Tries et sources sans mémoire: de l'arithmétique à l'analyse

ALEA'10

Philippe Flajolet, Mathieu Roux, Brigitte Vallée

24 mars 2010

1. nombres de sommets internes d'un trie
   - présentation du problème
   - transformée de Mellin
   - problèmes analogues
2. pôles de la fonction zeta associée à la source
   - cas périodique
   - approximation de vecteurs
   - zone sans pôle
3. conclusion sur le problème de départ
   - conclusion dans le cas périodique
   - majoration du terme de reste dans le cas apériodique
   - optimalité du résultat obtenu dans le cas apériodique

1. nombres de sommets internes d'un trie
   - présentation du problème
   - transformée de Mellin
   - problèmes analogues
2. pôles de la fonction zeta associée à la source
   - cas périodique
   - approximation de vecteurs
   - zone sans pôle
3. conclusion sur le problème de départ
   - conclusion dans le cas périodique
   - majoration du terme de reste dans le cas apériodique
   - optimalité du résultat obtenu dans le cas apériodique

problème posé

On considère une source sans mémoire à r lettres.
On notera $1 > p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_r > 0$ les probabilités des différentes lettres.
On range X mots infinis indépendants issus de la source, dans un trie, où $X \sim \mathcal{P}(x)$ (c'est à dire $\mathbb{P}(X = k) = e^{-x}\frac{x^k}{k!}$).

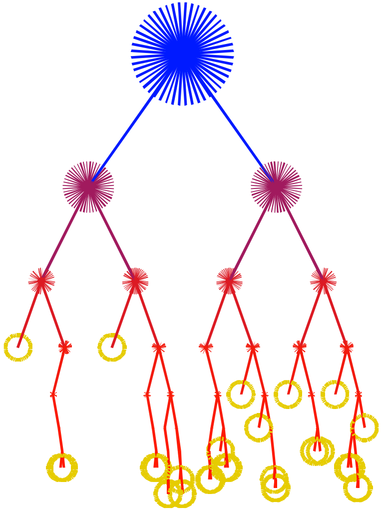
Combien l'arbre construit possédera-t-il
de sommets internes en moyenne ?

exemples

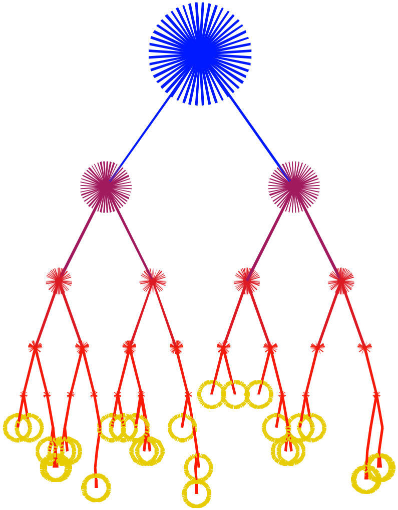
30 mots rangés

2 lettres
$p_1 = 0.4,\ p_2 = 0.6$

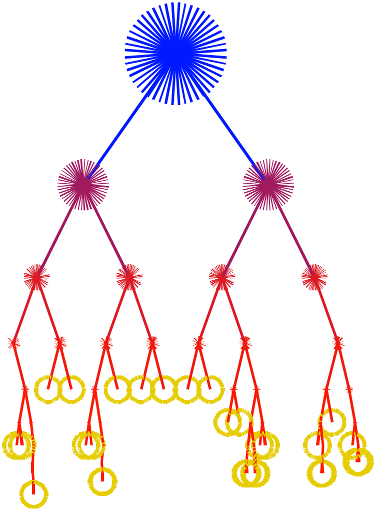
49 noeuds internes



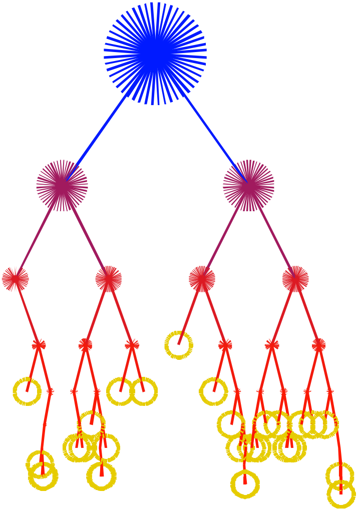
44 noeuds internes



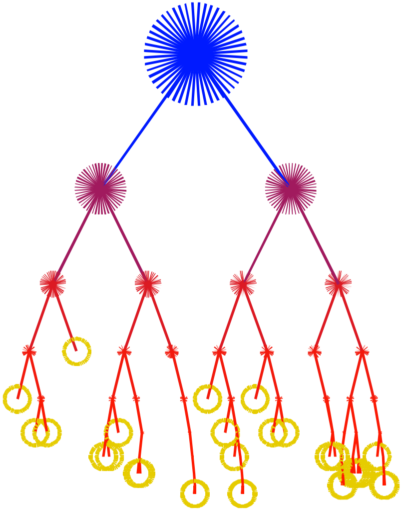
44 noeuds internes



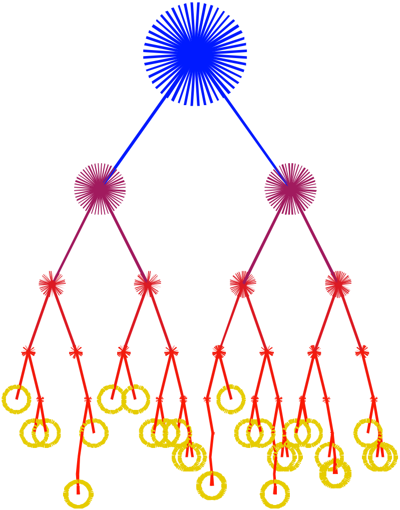
40 noeuds internes



44 noeuds internes

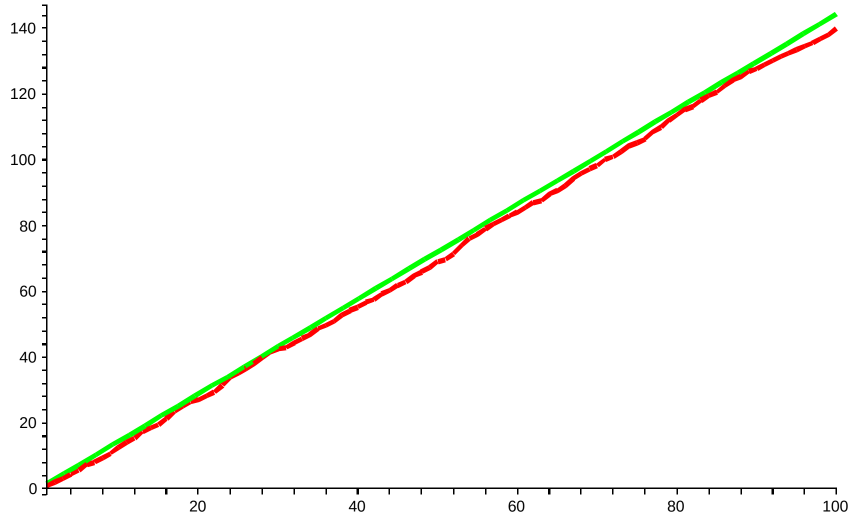


41 noeuds internes



2 lettres $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$

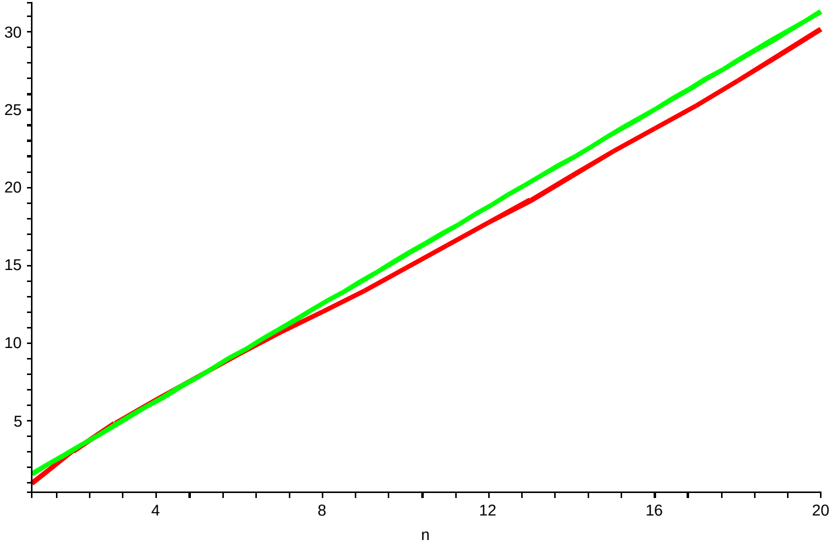
• On rajoute successivement 100 mots dans un trie, et on suit l'évolution du nombre de noeuds internes.
• On demande l'opération 10 fois, et on moyenne $\rightarrow$ courbe rouge.
• On superpose avec la courbe théorique $\rightarrow$ courbe verte.


140
120
100
80
60
40
20
0
20
40
60
80
100

analyse asymptotique

3 lettres $p_1 = 0.1,\ p_2 = 0.1,\ p_3 = 0.8$

• On rajoute successivement 20 mots dans un trie, et on suit l'évolution du nombre de noeuds internes.
• On demande l'opération 1000 fois,
et on moyenne $\rightarrow$ courbe rouge.
• On superpose avec la courbe théorique $\rightarrow$ courbe verte.


30
25
20
15
10
5
4
8
12
16
20
n

vers la réponse...

• Chaque sommet de l'arbre correspond à un préfixe.
• Un sommet interne correspond à un préfixe partagé par 2 mots rangés dans l'arbre.
• L'espérance du nombre de sommets internes correspond à la somme sur tous les préfixes w de l'espérance des fonctions caractéristiques des événements

"2 mots au moins commencent par w"

• On note N_w le nombre de mots commençant par le préfixe w.
• On cherche alors :

$$\overline{S} = \mathbb{E}\left(\sum_{w\in\Sigma^*} 1_{(N_w \geq 2)}\right) = \sum_{w\in\Sigma^*} \mathbb{P}(N_w \geq 2).$$

$$\overline{S}(x) = \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}$$

$$\overline{S}(x) = \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}$$

$\rightarrow$ la transformée de Mellin de cette somme harmonique fait apparaître la fonction zeta associée à la source :

$$\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s.$$

$$\overline{S}(x) = \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}$$

$\rightarrow$ la transformée de Mellin de cette somme harmonique fait apparaître la fonction zeta associée à la source :

$$\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s.$$

Dans le cas qui nous intéresse (source sans mémoire), les p_w avec w à j lettres sont exactement l'ensemble des monômes de degré j en les p_k, c'est à dire :

$$\Lambda_j(s) = \sum_{w \in \Sigma^j} p_w^s = (p_1 + \cdots + p_r)^{js}.$$

et donc :

$$\Lambda(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \Lambda_j(s) = \frac{1}{1 - \lambda(s)} \qquad \text{avec} \quad \lambda(s) = \sum_{k \in \{1, \ldots, r\}} p_k^s.$$

