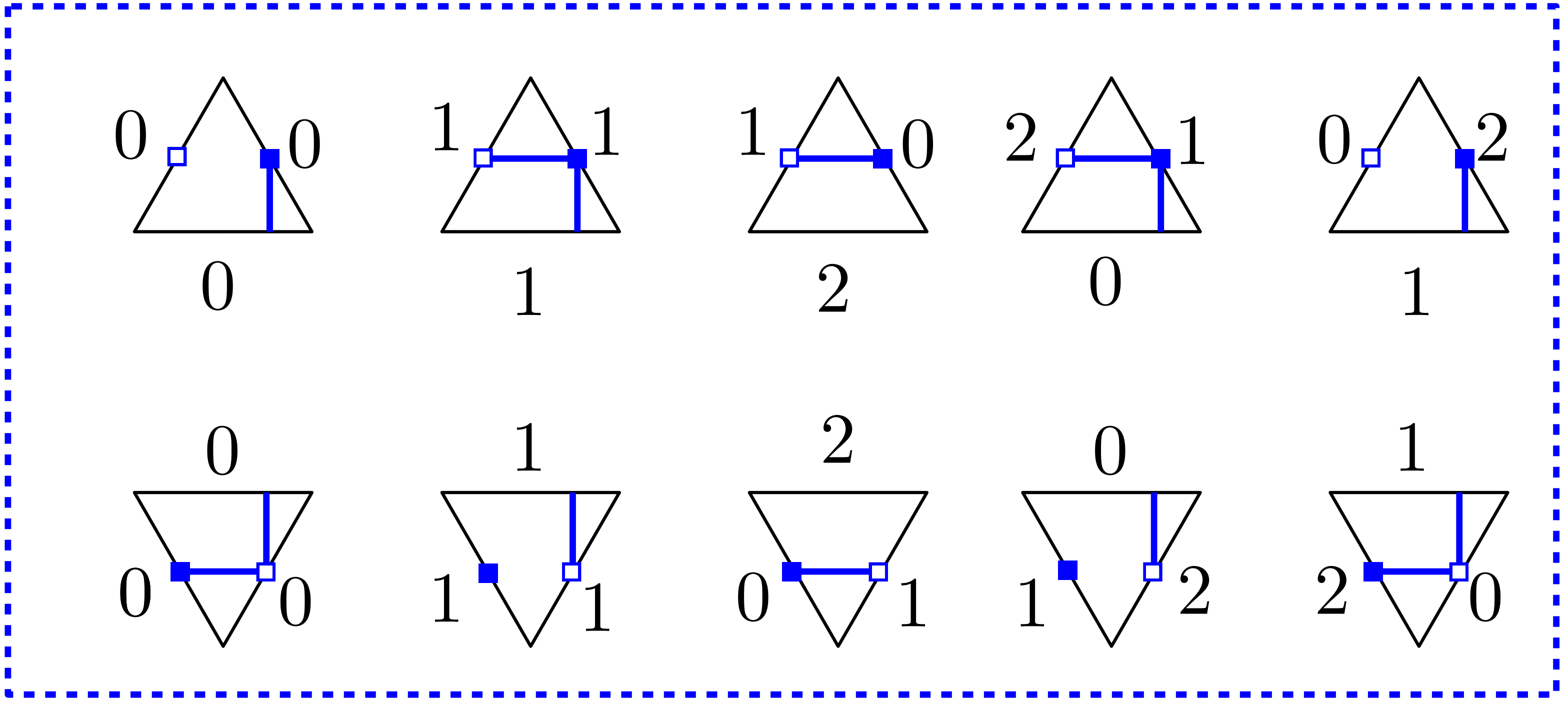
Oriented configurations



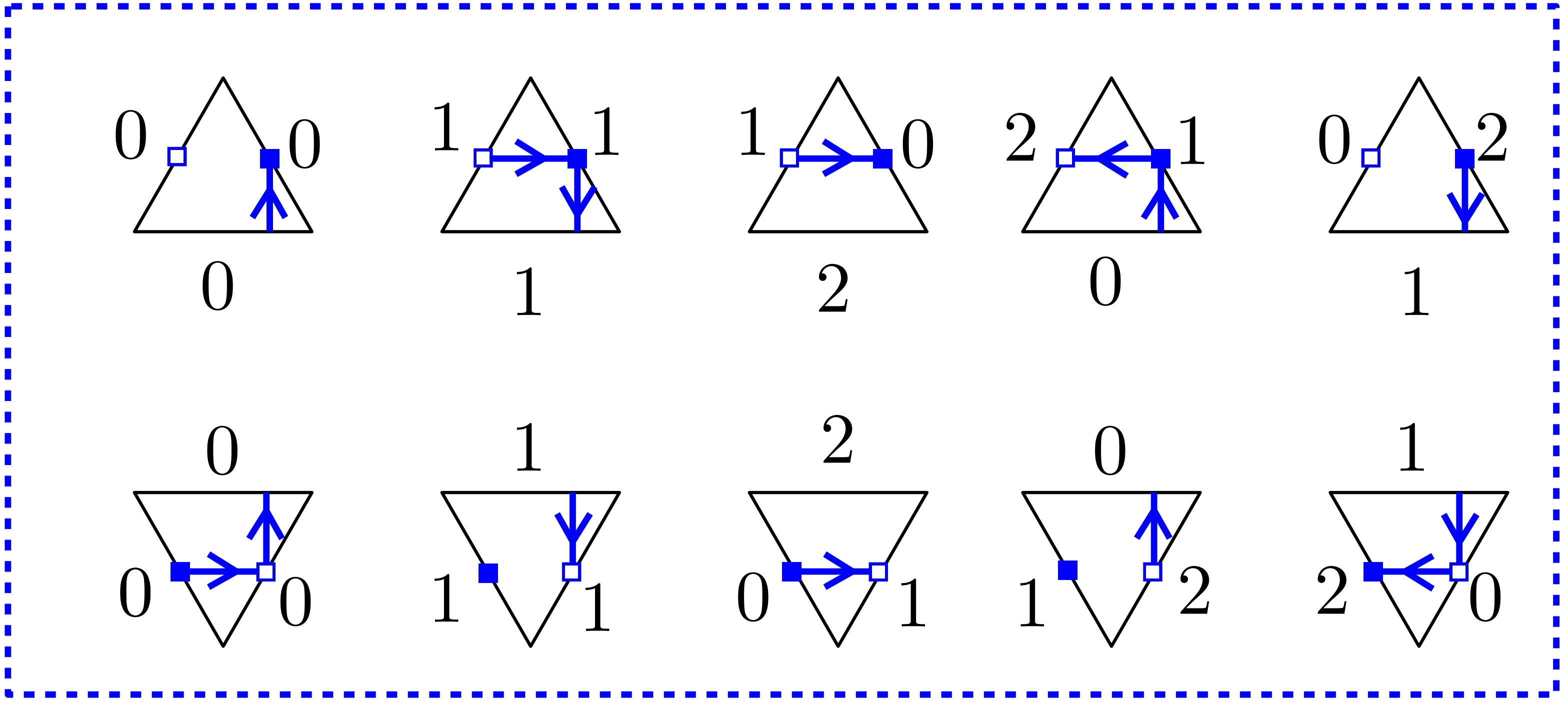
Oriented configurations



Bijection with *oriented configurations*



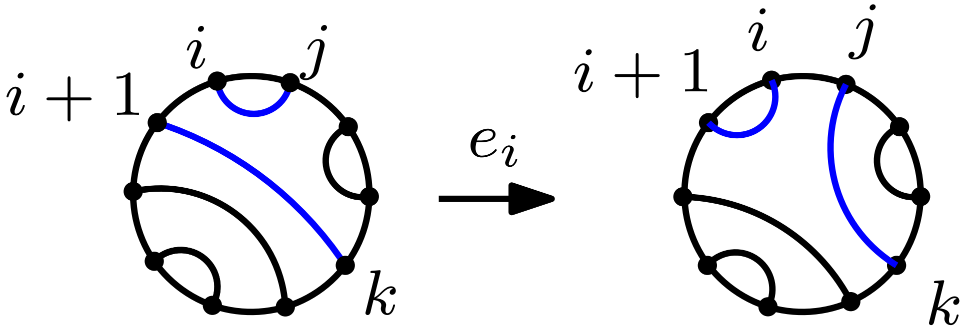
Bijection with *oriented configurations*



This proves injectivity immediately, and the fact that the connectivity π is respected.

