Exercices sur les distances

Distance typique sur les arbres de Cayley

Un arbre de Cayley est un arbre non plongé (graphe connexe acyclique) dont les n sommets ($n \geq 1$) portent des étiquettes distinctes dans $[1..n]$. (On rappelle que pour le comptage de telles structures étiquetées on utilise les séries exponentielles, de la forme $\sum_n a_n x^n/n!$.) On rappelle aussi la formule d'inversion de Lagrange: si une série $f(z)$ satisfait une équation de la forme $f(z) = z\phi(f(z))$ avec ϕ une série à coefficients positifs ou nuls et $\phi(0) = 0$ alors

$$[z^n]f(z)^k = \frac{k}{n}[u^{n-k}]\phi(u)^n.$$

Q1. Soit $T(z)$ la série des arbres de Cayley enracinés en 1 sommet et comptés selon le nombre de sommets (pour les arbres de Cayley toutes les séries à venir comptent selon le nombre de sommets). Montrer que $T(z)$ satisfait:

$$T(z) = z \exp(T(z))$$

et en déduire que $[z^n]T(z) = n^{n-2}/(n-1)!$

Q2. Pour $k \geq 0$ soit $T_k(z)$ la série comptant les arbres de Cayley bi-pointés (un premier sommet pointé v_1, un second sommet pointé v_2, on autorise $v_1 = v_2$) dont les deux sommets pointés sont à distance k. Montrer que $T_k(z) = T(z)^{k+1}$ et en déduire que

$$[z^n]T_k(z) = \frac{(k+1)n^{n-k-2}}{(n-k-1)!}.$$

Q3. On note L_n la distance entre les 2 sommets pointés dans un arbre de Cayley bi-pointé aléatoire à n sommets. Soit $x > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(L_n = \lfloor x\sqrt{n} \rfloor) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} x e^{-x^2/2}.$$

Diamètre dans les arbres de Cayley

Q4. Pour $h \in \mathbb{Z}$ on note $y_h(z)$ la série comptant les arbres de Cayley de hauteur au plus h. Montrer que

$$\begin{cases} y_h(z) = 0 & \text{pour } h < 0 \\ y_h(z) = z \exp(y_{h-1}(z)) & \text{pour } h \geq 0. \end{cases}$$

Q5. On appelle chemin diamétral d'un arbre un chemin de longueur maximale dans l'arbre. Montrer que deux chemins diamétraux se croisent forcément, puis montrer qu'ils se croisent en leurs milieux.

Rq: on appelle "centre" de l'arbre le milieu commun de tous les chemins diamétraux (le centre est un sommet si le diamètre est pair, une arête si le diamètre est impair).

Q6. Pour $h \in \mathbb{Z}$ on note $q_h(z) = y_h(z) - y_{h-1}(z)$. Pour $d > 0$ on définit $F_d(z)$ comme la série comptant les arbres de Cayley (non enracinés) de diamètre d. Montrer que si d est impair, $d = 2h + 1$, alors

$$F_d(z) = \frac{1}{2} q_h(z)^2,$$

et que si d est pair, $d = 2h + 2$, alors

$$F_d(z) = z \cdot \left[\exp(q_h(z)) - 1 - q_h(z) \right] \cdot \exp(y_{h-1}(z)).$$

Diamètre dans les arbres plans

Un arbre plan T à n arêtes est codé par son chemin de Dyck (avec des pas $(+1, -1)$ ou $(+1, +1)$), vu comme une fonction continue $f : [0, 2n] \to \mathbb{R}_+$. On note $D(T)$ le diamètre de T.

Q7. Montrer que

$$D(T) = \mathrm{Max}_{0 \leq u \leq v \leq w \leq 2n} f(u) + f(w) - 2f(v).$$

Q8. On note T_n un arbre plan enraciné aléatoire à n arêtes. Montrer que la variable aléatoire $D(T_n)/\sqrt{n}$ converge en loi.