$$\overline{S}^*(s) = \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx \\
&= \left(\sum_{w \in \Sigma^*} p_w^{-s} \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(1 - (1+y) e^{-y}\right) y^{s-1} dy \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx \\
&= \left(\sum_{w \in \Sigma^*} p_w^{-s} \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + y) e^{-y}\right) y^{s-1} dy \right) \\
&= \Lambda(-s) \quad \mathcal{M}(1 - (1 + y) e^{-y}, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx \\
&= \left(\sum_{w \in \Sigma^*} p_w^{-s} \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + y) e^{-y}\right) y^{s-1} dy \right) \\
&= \Lambda(-s) \quad \mathcal{M}(1 - (1 + y) e^{-y}, s) \\
&= -(s+1)\Gamma(s) \quad \Lambda(-s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx \\
&= \left(\sum_{w \in \Sigma^*} p_w^{-s} \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(1 - (1+y) e^{-y}\right) y^{s-1} dy \right) \\
&= \Lambda(-s) \quad \mathcal{M}(1 - (1+y)e^{-y}, s) \\
&= -(s+1)\Gamma(s) \quad \Lambda(-s)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - (1+y)e^{-y} \underset{y \to 0}{\sim} y^2 \\ 1 - (1+y)e^{-y} \underset{y \to +\infty}{\sim} 1 \end{pmatrix} < -2, 0 >$$

$$
\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx \\
&= \left(\sum_{w \in \Sigma^*} p_w^{-s} \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + y) e^{-y}\right) y^{s-1} dy \right) \\
&= \Lambda(-s) \quad \mathcal{M}(1 - (1 + y) e^{-y}, s) \\
&= -(s+1)\Gamma(s) \quad \Lambda(-s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 - (1 + y) e^{-y} \underset{y \to 0}{\sim} y^2 \\ 1 - (1 + y) e^{-y} \underset{y \to +\infty}{\sim} 1 \end{pmatrix} < -2, 0 > \qquad \Lambda(-s) \quad < -\infty, -1 >
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{S}^*(s) &= \mathcal{M}(\overline{S}(x), s) = \int_0^{+\infty} \overline{S}(x) x^{s-1} dx \\
&= \sum_{w \in \Sigma^*} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + p_w x) e^{-p_w x}\right) x^{s-1} dx \\
&= \left(\sum_{w \in \Sigma^*} p_w^{-s} \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(1 - (1+y)e^{-y}\right) y^{s-1} dy \right) \\
&= \Lambda(-s) \quad \mathcal{M}(1 - (1+y)e^{-y}, s) \\
&= -(s+1)\Gamma(s) \quad \Lambda(-s)
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{c} 1 - (1+y)e^{-y} \underset{y \to 0}{\sim} y^2 \\ 1 - (1+y)e^{-y} \underset{y \to +\infty}{\sim} 1 \end{array} \right) < -2, 0 > \qquad \Lambda(-s) \quad < -\infty, -1 >
$$

donc $\overline{S}^*(s)$ définie sur $< -2, -1 >$.

On arrive finalement à

$$\overline{S}^*(s) = -(s+1)\Lambda(-s)\Gamma(s),$$

sur $< -2, -1 >$.

On arrive finalement à

$$\overline{S}^*(s) = -(s+1)\Lambda(-s)\Gamma(s),$$

sur $< -2, -1 >$.
Par transformée de Mellin inverse, on aboutit à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s)x^s ds.$$

pour tout $c \in (1,2)$ (par exemple $c = 3/2$).

On arrive finalement à

$$\overline{S}^*(s) = -(s+1)\Lambda(-s)\Gamma(s),$$

sur $< -2, -1 >$.
Par transformée de Mellin inverse, on aboutit à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1,2)$ (par exemple $c = 3/2$).
Pour estimer cette intégrale, on utilise le théorème des résidus.

On arrive finalement à

$$\overline{S}^*(s) = -(s+1)\Lambda(-s)\Gamma(s),$$

sur $< -2, -1 >$.
Par transformée de Mellin inverse, on aboutit à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1,2)$ (par exemple $c = 3/2$).
Pour estimer cette intégrale, on utilise le théorème des résidus.
$\rightarrow$ Il apparaît alors utile de connaître les pôles de Λ, c'est à dire les solutions de $\lambda(s) := \sum_{k \in \{1,\dots,r\}} p_k = 1$.

On arrive finalement à

$$\overline{S}^*(s) = -(s+1)\Lambda(-s)\Gamma(s),$$

sur $< -2, -1 >$.
Par transformée de Mellin inverse, on aboutit à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1, 2)$ (par exemple $c = 3/2$).
Pour estimer cette intégrale, on utilise le théorème des résidus.
$\rightarrow$ Il apparaît alors utile de connaître les pôles de Λ, c'est à dire les solutions de $\lambda(s) := \sum_{k \in \{1,\dots,r\}} p_k = 1$.
On notera $\mathcal{Z}$ cet ensemble.

On arrive finalement à

$$\overline{S}^*(s) = -(s+1)\Lambda(-s)\Gamma(s),$$

sur $< -2, -1 >$.
Par transformée de Mellin inverse, on aboutit à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1, 2)$ (par exemple $c = 3/2$).
Pour estimer cette intégrale, on utilise le théorème des résidus.
$\rightarrow$ Il apparaît alors utile de connaître les pôles de Λ, c'est à dire les solutions de $\lambda(s) := \sum_{k \in \{1,\ldots,r\}} p_k = 1$.
On notera $\mathcal{Z}$ cet ensemble.
On notera aussi $\mathcal{Z}_+ = \mathcal{Z} \cap \{\Im(s) > 0\}$.

- longueur de cheminement

$$\overline{P}^*(-s) = s\Gamma(-s)\Lambda(s), \qquad s \in < 1, 2 >$$

- longueur de cheminement

$$\overline{P}^*(-s) = s\Gamma(-s)\Lambda(s), \qquad s \in < 1, 2 >$$

- nombre de comparaisons effectuées lors du déroulement de l'algorithme QuickSort

$$\overline{Q}^*(-s) = \frac{2}{s(s-1)}\Gamma(-s)\Lambda(s), \qquad s \in < 1, 2 >$$

définition (vecteur périodique/apériodique)

Au vecteur de probabilités $\mathfrak{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, on associe les logarithmes

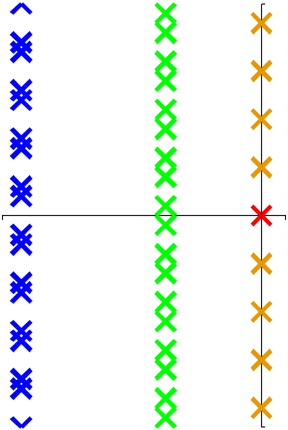
$$w_k = -\log p_k > 0,$$

et les quotients

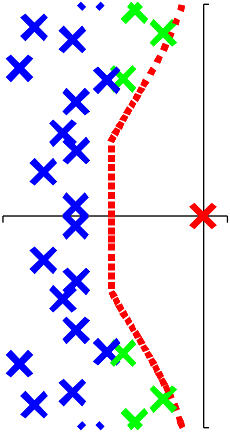
$$\alpha_{k,j} = \frac{w_j}{w_k}.$$

Si tous les $\alpha_{k,j}$ sont rationnels, alors $\mathfrak{p}$ est dit périodique. Dans le cas contraire, $\mathfrak{p}$ est dit apériodique.

La localisation des pôles est bien différente selon que $\mathfrak{p}$ est périodique ou apériodique.



$\mathfrak{p}$ périodique



$\mathfrak{p}$ apériodique

théorème (localisation des pôles dans le cas périodique)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathfrak{p}$ est périodique
2. $\mathcal{Z} \cap \{s : \Re(s) = 1\}$ contient un autre point que $s = 1$
3. il existe $\tau > 0$ tel que $\mathcal{Z} \cap \{s : \Re(s) = 1\} = 1 + i\tau\mathbb{Z}$
4. il existe $\tau > 0$ tel que $\lambda(s)$ est périodique de périodique $i\tau$.

Λ a une bande sans pôle à gauche de $\Re(s) = 1$.

idée de la preuve (facile !)

Puisque tous les $\alpha_{1,j}$ sont rationnels, en notant q_1 le PPCM des dénominateurs des fractions irréductibles, et q_j les numérateurs associés, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\alpha_{1,j} = \frac{q_j}{q_1} \qquad \text{et donc} \qquad p_j = p_1^{\alpha_{1,j}} = p_1^{q_j/q_1}.$$

idée de la preuve (facile !)

Puisque tous les $\alpha_{1,j}$ sont rationnels, en notant q_1 le PPCM des dénominateurs des fractions irréductibles, et q_j les numérateurs associés, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\alpha_{1,j} = \frac{q_j}{q_1} \qquad \text{et donc} \qquad p_j = p_1^{\alpha_{1,j}} = p_1^{q_j/q_1}.$$

En posant $\omega = p_1^{s/q_1}$, on se ramène à l'équation polynomiale :

$$\omega^{q_1} + \omega^{q_2} + \cdots + \omega^{q_r} = 1.$$

idée de la preuve (facile !)

Cette équation est :

• à racines simples parce qu'il n'y pas de diviseur commun à chacun des q_j

• de degré q_r (le plus grand des q_j).

idée de la preuve (facile !)

Cette équation est :
• à racines simples parce qu'il n'y pas de diviseur commun à chacun des q_j
• de degré q_r (le plus grand des q_j).

Chaque racine ω_0 implique une droite verticale de pôles :

$$s = \frac{-q}{w_1} [\ln|\omega_0| + 2ik\pi \arg(\omega_0)] \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

records d'approximation

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire centrée de x (représentant de x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ modulo $\mathbb{Z}$).
- Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on note :

$$\{\underline{x}\} = (\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_r\}) .$$

records d'approximation

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire centrée de x (représentant de x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ modulo $\mathbb{Z}$).
- Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on note :

$$\{\underline{x}\} = (\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_r\}).$$

définition (BSAD)

On dit que Q est un BSAD de $\underline{x}$ pour une certaine norme $||.||$ fixée, si pour tout $0 < q < Q$:

$$||\{Q\underline{x}\}|| < ||\{q\underline{x}\}||.$$

records d'approximation

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire centrée de x (représentant de x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ modulo $\mathbb{Z}$).
• Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on note :

$$\{\underline{x}\} = (\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_r\}) .$$

définition (BSAD)

On dit que Q est un BSAD de $\underline{x}$ pour une certaine norme $||.||$ fixée, si pour tout $0 < q < Q$:

$$||\{Q\underline{x}\}|| < ||\{q\underline{x}\}||.$$

• Si $\underline{x} \in \mathbb{R}^r \setminus \mathbb{Q}^r$, alors il existe une infinité de BSAD.
• pour $r = 1$, les BSAD sont les dénominateurs du développement en fraction continue.

fonction d'approximabilité

définition (fonction d'approximabilité)

On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction d'approximabilité du vecteur $\underline{x}$ pour la norme $||.||$ fixée, si

- f est croissante
- pour tout Q BSAD de $\underline{x}$,

$$f(Q) = \frac{1}{||\{Q\underline{x}\}||}.$$

fonction d'approximabilité

définition (fonction d'approximabilité)

On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction d'approximabilité du vecteur $\underline{x}$ pour la norme $||.||$ fixée, si