Motivation : the Razumov-Stroganov conjecture.

Definition : We define operators e_i on link patterns for $i = 1 \dots 2n$ by $\{i,j\},\{i+1,k\} \in X \to \{i,i+1\},\{j,k\} \in e_i(X)$.

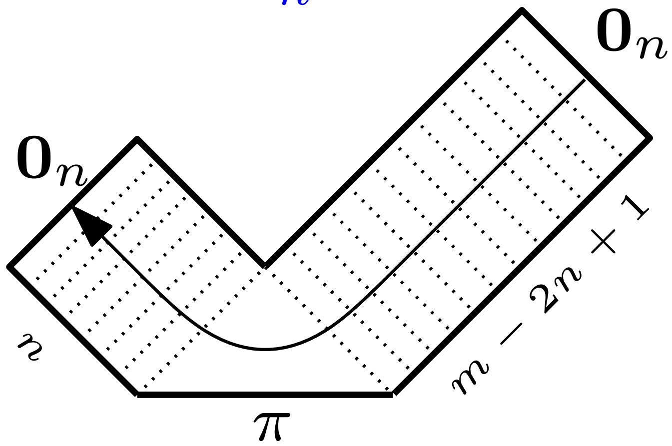


$$RS \quad \Leftrightarrow \quad \forall X, \quad 2nA_X = \sum_{(i,Y),e_i(Y)=X} A_Y$$