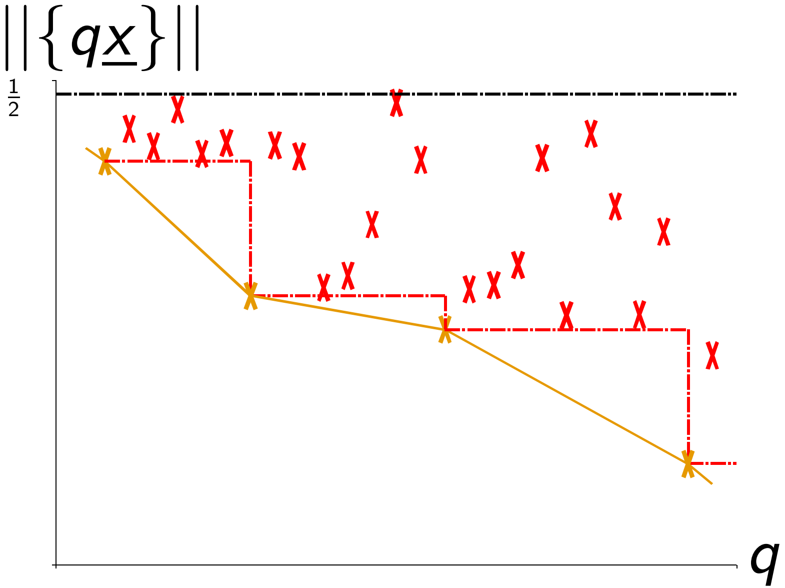
- f est croissante
- pour tout Q BSAD de $\underline{x}$,

$$f(Q) = \frac{1}{||\{Q\underline{x}\}||}.$$

Conséquence : pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(q) \geq \frac{1}{||\{q\underline{x}\}||}.$$

$\to$ l'égalité en les BSAD sera justifiée notamment quand on cherchera à prouver l'optimalité de la zone sans pôle


$||\{q\underline{x}\}||$
$\frac{1}{2}$
q

exposant d'approximation

définition

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$. On dit que le réel ν est un exposant d'approximation de α (pour la norme $||.||$) s'il existe une fonction puissance de degré $\nu - 1$ qui majore les fonctions d'approximation de α en les BSAD.

exposant d'approximation

définition

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$. On dit que le réel ν est un exposant d'approximation de α (pour la norme $||.||$) s'il existe une fonction puissance de degré $\nu - 1$ qui majore les fonctions d'approximation de α en les BSAD. C'est à dire s'il existe $A_\nu > 0$ tel que pour tout Q $\alpha - ||.||$-BSAD :

$$f(Q) = \frac{1}{||\{Q\alpha\}||} \leq A_\nu Q^{\nu-1}.$$

exposant d'approximation

définition

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$. On dit que le réel ν est un exposant d'approximation de α (pour la norme $||.||$) s'il existe une fonction puissance de degré $\nu - 1$ qui majore les fonctions d'approximation de α en les BSAD. C'est à dire s'il existe $A_\nu > 0$ tel que pour tout Q $\alpha - ||.||$-BSAD :

$$f(Q) = \frac{1}{||\{Q\alpha\}||} \leq A_\nu Q^{\nu-1}.$$

- La définition ne dépend pas de la norme.
- Conséquence : pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$\frac{1}{||\{q\alpha\}||} \leq A_\nu q^{\nu-1}.$$

exposant d'irrationalité

définition

L'exposant d'irrationalité $\mu(\alpha)$ de $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$ est la borne inférieure des exposants d'approximation de α.

exposant d'irrationalité

définition

L'exposant d'irrationalité $\mu(\alpha)$ de $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$ est la borne inférieure des exposants d'approximation de α.

$\rightarrow$ c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$\frac{1}{||\{q\alpha\}||} \leq A_\nu q^{\mu(\alpha)+\epsilon-1}.$$

intrication de l'approximation simultanée

Dans la suite, on notera $\alpha^{(k)} = (\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,r})$ la $k$ième ligne de la matrice (carrée) des $(\alpha_{k,l})$.
Remarque : la $k$ième composante de $\alpha^{(k)}$ vaut 1.
f_k désignera toujours une fonction d'approximation de $\alpha^{(k)}$ (pour une certaine norme).

intrication de l'approximation simultanée

Dans la suite, on notera $\alpha^{(k)} = (\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,r})$ la $k$ième ligne de la matrice (carrée) des $(\alpha_{k,l})$.
Remarque : la $k$ième composante de $\alpha^{(k)}$ vaut 1.
f_k désignera toujours une fonction d'approximation de $\alpha^{(k)}$ (pour une certaine norme).

proposition

• Fixons $k \in \{1, \ldots, r\}$, et q_k tel $|\{q_k \alpha_{k,\ell}\}| \leq \frac{w_\ell}{4w_r}$ pour tout ℓ. On note alors q_ℓ les numérateurs correspondants (c'est à dire tel que $q_k \alpha_{k,\ell} - q_\ell = \{q_k \alpha_{k,\ell}\}$).
Alors pour tout j, pour tout ℓ, $|\{q_j \alpha_{j,\ell}\}| \leq \frac{w_\ell}{2w_r}$, avec

$$q_j \alpha_{j,\ell} - q_\ell = \{q_j \alpha_{j,\ell}\}.$$

intrication de l'approximation simultanée

Dans la suite, on notera $\alpha^{(k)} = (\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,r})$ la $k$ième ligne de la matrice (carrée) des $(\alpha_{k,l})$.
Remarque : la $k$ième composante de $\alpha^{(k)}$ vaut 1.
f_k désignera toujours une fonction d'approximation de $\alpha^{(k)}$ (pour une certaine norme).

proposition

• Fixons $k \in \{1, \ldots, r\}$, et q_k tel $|\{q_k \alpha_{k,\ell}\}| \leq \frac{w_\ell}{4w_r}$ pour tout ℓ. On note alors q_ℓ les numérateurs correspondants (c'est à dire tel que $q_k \alpha_{k,\ell} - q_\ell = \{q_k \alpha_{k,\ell}\}$).
Alors pour tout j, pour tout ℓ, $|\{q_j \alpha_{j,\ell}\}| \leq \frac{w_\ell}{2w_r}$, avec

$$q_j \alpha_{j,\ell} - q_\ell = \{q_j \alpha_{j,\ell}\}.$$

→ c'est à dire qu'on considère des vecteurs approximants $(q_1, \ldots, q_r)$, l'un étant déterminé par les autres.

proposition (suite)

- On suppose en plus que q_k est un BSAD pour la pseudo-norme $||.||_T$ (ou pour n'importe quelle vraie norme). Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\ell > 0$:

$$f_k(q_k) \leq c f_\ell(q_\ell).$$

- Les $\alpha^{(k)}$ ont le même exposant d'irrationalité.

proposition (suite)

- On suppose en plus que q_k est un BSAD pour la pseudo-norme $||.||_T$ (ou pour n'importe quelle vraie norme). Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\ell > 0$:

$$f_k(q_k) \leq c f_\ell(q_\ell).$$

- Les $\alpha^{(k)}$ ont le même exposant d'irrationalité.

$\rightarrow$ on notera $\mu(\mathfrak{p})$ la mesure d'irrationalité commune des $\alpha^{(k)}$

heuristique de la recherche des pôles

Avec $s = \sigma + it$, $\lambda(s) = 1$ s'écrit :

$$p_1^\sigma e^{-iw_1 t} + p_2^\sigma e^{-iw_2 t} + \cdots + p_r^\sigma e^{-iw_r t} = 1.$$

heuristique de la recherche des pôles

Avec $s = \sigma + it$, $\lambda(s) = 1$ s'écrit :

$$p_1^\sigma e^{-iw_1 t} + p_2^\sigma e^{-iw_2 t} + \cdots + p_r^\sigma e^{-iw_r t} = 1.$$

Si σ est proche de 1 (plus petit forcément),

heuristique de la recherche des pôles

Avec $s = \sigma + it$, $\lambda(s) = 1$ s'écrit :

$$p_1^{\sigma} e^{-iw_1 t} + p_2^{\sigma} e^{-iw_2 t} + \cdots + p_r^{\sigma} e^{-iw_r t} = 1.$$

Si σ est proche de 1 (plus petit forcément),
alors les p_k^{σ} sont proches de p_k (plus grands),

heuristique de la recherche des pôles

Avec $s = \sigma + it$, $\lambda(s) = 1$ s'écrit :

$$p_1^\sigma e^{-iw_1 t} + p_2^\sigma e^{-iw_2 t} + \cdots + p_r^\sigma e^{-iw_r t} = 1.$$

Si σ est proche de 1 (plus petit forcément),
alors les p_k^σ sont proches de p_k (plus grands),
et donc les $e^{-iw_k t}$ doivent être proches de 1,

heuristique de la recherche des pôles

Avec $s = \sigma + it$, $\lambda(s) = 1$ s'écrit :

$$p_1^\sigma e^{-iw_1 t} + p_2^\sigma e^{-iw_2 t} + \cdots + p_r^\sigma e^{-iw_r t} = 1.$$

Si σ est proche de 1 (plus petit forcément),
alors les p_k^σ sont proches de p_k (plus grands),
et donc les $e^{-iw_k t}$ doivent être proches de 1,
c'est à dire que pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, il existe q_k tel que :

$$t \approx 2i\pi q_k / w_k.$$

les échelles

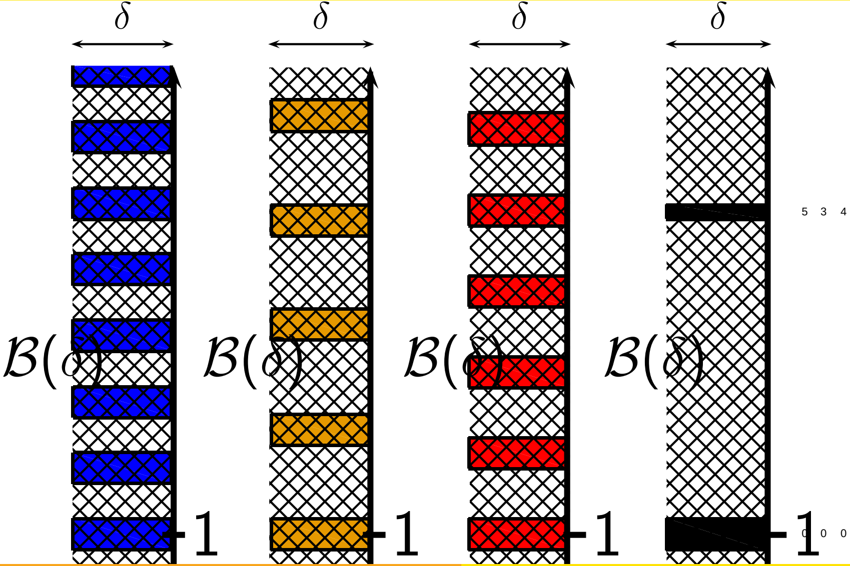
Pour la suite, on introduit :

les échelles

Pour la suite, on introduit :

- bande : $\mathcal{B}(\delta) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1 - \delta, 1]\}$

les échelles



les échelles

Pour la suite, on introduit :

- bande : $\mathcal{B}(\delta) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1]\}$
- rectangle de base :

$\mathcal{R}(\delta, \epsilon) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1], |t| \leq \epsilon / w_r\}$

les échelles

Pour la suite, on introduit :

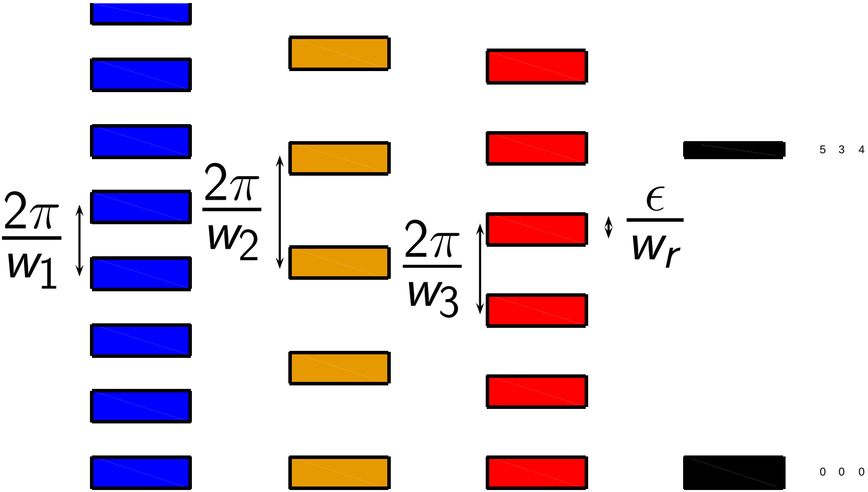
• bande : $\mathcal{B}(\delta) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1]\}$