Linear recurrences for A_X

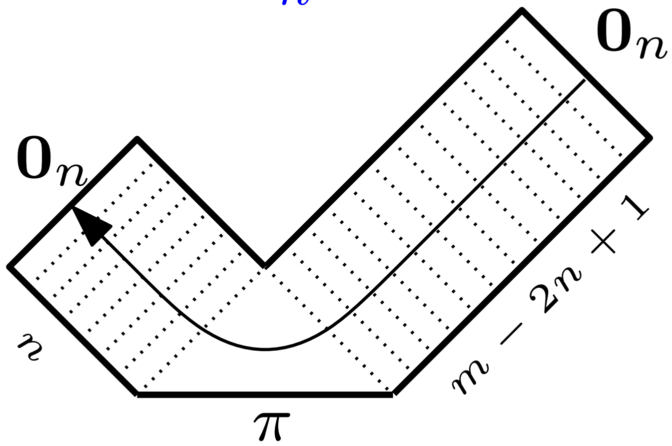
We now define certain matrices endomorphisms $\mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{b}}, \mathbf{t}^{\pi}$ acting on the complex vector space with distinguished basis $\mathcal{D}_n$.

$$A_{\pi}(m) = \left(\mathbf{b}^n \mathbf{t}^{\pi} \widetilde{\mathbf{b}}^{m-2n+1}\right)_{\mathbf{0}_n \mathbf{0}_n}$$

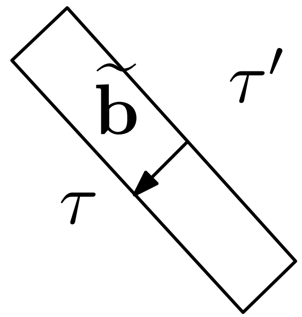


We now define certain matrices endomorphisms $\mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{b}}, \mathbf{t}^{\pi}$ acting on the complex vector space with distinguished basis $\mathcal{D}_n$.

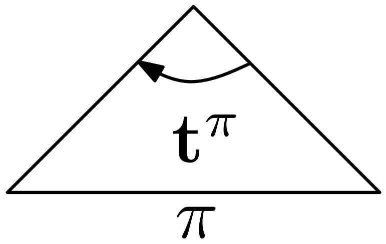
$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^n \mathbf{t}^\pi \widetilde{\mathbf{b}}^{m-2n+1}\right)_{\mathbf{0}_n \mathbf{0}_n}$$



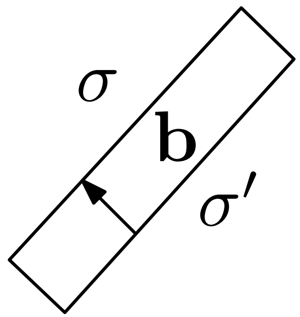
$\widetilde{\mathbf{b}}_{\tau\tau'} := 1$ if $\tau'^* \to \tau^*$ and 0 otherwise.



$(\mathbf{t}^\pi)_{\sigma\tau} := t^\pi_{\sigma,\tau}$

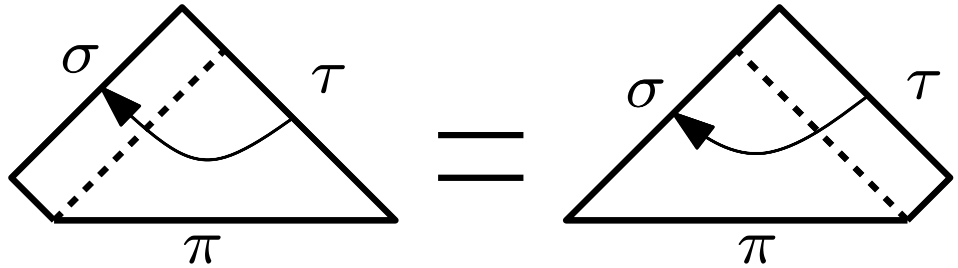


$\mathbf{b}_{\sigma\sigma'} := 1$ if $\sigma \to \sigma'$ and 0 otherwise.



Theorem [N. '09] (conjectured in [Thapper '07]).

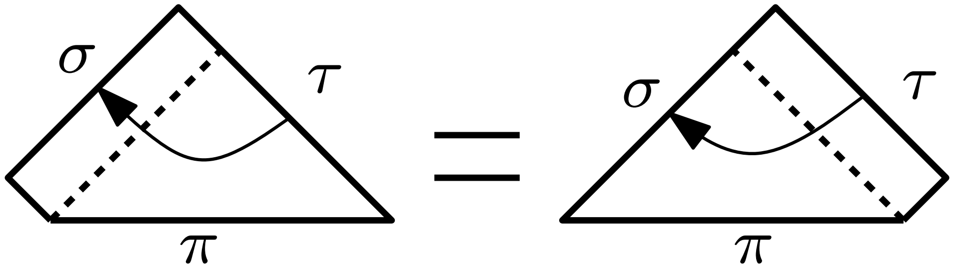
For all σ, τ, π



This means that $\mathbf{b}\mathbf{t}^{\pi} = \mathbf{t}^{\pi}\widetilde{\mathbf{b}}$ for all $\pi \in \mathcal{D}_n$.

Theorem [N. '09] (conjectured in [Thapper '07]).

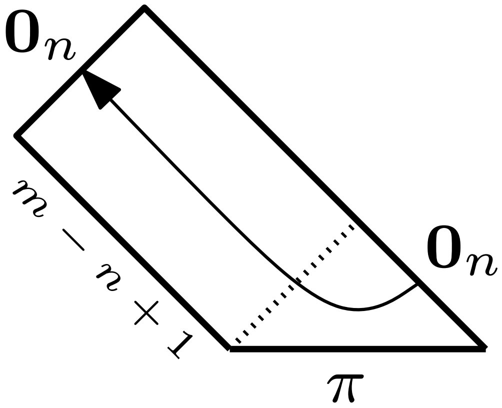
> For all σ, τ, π



This means that $\mathbf{b}\mathbf{t}^\pi = \mathbf{t}^\pi \widetilde{\mathbf{b}}$ for all $\pi \in \mathcal{D}_n$.

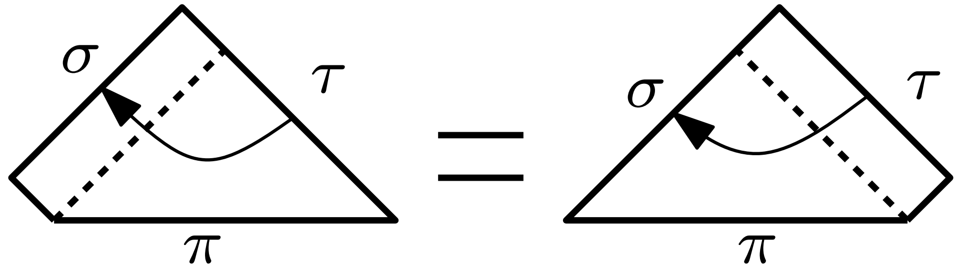
By repeatedly applying this relation in the expression for $A_\pi(m)$, we obtain that for all m,

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}^\pi\right)_{\mathbf{0}_n\mathbf{0}_n}$$



Theorem [N. '09] (conjectured in [Thapper '07]).

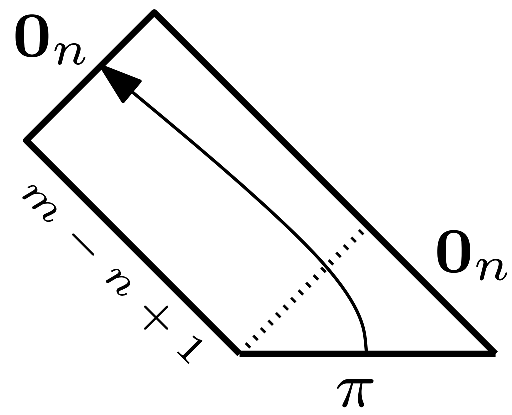
> For all σ, τ, π



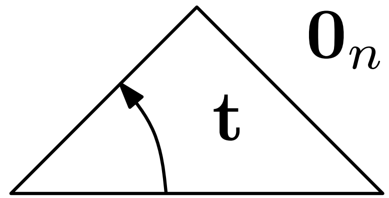
This means that $\mathbf{b}\mathbf{t}^{\pi} = \mathbf{t}^{\pi}\widetilde{\mathbf{b}}$ for all $\pi \in \mathcal{D}_n$.

By repeatedly applying this relation in the expression for $A_\pi(m)$, we obtain that for all m,

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}^{\pi}\right)_{\mathbf{0}_n\mathbf{0}_n}$$



Defining $(\mathbf{t})_{\sigma\pi} := t^{\pi}_{\sigma,\mathbf{0}_n}$



we can rewrite this as $A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n\pi}$

The matrix $\mathbf{t}$ for $n = 4$

$$
\begin{array}{cc}
 & \xrightarrow{\quad\pi\quad} \\
\sigma \Big\downarrow &
\begin{pmatrix}
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 60 & 95 & 50 & 165 & 20 & 95 & 180 & 165 & 534 \\
0 & 1 & 5 & 10 & 6 & 31 & 64 & 40 & 139 & 15 & 80 & 171 & 160 & 556 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 & 25 & 15 & 66 & 0 & 15 & 65 & 60 & 271 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 15 & 0 & 0 & 15 & 0 & 60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 34 & 6 & 31 & 64 & 65 & 225 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 21 & 0 & 6 & 25 & 31 & 135 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 0 & 31 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 25 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 34 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 21 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