• rectangle de base :

$\mathcal{R}(\delta, \epsilon) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1], |t| \leq \epsilon / w_r\}$

• rectangle translaté : $\mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$ translaté de $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ de $2i\pi q / w_k$

les échelles



les échelles

Pour la suite, on introduit :

• bande : $\mathcal{B}(\delta) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1]\}$

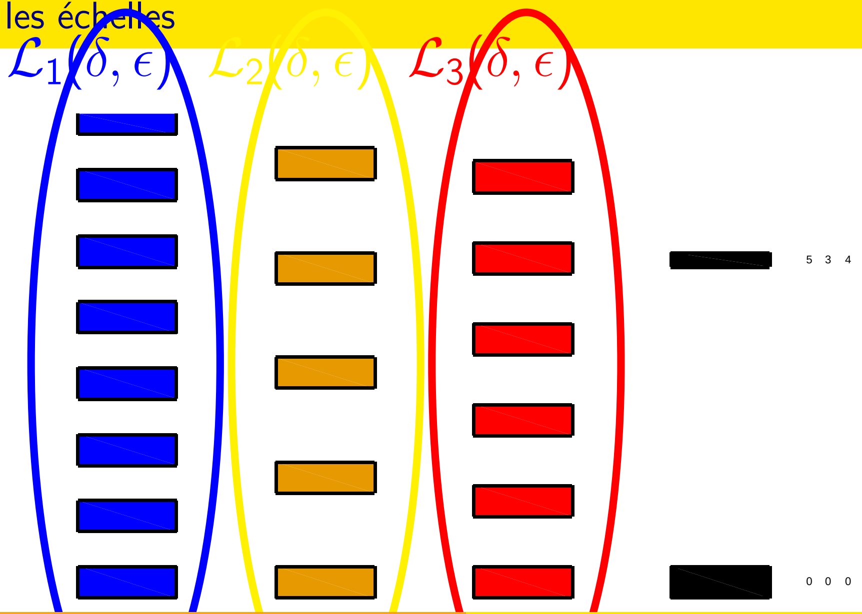
• rectangle de base :

$\mathcal{R}(\delta, \epsilon) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1], |t| \leq \epsilon/w_r\}$

• rectangle translaté : $\mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$ translaté de $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ de $2i\pi q/w_k$

• échelles régulières : $\mathcal{L}_k(\delta, \epsilon) = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$

les échelles



les échelles

Pour la suite, on introduit :

- bande : $\mathcal{B}(\delta) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1]\}$
- rectangle de base :

$\mathcal{R}(\delta, \epsilon) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1], |t| \leq \epsilon / w_r\}$

- rectangle translaté : $\mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$ translaté de $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ de $2i\pi q/w_k$
- échelles régulières : $\mathcal{L}_k(\delta, \epsilon) = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$
- échelle intersection : $\mathcal{L}(\delta, \epsilon) = \cap_{k \in \{1, \ldots, r\}} \mathcal{L}_k(\delta, \epsilon)$

les échelles

Pour la suite, on introduit :

• bande : $\mathcal{B}(\delta) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1]\}$

• rectangle de base :
$\mathcal{R}(\delta, \epsilon) = \{s = \sigma + it : \sigma \in]1-\delta, 1], |t| \leq \epsilon / w_r\}$

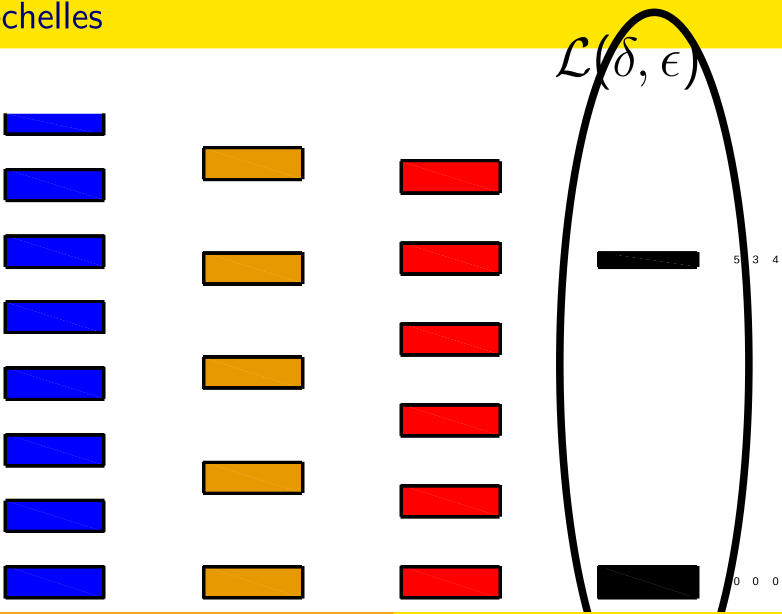
• rectangle translaté : $\mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$ translaté de $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ de $2i\pi q / w_k$

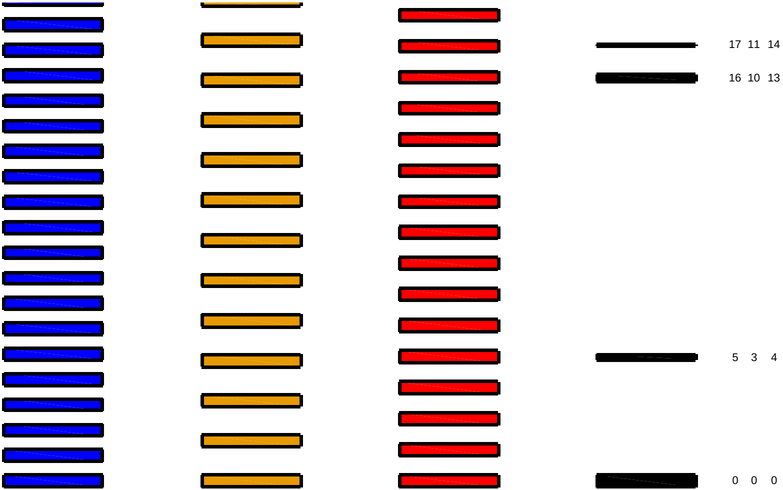
• échelles régulières : $\mathcal{L}_k(\delta, \epsilon) = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$

• échelle intersection : $\mathcal{L}(\delta, \epsilon) = \cap_{k \in \{1, \ldots, r\}} \mathcal{L}_k(\delta, \epsilon)$

$\rightarrow$ c'est à dire qu'un barreau de l'échelle-intersection, correspond à un r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$.

les échelles




17 11 14
16 10 13
5 3 4
0 0 0

étape 0

lemme 0 (barreaux et approximation simultanée)

Pour tout $0 < \epsilon < \pi/2$, le barreau de l'échelle-intersection associé au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ existe si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, le vecteur $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{U}(\epsilon) = \left\{ (u_\ell) \in \mathbb{R}^r ; |u_\ell| \leq \frac{\epsilon w_\ell}{w_r \pi} \right\}$$

étape 0

lemme 0 (barreaux et approximation simultanée)

Pour tout $0 < \epsilon < \pi/2$, le barreau de l'échelle-intersection associé au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ existe si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, le vecteur $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{U}(\epsilon) = \left\{ (u_\ell) \in \mathbb{R}^r ; |u_\ell| \leq \frac{\epsilon w_\ell}{w_r \pi} \right\}$$

$\rightarrow$ c'est à dire qu'un barreau correspond à une bonne approximation simultanée.

étape 0

lemme 0 (barreaux et approximation simultanée)

Pour tout $0 < \epsilon < \pi/2$, le barreau de l'échelle-intersection associé au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ existe si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, le vecteur $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{U}(\epsilon) = \left\{ (u_\ell) \in \mathbb{R}^r ; |u_\ell| \leq \frac{\epsilon w_\ell}{w_r \pi} \right\}$$

$\rightarrow$ c'est à dire qu'un barreau correspond à une bonne approximation simultanée.

De plus, d'après la proposition sur l'intrication du problème, pour $\epsilon \leq \pi/4$, un q_k détermine tous les autres de façon unique.

étape 1

lemme 1 (les pôles sont sur les barreaux)

Pour tout $0 < \epsilon < \pi/2$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, tel que pour tout $\delta \leq \delta(\epsilon)$,

$$Z \cap \mathcal{B}(\delta) \subset \mathcal{L}(\delta, \epsilon).$$

étape 1

lemme 1 (les pôles sont sur les barreaux)

Pour tout $0 < \epsilon < \pi/2$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, tel que pour tout $\delta \leq \delta(\epsilon)$,

$$Z \cap \mathcal{B}(\delta) \subset \mathcal{L}(\delta, \epsilon).$$

$\longrightarrow$ c'est à dire que les pôles proches de $\{\Re(s) = 1\}$ sont sur l'échelle-intersection

étape 1

lemme 1 (les pôles sont sur les barreaux)

Pour tout $0 < \epsilon < \pi/2$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, tel que pour tout $\delta \leq \delta(\epsilon)$,

$$Z \cap \mathcal{B}(\delta) \subset \mathcal{L}(\delta, \epsilon).$$

$\longrightarrow$ c'est à dire que les pôles proches de $\{\Re(s) = 1\}$ sont sur l'échelle-intersection

définition (paire compatible)

Avec les notations du lemme 1, une paire (ϵ, δ), telle que $\delta \leq \delta(\epsilon)$, est appelée compatible.

étape 2

En fait, on peut se placer dans une bande où les pôles sont prouvés uniformément séparés.

étape 2

En fait, on peut se placer dans une bande où les pôles sont prouvés uniformément séparés.
De cette façon on prouve le :

lemme 2 (au plus un pôle par barreau)

On peut choisir la paire compatible (ϵ, δ) tel que chaque barreau contienne au plus un pôle.

étape 2

En fait, on peut se placer dans une bande où les pôles sont prouvés uniformément séparés.
De cette façon on prouve le :

lemme 2 (au plus un pôle par barreau)

On peut choisir la paire compatible (ϵ, δ) tel que chaque barreau contienne au plus un pôle.

$\longrightarrow$ cet unique pôle est défini implicitement dans la suite

étape 3

lemme 3 (fonction définie implicitement)

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, il existe une paire compatible (ϵ, δ) et une fonction Δ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $\mathcal{U}(\epsilon)$, tels que :

- chaque barreau de $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ contient au plus un pôle
- l'éventuel pôle z du barreau correspondant au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ est donné tout à la fois par chacune des expressions suivantes, pour $k \in \{1, \ldots, r\}$:

$$z = 2i\pi \frac{q_k}{w_k} + \Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}).$$

étape 3

lemme 3 (fonction définie implicitement)

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, il existe une paire compatible (ϵ, δ) et une fonction Δ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $\mathcal{U}(\epsilon)$, tels que :

• chaque barreau de $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ contient au plus un pôle

• l'éventuel pôle z du barreau correspondant au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ est donné tout à la fois par chacune des expressions suivantes, pour $k \in \{1, \ldots, r\}$:

$$z = 2i\pi \frac{q_k}{w_k} + \Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}).$$

$\rightarrow$ l'emploi de l'échelle-intersection est alors pleinement justifiée : une bonne approximation simultanée (les $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ petits) entre dans le domaine de définition de Δ définie implicitement au voisinage de $\underline{0}$.

preuve de l'étape 3

$\lambda(s)$ est prolongé en

$$\lambda(s, \underline{u}) = \sum_{k=1}^{r} p_k^s \exp(-2i\pi u_k).$$

preuve de l'étape 3

$\lambda(s)$ est prolongé en

$$\lambda(s, \underline{u}) = \sum_{k=1}^{r} p_k^s \exp(-2i\pi u_k).$$

On exprime alors implicitement $s = \Delta(\underline{u})$ pour $\underline{u}$ voisin de $\underline{0}$ tel que $\lambda(s, \underline{u}) = 1$.