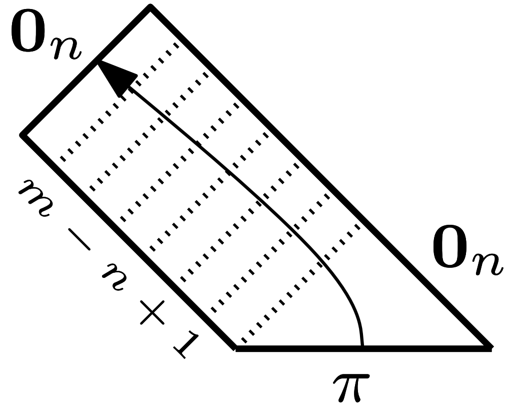
Note that $t^{\pi}_{\sigma\mathbf{0}_n} = 0$ unless $\sigma \le \pi$, and $t^{\pi}_{\pi\mathbf{0}_n} = 1$

Recurrence for A_X

Proposition [N. '09]

For $\pi \in \mathcal{D}_n$, and m an integer

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n \pi}$$

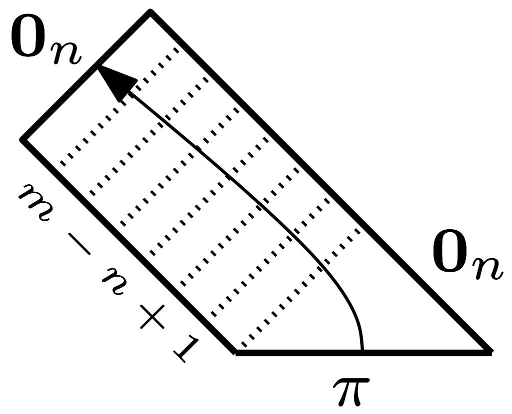


Recurrence for A_X

Proposition [N. '09]

For $\pi \in \mathcal{D}_n$, and m an integer

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n \pi}$$



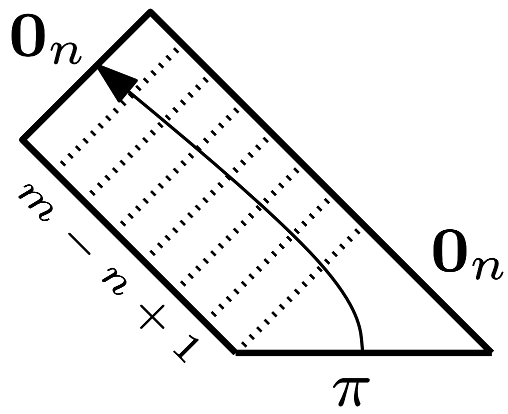
If $\mathcal{D}_n$ is linearly ordered *compatibly with* $\leq$ then $\mathbf{t}$ is a triangular matrix with 1s on its diagonal, so is invertible.

Definition [Thapper] We define the matrix $\mathbf{c}$ by

$$\mathbf{c} := \mathbf{t}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{t} \text{ or equivalently } \mathbf{b}\mathbf{t} = \mathbf{t}\mathbf{c}.$$

Recurrence for A_X

Proposition [N. '09]



For $\pi \in \mathcal{D}_n$, and m an integer

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n \pi}$$

If $\mathcal{D}_n$ is linearly ordered *compatibly with* $\leq$ then $\mathbf{t}$ is a triangular matrix with 1s on its diagonal, so is invertible.

Definition [Thapper] We define the matrix $\mathbf{c}$ by

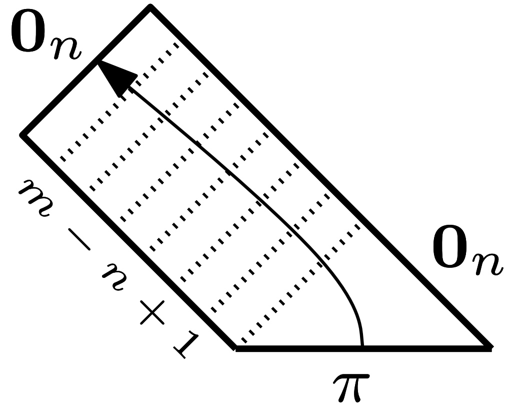
$$\mathbf{c} := \mathbf{t}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{t} \text{ or equivalently } \mathbf{b}\mathbf{t} = \mathbf{t}\mathbf{c}.$$

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n}\mathbf{b}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n \pi} = \left(\mathbf{b}^{m-n}\mathbf{t}\mathbf{c}\right)_{\mathbf{0}_n \pi} = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} \left(\mathbf{b}^{m-n}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n \alpha} \mathbf{c}_{\alpha\pi},$$

Recurrence for A_X

Proposition **[N. '09]**

> For $\pi \in \mathcal{D}_n$, and m an integer
>
> $$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n+1}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n\pi}$$



If $\mathcal{D}_n$ is linearly ordered *compatibly with* $\leq$ then $\mathbf{t}$ is a triangular matrix with 1s on its diagonal, so is invertible.

Definition [Thapper] We define the matrix $\mathbf{c}$ by

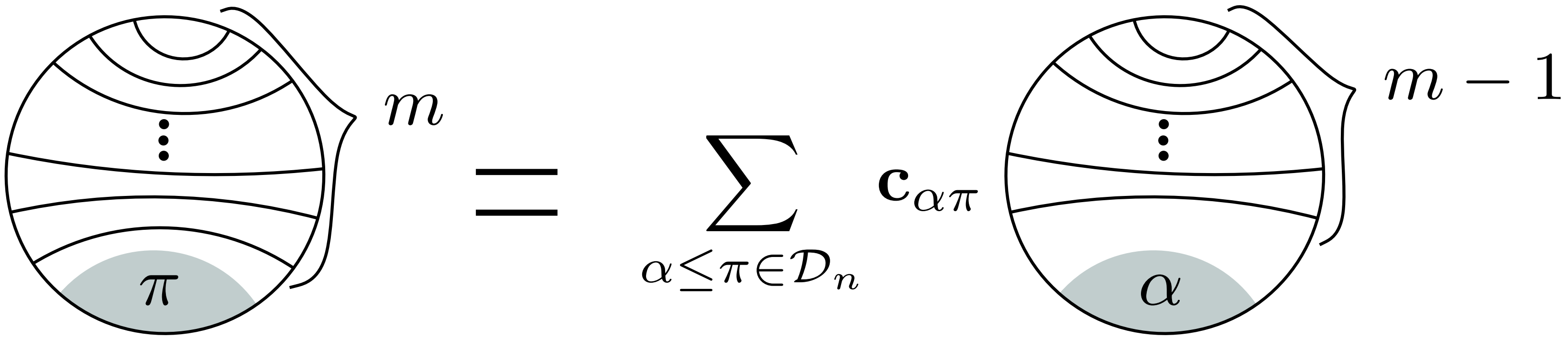
> $$\mathbf{c} := \mathbf{t}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{t} \text{ or equivalently } \mathbf{b}\mathbf{t} = \mathbf{t}\mathbf{c}.$$

$$A_\pi(m) = \left(\mathbf{b}^{m-n}\mathbf{b}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n\pi} = \left(\mathbf{b}^{m-n}\mathbf{t}\mathbf{c}\right)_{\mathbf{0}_n\pi} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}_n} \overbrace{\left(\mathbf{b}^{m-n}\mathbf{t}\right)_{\mathbf{0}_n\alpha}}^{A_\alpha(m-1)} \mathbf{c}_{\alpha\pi},$$

Recurrence for A_X

Theorem **[N. '09]**

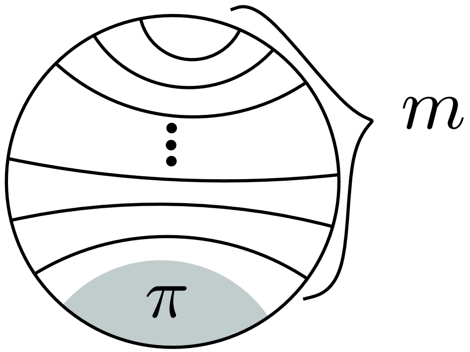
For $\pi \in \mathcal{D}_n$, $A_\pi(m) = \sum_{\alpha \leq \pi \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}_{\alpha\pi} A_\alpha(m-1)$



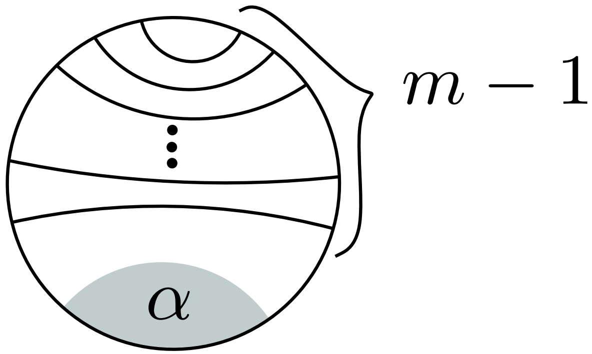
Recurrence for A_X

Theorem [N. '09]

For $\pi \in \mathcal{D}_n$, $A_\pi(m) = \sum_{\alpha \leq \pi \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}_{\alpha\pi} A_\alpha(m-1)$