Si le barreau sur l'échelle-intersection correspondant au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ existe, alors en notant $s = 2i\pi \frac{q_k}{w_k} + s_k$ l'éventuel pôle qu'il contient, on a :

$$\lambda(s_k, \{q_k \alpha^{(k)}\}) = 1.$$

preuve de l'étape 3

$\lambda(s)$ est prolongé en

$$\lambda(s, \underline{u}) = \sum_{k=1}^{r} p_k^s \exp(-2i\pi u_k).$$

On exprime alors implicitement $s = \Delta(\underline{u})$ pour $\underline{u}$ voisin de $\underline{0}$ tel que $\lambda(s, \underline{u}) = 1$.
Si le barreau sur l'échelle-intersection correspondant au r-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ existe, alors en notant $s = 2i\pi \frac{q_k}{w_k} + s_k$ l'éventuel pôle qu'il contient, on a :

$$\lambda(s_k, \{q_k \alpha^{(k)}\}) = 1.$$

En ajustant alors ϵ et δ, on fait en sorte que

$$s_k = \Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}).$$

remarque et notations

Pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$,
$\{q_k \alpha^{(k)}\}$ appartient à l'hyperplan $\{u_k = 0\}$.

$\rightarrow$ On n'est intéressés finalement que par l'étude de Δ sur

$$\tilde{\mathcal{U}}(\epsilon) = \mathcal{U}(\epsilon) \bigcap \left(\cup_{k \in \{1,\ldots,r\}} \{u_k = 0\} \right).$$

étape 4

lemme 4 (norme adaptée)

Notons T la matrice Hessienne de $1 - \Re\Delta$.

étape 4

lemme 4 (norme adaptée)

Notons T la matrice Hessienne de $1 - \Re\Delta$.
La restriction de T à chaque hyperplan $\{u_k = 0\}$ est définie positive, donc définit une norme T_k.

étape 4

lemme 4 (norme adaptée)

Notons T la matrice Hessienne de $1 - \Re\Delta$.
La restriction de T à chaque hyperplan $\{u_k = 0\}$ est définie positive, donc définit une norme T_k.
On définit ainsi la norme de $u \in \tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$:

étape 4

lemme 4 (norme adaptée)

Notons T la matrice Hessienne de $1 - \Re\Delta$.
La restriction de T à chaque hyperplan $\{u_k = 0\}$ est définie positive, donc définit une norme T_k.
On définit ainsi la norme de $u \in \tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$:
en notant k tel que $u_k = 0$, on pose

$$||u||_T = ||u||_{T_k}.$$

étape 4

lemme 4 (norme adaptée)

Notons T la matrice Hessienne de $1 - \Re\Delta$.
La restriction de T à chaque hyperplan $\{u_k = 0\}$ est définie positive, donc définit une norme T_k.
On définit ainsi la norme de $u \in \tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$:
en notant k tel que $u_k = 0$, on pose

$$||u||_T = ||u||_{T_k}.$$

Alors pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, pour tout $u \in \tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$,

$$(1-\eta)||u||_T^2 \leq 1 - \Re\Delta(u).$$

fonction d'approximation globale

Il est naturel de la définir pour énoncer le théorème :

fonction d'approximation globale

Il est naturel de la définir pour énoncer le théorème :

définition

Pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, on considère une fonction d'approximation f_k de $\alpha^{(k)}$, relativement à la norme T_k.

fonction d'approximation globale

Il est naturel de la définir pour énoncer le théorème :

définition

Pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, on considère une fonction d'approximation f_k de $\alpha^{(k)}$, relativement à la norme T_k.
On dit alors que f est une fonction d'approximation globale si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \min_k f_k\left(\frac{w_k t}{2\pi}\right).$$

minoration de la distance des pôles à l'axe $\Re(s) = 1$

théorème

Soit f une fonction d'approximation globale de $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ pour la norme $||.||_T$.

minoration de la distance des pôles à l'axe $\Re(s) = 1$

théorème

Soit f une fonction d'approximation globale de $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ pour la norme $||.||_T$.
Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $s = \sigma + it \in \mathcal{Z}_+$, avec $t \geq 1$,

$$\sigma \leq 1 - \frac{1-\eta}{f^2((1+\epsilon)t)}.$$

minoration de la distance des pôles à l'axe $\Re(s) = 1$

théorème

Soit f une fonction d'approximation globale de $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ pour la norme $||.||_T$.
Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $s = \sigma + it \in \mathcal{Z}_+$, avec $t \geq 1$,

$$\sigma \leq 1 - \frac{1-\eta}{f^2((1+\epsilon)t)}.$$

$\rightarrow$ c'est à dire que

- mieux les $\alpha^{(k)}$ sont approximables
- plus grand est f
- plus petites est la zone sans pôle
- ... et plus grand sera le reste

preuve

Soit $\eta > 0$. On peut trouver une paire (ϵ, δ) telle que :

• les pôles de $\mathcal{B}(\delta)$ sont sur les barreaux de l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$

• un barreau correspond à tous les $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ dans $\mathcal{U}(\epsilon)$

• la fonction Δ défini implicitement sur $\mathcal{U}(\epsilon)$ donne r manières d'exprimer chaque pôle du barreau de $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ correspondant à $(q_1, \ldots, q_r)$

$$z = 2i\pi \frac{q_k}{w_k} + \Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}),$$

• avec la norme adaptée, pour tout $u \in \mathcal{U}(\epsilon)$:

$$(1 - \eta)||u||_T^2 \leq 1 - \Re\Delta(u).$$

fin de la preuve

La preuve en découle facilement. Soit $\sigma = \sigma + it$ un pôle, qu'on peut supposer dans $\mathcal{B}(\delta)$:

fin de la preuve

La preuve en découle facilement. Soit $\sigma = \sigma + it$ un pôle, qu'on peut supposer dans $\mathcal{B}(\delta)$:

• pour tout k, il est sur un $\mathcal{R}_k(q_k, \delta, \epsilon)$, c'est à dire $|t - \frac{2\pi q_k}{w_k}| \leq \frac{\epsilon}{w_r}$, c'est à dire avec $t \geq 1$ que

$$q_k \leq \frac{w_k}{2\pi} t \left(1 + \frac{\epsilon}{w_r}\right)$$

fin de la preuve

La preuve en découle facilement. Soit $\sigma = \sigma + it$ un pôle, qu'on peut supposer dans $\mathcal{B}(\delta)$:

• pour tout k, il est sur un $\mathcal{R}_k(q_k, \delta, \epsilon)$, c'est à dire $|t - \frac{2\pi q_k}{w_k}| \leq \frac{\epsilon}{w_r}$, c'est à dire avec $t \geq 1$ que

$$q_k \leq \frac{w_k}{2\pi} t \left(1 + \frac{\epsilon}{w_r}\right)$$

• donc pour tout k,

$$1 - \Re\Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}) \geq (1-\eta)||\{q_k \alpha^{(k)}\}||^2 \geq \frac{1-\eta}{f_k^2(q_k)} \geq \frac{1-\eta}{f_k^2\left(\frac{w_k}{2\pi} t(1 + \frac{\epsilon}{w_r})\right)}$$

fin de la preuve

La preuve en découle facilement. Soit $\sigma = \sigma + it$ un pôle, qu'on peut supposer dans $\mathcal{B}(\delta)$:

• pour tout k, il est sur un $\mathcal{R}_k(q_k, \delta, \epsilon)$, c'est à dire $|t - \frac{2\pi q_k}{w_k}| \leq \frac{\epsilon}{w_r}$, c'est à dire avec $t \geq 1$ que

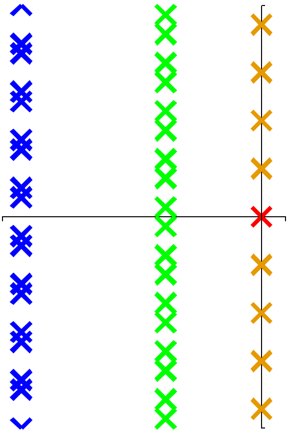
$$q_k \leq \frac{w_k}{2\pi} t \left(1 + \frac{\epsilon}{w_r}\right)$$

• donc pour tout k,

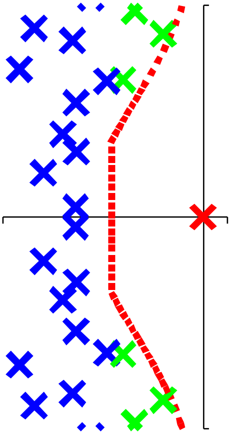
$$1 - \Re\Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}) \geq (1-\eta)||\{q_k \alpha^{(k)}\}||^2 \geq \frac{1-\eta}{f_k^2(q_k)} \geq \frac{1-\eta}{f_k^2\left(\frac{w_k}{2\pi} t(1 + \frac{\epsilon}{w_r})\right)}$$

• et finalement :

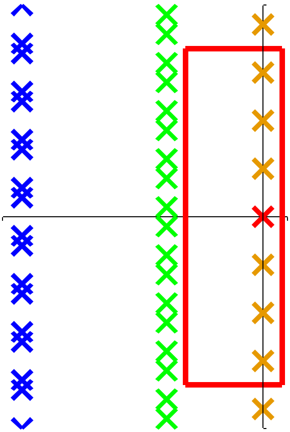
$$1 - \sigma \geq \frac{1-\eta}{f(t(1 + \frac{\epsilon}{w_r}))}.$$



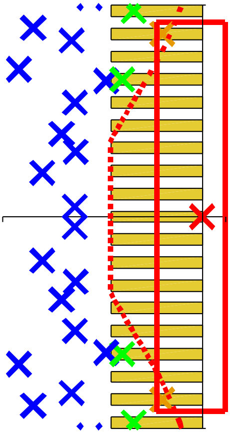
$\mathfrak{p}$ périodique



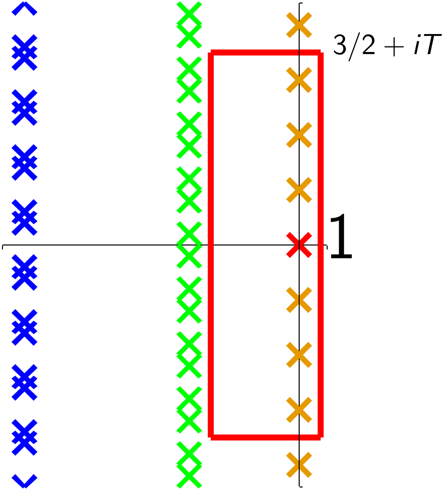
$\mathfrak{p}$ apériodique

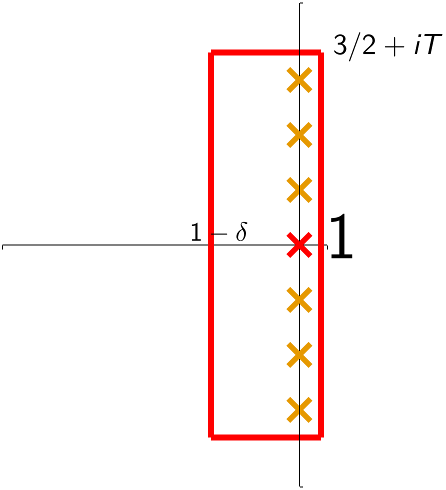


$\mathfrak{p}$ périodique



$\mathfrak{p}$ apériodique


$3/2 + iT$
1


$3/2 + iT$
$1 - \delta$
1

On conclut dés maintenant dans ce cas simple.
Par transformée de Mellin inverse, on était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1,2)$ (par exemple $c = 3/2$),

On conclut dés maintenant dans ce cas simple.
Par transformée de Mellin inverse, on était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1, 2)$ (par exemple $c = 3/2$), avec

$$\overline{S}^*(-s) = (s-1)\Lambda(s)\Gamma(-s)$$

de bande fondamentale $< -2, -1 >$, mais méromorphiquement prolongeable à $\mathbb{C}$.