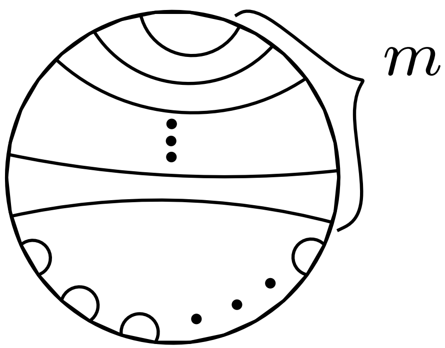
$$= \sum_{\alpha \leq \pi \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}_{\alpha\pi}$$



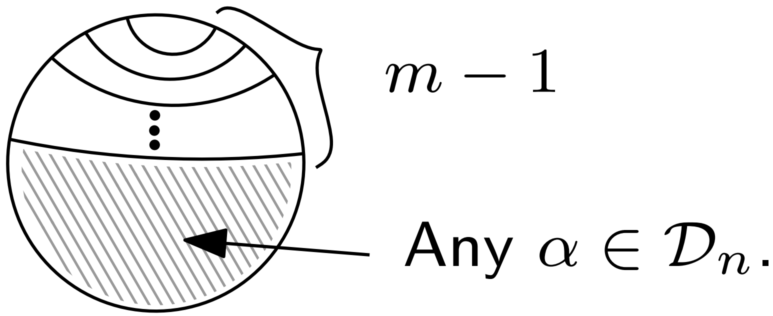
Conjecture [Thapper]

If $\pi = \mathbf{1}_n$, then $\mathbf{c}_{\alpha \mathbf{1}_n} = 1$ for any $\alpha \in \mathcal{D}_n$.

This implies



$$=$$



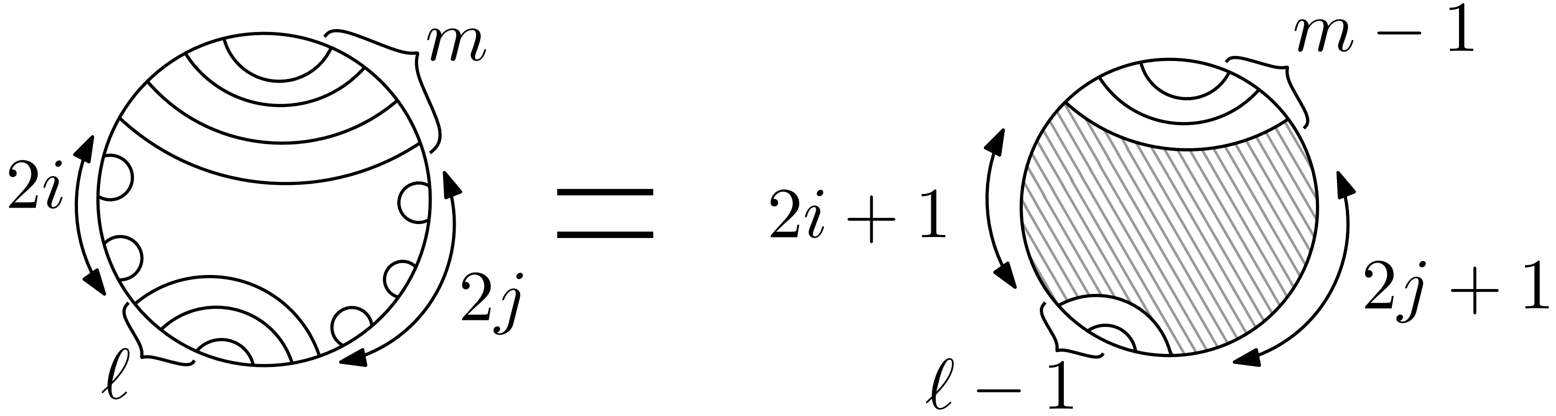
The matrix $\mathbf{c}$ for $n = 4$

$$
\begin{array}{cc}
 & \xrightarrow{\quad\pi\quad} \\
\alpha \Big\downarrow &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & {\color{blue}-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Recurrence for A_X

Why are these $\mathbf{c}_{\alpha\pi}$ nice for a recurrence ? Based on data for small n, these numbers conjecturally :

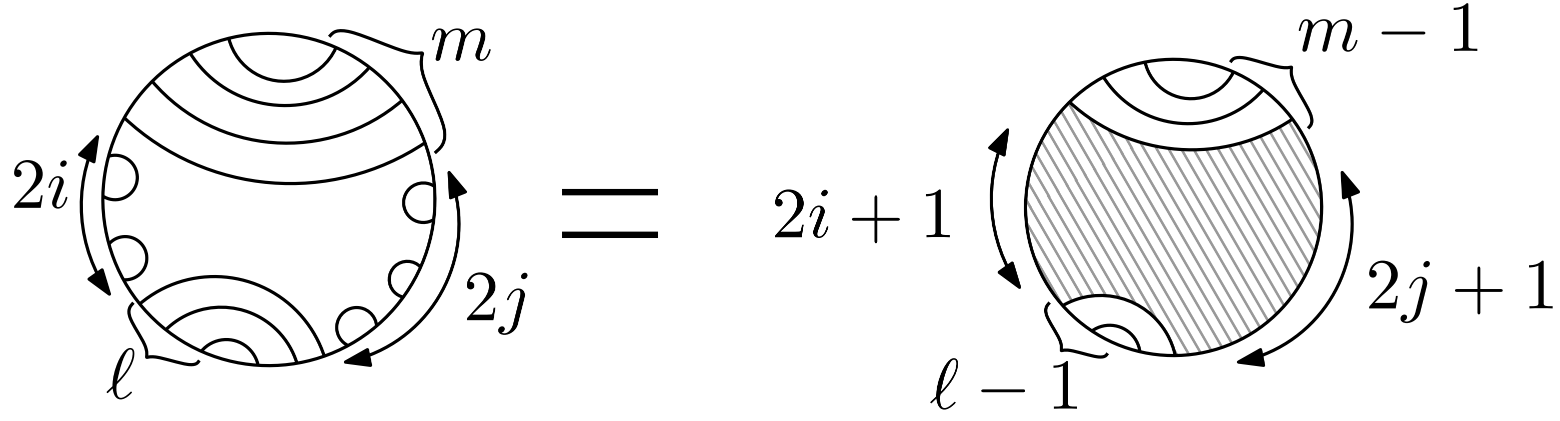
- give nice decomposition formulas, for instance :



Recurrence for A_X

Why are these $\mathbf{c}_{\alpha\pi}$ nice for a recurrence ? Based on data for small n, these numbers conjecturally :

- give nice decomposition formulas, for instance :

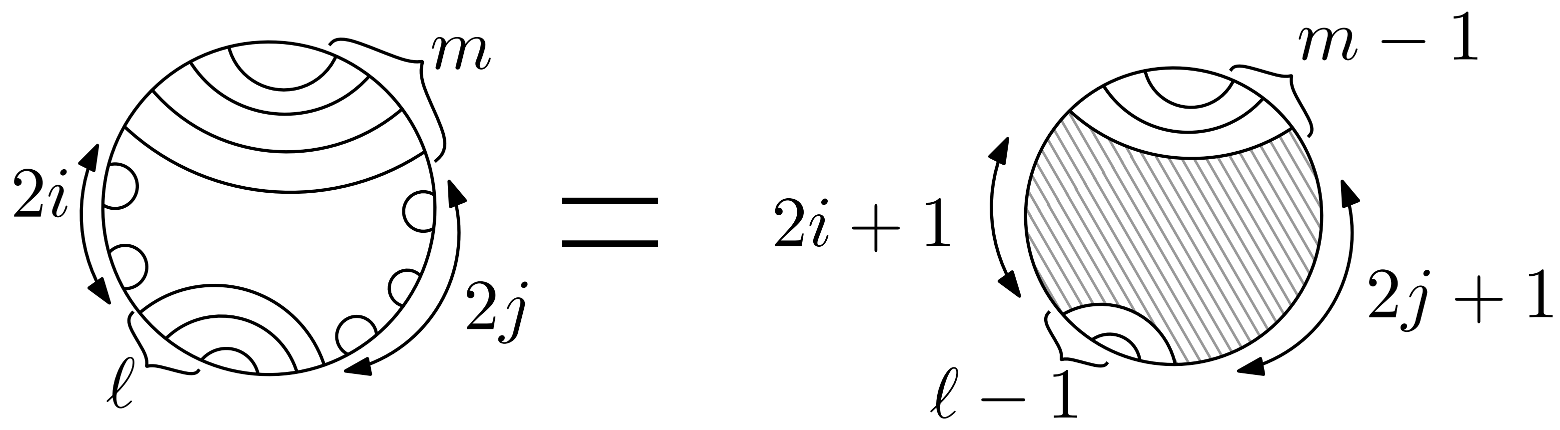


- verify $c_{\alpha\pi} = c_{\alpha^*\pi^*}$, $c_{0\alpha1,0\pi1} = c_{\alpha\pi}$, etc...

Recurrence for A_X

Why are these $\mathbf{c}_{\alpha\pi}$ nice for a recurrence ? Based on data for small n, these numbers conjecturally :

- give nice decomposition formulas, for instance :



- verify $c_{\alpha\pi} = c_{\alpha^*\pi^*}$, $c_{0\alpha1,0\pi1} = c_{\alpha\pi}$, etc...

Challenge : conjecture a direct combinatorial description of these coefficients.