Dans le cas qu'on considère, l'entropie de la source vaut :

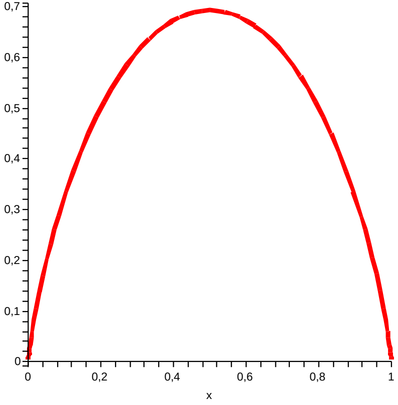
$$H = \sum_{k=1}^{r} p_k w_k = -\sum_{k=1}^{r} p_k \log p_k .$$

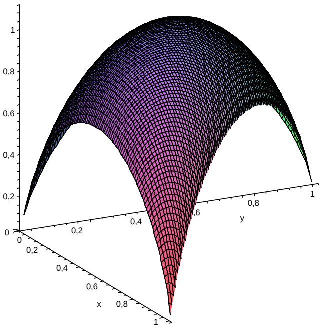
Dans le cas qu'on considère, l'entropie de la source vaut :

$$H = \sum_{k=1}^{r} p_k w_k = -\sum_{k=1}^{r} p_k \log p_k .$$

On a avec nos hypothèses : $0 < H < \log r$.
L'entropie mesure le caractère imprévisible de la source :

probas	entropie	trie	nombre de sommets internes
toutes égalent $1/r$	maximum	parfaitement équilibré	peu
dissemblables	plus petite	déséquilibré	plus
une beaucoup plus grande que les autres	très petite	très déséquilibré	beaucoup


0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
x


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
y
x

application du théorème des résidus

- en $s = 1$: pôle simple de résidu $1/H$

application du théorème des résidus

• en $s = 1$: pôle simple de résidu $1/H$

• pour peu qu'on passe à droite de 0, les autres pôles sont des pôles de Λ, imaginaires purs

application du théorème des résidus

• en $s = 1$: pôle simple de résidu $1/H$

• pour peu qu'on passe à droite de 0, les autres pôles sont des pôles de Λ, imaginaires purs
$\longrightarrow$ terme périodique en $\ln x$

application du théorème des résidus

• en $s = 1$: pôle simple de résidu $1/H$

• pour peu qu'on passe à droite de 0, les autres pôles sont des pôles de Λ, imaginaires purs
$\longrightarrow$ terme périodique en $\ln x$

• l'intégrale sur le bord gauche est en $x^{1-\delta}$ (avec $\delta > 0$) à cause de la décroissance exponentielle de Γ

application du théorème des résidus

- en $s = 1$: pôle simple de résidu $1/H$

- pour peu qu'on passe à droite de 0, les autres pôles sont des pôles de Λ, imaginaires purs
$\longrightarrow$ terme périodique en $\ln x$

- l'intégrale sur le bord gauche est en $x^{1-\delta}$ (avec $\delta > 0$) à cause de la décroissance exponentielle de Γ

- l'intégrale sur les côtés horizontaux tendent vers 0 car Λ périodique y est uniformément majorée, et Γ décroît exponentiellement

théorème dans le cas périodique

On a prouvé le théorème suivant :

théorème

Soit $\mathfrak{p}$ un vecteur de probabilités périodique.
Alors il existe $\delta > 0$ tel que le nombre moyen de sommets internes d'un trie où on range $X \sim \mathcal{P}(x)$ mots infinis issus d'une source sans mémoire avec alphabet fini de proba associée $\mathfrak{p}$ vaut :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + x\Phi(x) + O(x^{1-\delta}),$$

avec $\Phi(x)$ une fonction périodique en $\ln x$ de moyenne nulle.

termes principaux des problèmes analogues

- longueur de cheminement

$$\overline{P}^*(-s) = s\Gamma(-s)\Lambda(s), \qquad s \in < 1, 2 >$$

$$\to \overline{P}(x) \sim x \ln(x)/H$$

termes principaux des problèmes analogues

• longueur de cheminement

$$\overline{P}^*(-s) = s\Gamma(-s)\Lambda(s), \qquad s \in < 1, 2 >$$

$$\rightarrow \overline{P}(x) \sim x \ln(x)/H$$

• nombre de comparaisons effectuées lors du déroulement de l'algorithme QuickSort

$$\overline{Q}^*(-s) = \frac{2}{s(s-1)}\Gamma(-s)\Lambda(s), \qquad s \in < 1, 2 >$$

$$\rightarrow \overline{Q}(x) \sim x \ln^2(x)/H$$

exemple (par Donald Knuth dans les années 60')

- $r = 2$
- $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

exemple (par Donald Knuth dans les années 60')

- $r = 2$
- $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$\lambda(s) = 1 \Leftrightarrow 2e^{-s\ln(2)} = 1 \Leftrightarrow s = 1 + \frac{2ik\pi}{\ln 2}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

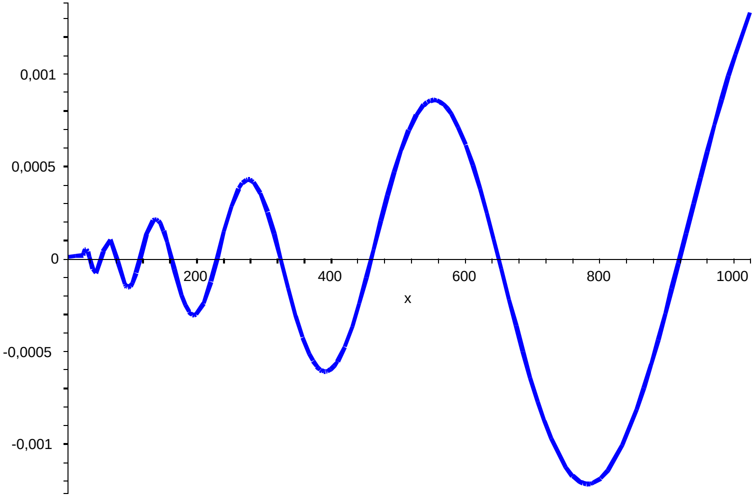
exemple (par Donald Knuth dans les années 60')

- $r = 2$
- $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

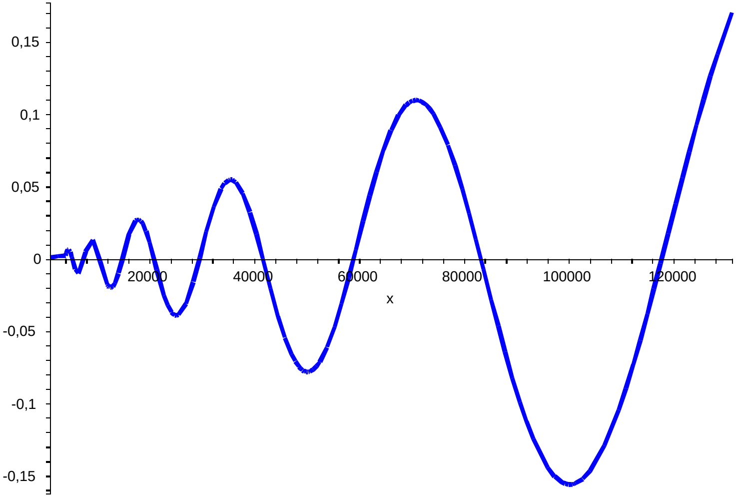
$$\lambda(s) = 1 \Leftrightarrow 2e^{-s\ln(2)} = 1 \Leftrightarrow s = 1 + \frac{2ik\pi}{\ln 2}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\boxed{\text{courbe de } \overline{S}(x) - x/H + 1 \text{ en fonction de } x}$

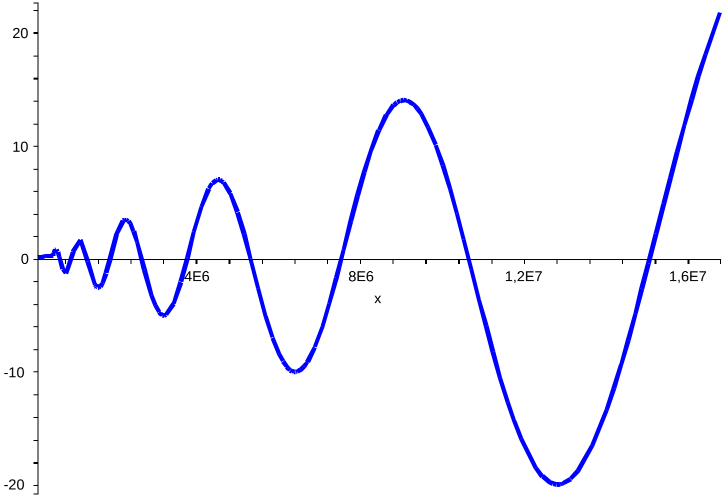
entre 8 et 1024



entre 1024 et 2^{17}



entre 2^{17} et 2^{24}

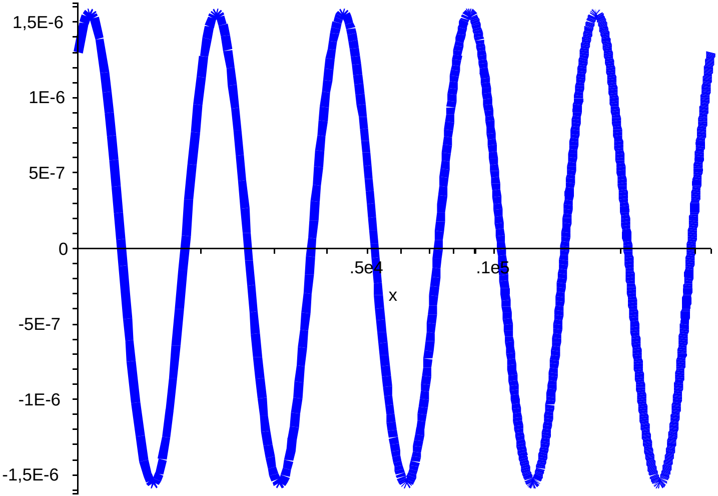


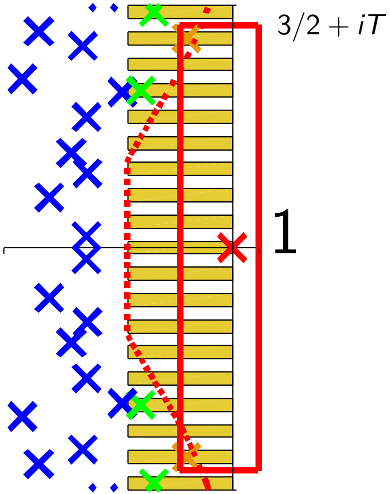
exemple

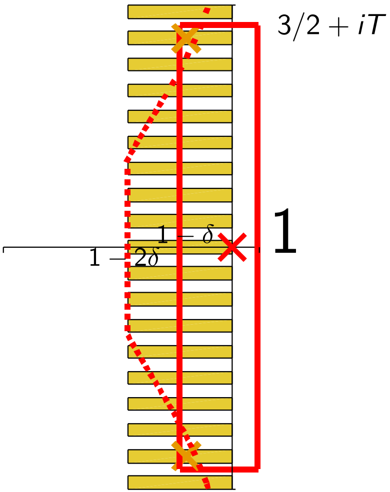
$\boxed{\text{courbe de } \frac{\overline{S}(x)-x/H+1}{x} \text{ en fonction de } x}$

- échelle logarithmique en abscisse

entre 2^{10} et 2^{15}




$3/2 + iT$
1


$3/2 + iT$
$1 - \delta$
$1 - 2\delta$
1

proposition

Soit $\mathfrak{p}$ un vecteur de probabilités apériodique. Alors il existe $\delta > 0$ tel que le nombre moyen de sommets internes d'un trie où on range $X \sim \mathcal{P}(x)$ mots infinis issus d'une source sans mémoire avec alphabet fini de proba associée $\mathfrak{p}$ vaut :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + x\Phi(x) + O(x^{1-\delta}),$$

avec

$$\Phi(x) = \sum_{\chi} \frac{(\chi - 1)\Gamma(-\chi)}{-\lambda'(\chi)} x^{\chi - 1},$$

où la somme porte sur tous les pôles χ de Λ tels que $1 - \delta \leq \Re(\chi) < 1$.

preuve

Par transformée de Mellin inverse, on était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1, 2)$ (par exemple $c = 3/2$),

preuve

Par transformée de Mellin inverse, on était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{S}^*(-s) x^s ds.$$

pour tout $c \in (1,2)$ (par exemple $c = 3/2$), avec

$$\overline{S}^*(-s) = (s-1)\Lambda(s)\Gamma(-s)$$

de bande fondamentale $< -2, -1 >$, mais méromorphiquement prolongeable à $\mathbb{C}$.

résidus

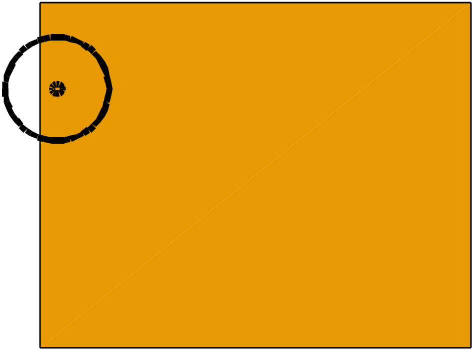
• en $s = 1$: pôle simple de résidu $1/H$
• pour peu qu'on prenne $1 - \delta > 0$, les autres pôles sont des pôles de Λ, et on peut choisir δ tels qu'ils soient tous simples, et on obtient bien le résidu annoncé

intégrale sur les côtés horizontaux

• On a fixé une échelle dont on passe entre les barreaux, disons l'échelle 1.
• donc, t reste uniformément loin des $\frac{2\pi}{w_1}$.
• et donc $\lambda(s)$ reste uniformément loin de 1 (c'est pour ça qu'on choisit δ dans la preuve de l'étape 1)
• c'est à dire que $(s-1)\Lambda(s)\Gamma(-s) \ll e^{(-\pi/2+\epsilon)t}$ sur ces côtés
• donc les 2 intégrales tendent vers 0 lorsque $T \to +\infty$

intégrale sur le côté vertical gauche

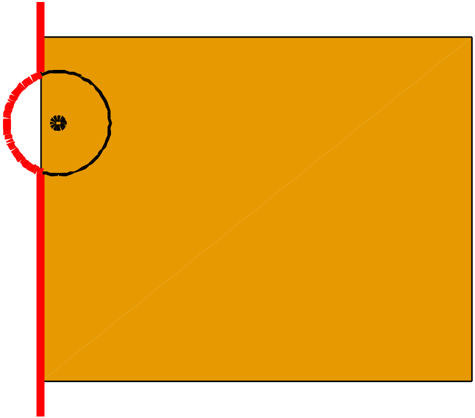
Le seul souci qu'on pourrait avoir,
c'est que le contour passe près d'un pôle...



intégrale sur le côté vertical gauche (suite)

Pour éviter cela, on déforme légèrement le contour.

$\longrightarrow$ possible car dans l'étape 2 on a prouvé l'uniforme séparabilité des pôles dans une bande $< 1 - 2\delta, 1 >$



cas où $\mathfrak{p}$ est diophantien

théorème

Si $\mathfrak{p}$ a un exposant d'irrationalité fini μ, alors pour tout $\epsilon > 0$

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + O(x \exp(-(\log x)^{1/(2\mu-1)-\epsilon})).$$

preuve

Idée

A x fixé, certains résidus comptent beaucoup plus que les autres.

preuve

Idée

A x fixé, certains résidus comptent beaucoup plus que les autres.

Dans toute la suite, les c_i sont des constantes peu importantes. On pose $L = \log x$. Soit $\nu > \mu(\mathfrak{p})$. On veut

$$\phi(x) = O\left(\exp(-(\log x)^{1/(2\nu-1)})\right).$$

preuve

Idée

A x fixé, certains résidus comptent beaucoup plus que les autres.

Dans toute la suite, les c_i sont des constantes peu importantes. On pose $L = \log x$. Soit $\nu > \mu(\mathfrak{p})$. On veut

$$\phi(x) = O\left(\exp(-(\log x)^{1/(2\nu-1)})\right).$$

Pour un pôle $\chi = \sigma + it$ donné (autre que 1), asymptotiquement en t :

- $|\chi - 1|\Gamma(-\chi) \leq c_1 e^{-c_2 t}$
- $\lambda'(\chi)$ est uniformément minoré
- pour tout $\mu(\mathfrak{p}) < \nu' < \nu$, $|x^{\chi-1}| = |e^{L(\chi-1)}| \leq e^{-c_3 L t^{2-2\nu'}}$.

preuve (suite)

En indiçant les pôles par des numéros de barreaux d'échelle, on obtient :

$$\phi(x) \leq \sum_{j\geq 1} c_1 e^{-c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}}.$$

preuve (suite)

En indiçant les pôles par des numéros de barreaux d'échelle, on obtient :

$$\phi(x) \leq \sum_{j\geq 1} c_1 e^{-c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}}.$$

La fonction

$$\psi : j \to -c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}$$

a un maximum unique en $j_0 = j_0(x) = c_6 L^{1/(2\nu'-1)}$,

preuve (suite)

En indiçant les pôles par des numéros de barreaux d'échelle, on obtient :

$$\phi(x) \leq \sum_{j \geq 1} c_1 e^{-c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}}.$$

La fonction

$$\psi : j \to -c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}$$

a un maximum unique en $j_0 = j_0(x) = c_6 L^{1/(2\nu'-1)}$,
avec $\psi(j_0) = -c_7 L^{1/(2\nu'-1)}$.

preuve (suite)

En indiçant les pôles par des numéros de barreaux d'échelle, on obtient :

$$\phi(x) \leq \sum_{j \geq 1} c_1 e^{-c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}}.$$

La fonction

$$\psi : j \rightarrow -c_4 j - c_5 L j^{2-2\nu'}$$

a un maximum unique en $j_0 = j_0(x) = c_6 L^{1/(2\nu'-1)}$,
avec $\psi(j_0) = -c_7 L^{1/(2\nu'-1)}$.
C'est à dire que les termes de la somme sont tous majorés par :

$$c_1 e^{-c_7 L^{1/(2\nu'-1)}}.$$

preuve (fin)

La somme est scindée en deux :

• $\sum_{j \leq \lfloor j_0 \rfloor}$ est la somme d'un nombre $\leq j_0$ (c'est pour ça qu'on a pris $\nu' < \nu$) de termes plus petits que le maximum

$$j_0 c_1 e^{-c_7 L^{1/(2\nu'-1)}} \leq c_8 e^{-L^{1/(2\nu-1)}}$$

• $\sum_{j > \lfloor j_0 \rfloor}$ est plus petit que la somme d'une série géométrique convergente, et on la majore par son premier terme

$$c_1 c_9 e^{-c_2(\lfloor j_0 \rfloor + 1)} \leq c_{10} e^{-L^{1/(2\nu-1)}}.$$

théorème

Si $\mathfrak{p}$ a une fonction d'approximation globale $\ll e^{ct}$ avec c constante (c'est à dire que pour tout q il existe $k \in \{1, \ldots, r\}$, tel que $||\{q\alpha^{(k)}\}|| \gg e^{-2\pi cq/w_k}$), alors il existe c' tel que :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + O\left(exp(-c' \log\log x)\right).$$

théorème

Si $\mathfrak{p}$ a une fonction d'approximation globale $\ll e^{ct}$ avec c constante (c'est à dire que pour tout q il existe $k \in \{1, \ldots, r\}$, tel que $||\{q\alpha^{(k)}\}|| \gg e^{-2\pi cq/w_k}$), alors il existe c' tel que :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + O\left(exp(-c' \log \log x)\right).$$

théorème

Si $\mathfrak{p}$ a une fonction d'approximation globale $\ll e^{ce^{c't}}$ avec c et c' constantes (c'est à dire que pour tout q il existe $k \in \{1, \ldots, r\}$, tel que $||\{q\alpha^{(k)}\}|| \gg e^{-ce^{2\pi c' q/w_k}}$), alors il existe c'' tel que :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + O\left(exp(-c'' \log \log \log x)\right).$$

- terme principal en $\Theta(x)$
- reste en $O(x\Phi(x))$ tel que :

approximabilité	reste
cas diophantien $f(t) \ll t^{\nu-1}$	$\Phi(x) = \exp(-(\log x)^{1/(2\nu-1)-\epsilon})$ $1 \ll x^{1-\epsilon} \ll x\Phi(x) \ll \frac{x}{\log x}$
$f(t) \ll \exp(ct)$	$\Phi(x) = \exp(-c' \log\log x)$ $1 \ll x^{1-\epsilon} \ll x\Phi(x) \ll \frac{x}{\log\log x}$
$f(t) \ll \exp\left(c\exp(c't)\right)$	$\Phi(x) = \exp(-c'' \log\log\log x)$ $1 \ll x^{1-\epsilon} \ll \frac{x}{\log x} \ll x\Phi(x) \ll \frac{x}{\log\log\log x}$

conséquence n˚1

Le cas diophantien est le cas générique : l'ensemble des $\mathfrak{p}$ de mesure d'irrationnalité strictement supérieure à $\frac{r}{r-1}$ est de mesure de Lebesgue nulle,
c'est à dire que la mesure d'irrationnalité est presque sûrement égale à $\frac{r}{r-1}$ c'est à dire que le reste est presque sûrement en

$$O(x\exp(-(\log x)^{1/(2\nu-1)-\epsilon})) = O(x\exp(-(\log x)^{(r-1)/(r+1)-\epsilon}))$$

r	O
2	$O(x\exp(-(\log x)^{1/3-\epsilon}))$
3	$O(x\exp(-(\log x)^{1/2-\epsilon}))$
4	$O(x\exp(-(\log x)^{3/5-\epsilon}))$
5	$O(x\exp(-(\log x)^{2/3-\epsilon}))$
6	$O(x\exp(-(\log x)^{5/7-\epsilon}))$

Le reste diminue avec r.

conséquence n°2

En prenant les p_k rationnels (ou même algébriques), d'après un théorème de Baker, si $\mathfrak{p}$ est apériodique, alors $\mathfrak{p}$ a un exposant d'irrationalité finie, c'est à dire que le reste est en :

$$O(x \exp(-(\log x)^{1/\theta})).$$

Cela correspond au cas générique car on comprend bien que sauf cas pathologiques $\mathfrak{p} = (1/2, 1/2)$, $\mathfrak{p} = (1/4, 1/4, 1/2)$, $\mathfrak{p} = (1/3, 1/3, 1/3)$, etc..., au moins un w_i/w_j sera irrationnel.

Question

Les bornes supérieures auxquelles on est arrivés sont-elles en accord avec la réalité, ou un artefact de la méthode employée ?

Question

Les bornes supérieures auxquelles on est arrivés sont-elles en accord avec la réalité, ou un artefact de la méthode employée ?

On était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + x\Phi(x) + O(x^{1-\delta}),$$

Question

Les bornes supérieures auxquelles on est arrivés sont-elles en accord avec la réalité, ou un artefact de la méthode employée ?

On était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + x\Phi(x) + O(x^{1-\delta}),$$

avec

$$\Phi(x) = \sum_{\chi} \frac{(\chi - 1)\Gamma(-\chi)}{-\lambda'(\chi)} x^{\chi - 1}.$$

Question

Les bornes supérieures auxquelles on est arrivés sont-elles en accord avec la réalité, ou un artefact de la méthode employée ?

On était arrivés à :

$$\overline{S}(x) = \frac{x}{H} + x\Phi(x) + O(x^{1-\delta}),$$

avec

$$\Phi(x) = \sum_{\chi} \frac{(\chi - 1)\Gamma(-\chi)}{-\lambda'(\chi)} x^{\chi - 1}.$$

On note $\chi = \sigma + it$. On a la forme de l'ordre de grandeur suivante :

$$\left| \frac{(\chi - 1)\Gamma(-\chi)}{-\lambda'(\chi)} x^{\chi - 1} \right| \approx e^{-Kt} e^{(\sigma - 1)L}$$

$\longrightarrow$ On peut penser que chaque pôle a une zone de prépondérance.

Soit $\chi = \sigma + it$ et $\chi' = \sigma' + it'$ deux pôles, avec $\sigma' < \sigma$.
En notant $T = e^{-Kt}e^{(\sigma-1)L}$ et $T' = e^{-Kt'}e^{(\sigma'-1)L}$ leur contribution, et $\ell(\chi, \chi') = K\frac{t'-t}{\sigma'-\sigma}$, on a :

- $T' \geq T$ pour $L \leq \ell(\chi, \chi')$
- $T' < T$ pour $L > \ell(\chi, \chi')$

Soit $\chi = \sigma + it$ et $\chi' = \sigma' + it'$ deux pôles, avec $\sigma' < \sigma$.
En notant $T = e^{-Kt}e^{(\sigma-1)L}$ et $T' = e^{-Kt'}e^{(\sigma'-1)L}$ leur contribution, et $\ell(\chi, \chi') = K\frac{t'-t}{\sigma'-\sigma}$, on a :

- $T' \geq T$ pour $L \leq \ell(\chi, \chi')$
- $T' < T$ pour $L > \ell(\chi, \chi')$

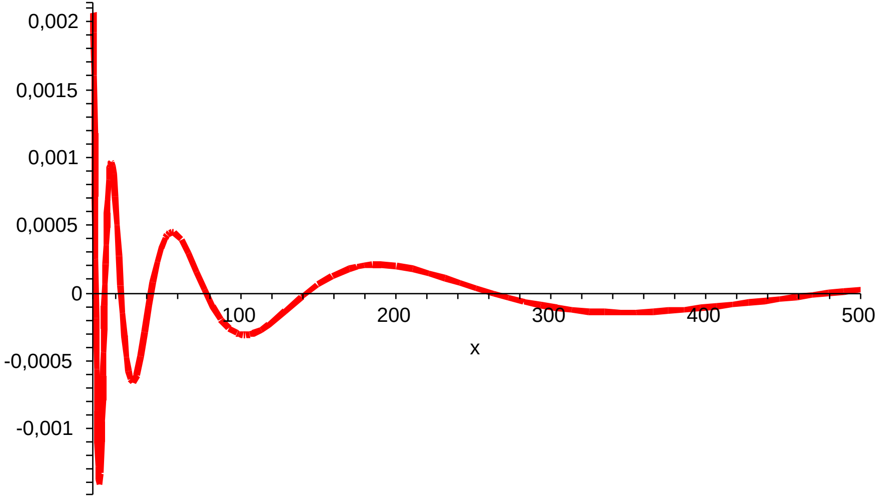
$\longrightarrow$ seuls les records sont amenés à dominer.
On les indexe par $\chi_j = \sigma_j + it_j$.
On pose $L_j = K\frac{t_{j+1}-t_j}{\sigma_{j+1}-\sigma_j}$. Les L_j bornent les domaines de prédominance en x (si on les suppose croissants).
Il est alors nécessaire de connaître plus précisément les pôles près de $\Re(s) = 1$.

exemple

- $r = 2$ lettres
- $p_1 = 1/3, \; p_2 = 2/3$

$\boxed{\text{courbe de } \overline{S}(x) - x/H + 1 \text{ en fonction de } x}$

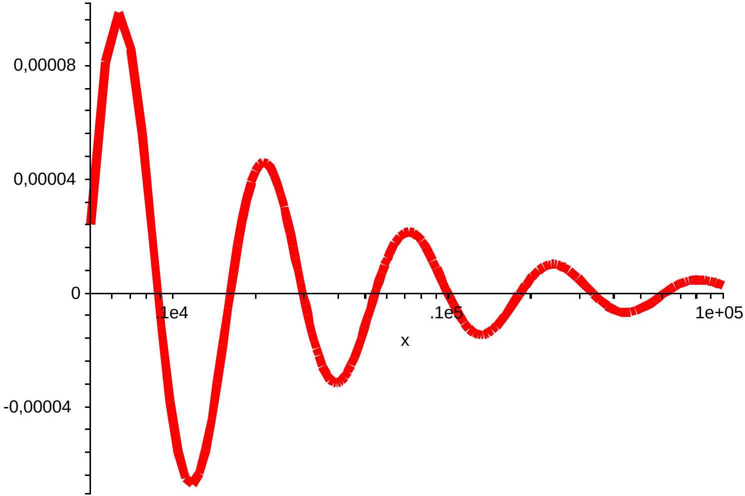
entre 5 et 500



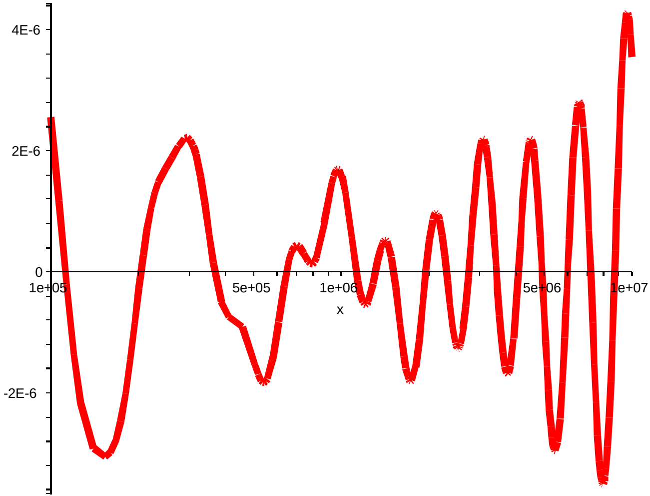
exemple

On passe à une échelle logarithmique en abscisse

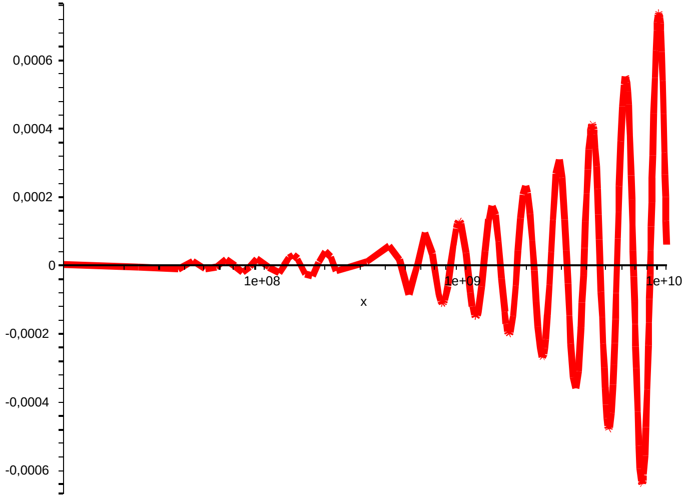
entre 500 et 100000



entre 100000 et 10^7



entre 10^7 et 10^{10}



majoration de la distance de pôles proches à l'axe $\Re(s) = 1$

En écrivant la majoration de Taylor dans l'autre sens, et en reprenant un preuve précédente, on peut montrer que :

majoration de la distance de pôles proches à l'axe $\Re(s) = 1$

En écrivant la majoration de Taylor dans l'autre sens, et en reprenant un preuve précédente, on peut montrer que :

théorème

Soit f une fonction d'approximation globale de $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ pour la norme $||.||_T$.
Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout Q $\alpha^{(1)}$-BSAD assez grand, le pôle associé $s = \sigma + it$ vérifie :

$$\sigma \geq 1 - \frac{1+\eta}{f^2((1-\epsilon)t)}.$$

majoration de la distance de pôles proches à l'axe $\Re(s) = 1$

En écrivant la majoration de Taylor dans l'autre sens, et en reprenant un preuve précédente, on peut montrer que :

théorème

Soit f une fonction d'approximation globale de $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ pour la norme $||.||_T$.
Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout Q $\alpha^{(1)}$-BSAD assez grand, le pôle associé $s = \sigma + it$ vérifie :

$$\sigma \geq 1 - \frac{1+\eta}{f^2((1-\epsilon)t)}.$$

$\longrightarrow$ comparer avec

$$\sigma \leq 1 - \frac{1-\eta}{f^2((1+\epsilon)t)}.$$

On avait essentiellement capturé la zone sans pôle.

exposant d'approximation inférieur

définition

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$. On dit que le réel ν est un exposant d'approximation inférieur de α (pour la norme $||.||$) s'il existe une fonction puissance de degré $\nu - 1$ qui minore les fonctions d'approximation de α en une infinité de BSAD.

exposant d'approximation inférieur

définition

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$. On dit que le réel ν est un exposant d'approximation inférieur de α (pour la norme $||.||$) s'il existe une fonction puissance de degré $\nu - 1$ qui minore les fonctions d'approximation de α en une infinité de BSAD.
C'est à dire s'il existe $B_\nu > 0$ tel que pour une infinité de Q $\alpha - ||.||$-BSAD :

$$f(Q) = \frac{1}{||\{Q\alpha\}||} \geq B_\nu Q^{\nu-1}.$$

exposant d'approximation inférieur

définition

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$. On dit que le réel ν est un exposant d'approximation inférieur de α (pour la norme $||.||$) s'il existe une fonction puissance de degré $\nu - 1$ qui minore les fonctions d'approximation de α en une infinité de BSAD.
C'est à dire s'il existe $B_\nu > 0$ tel que pour une infinité de Q $\alpha - ||.||$-BSAD :

$$f(Q) = \frac{1}{||\{Q\alpha\}||} \geq B_\nu Q^{\nu-1}.$$

$\longrightarrow$ La définition ne dépend pas de la norme.

exposant d'irrationalité inférieur

définition

L'exposant d'irrationalité inférieur $\mu_-(\alpha)$ de $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$ est la borne supérieure des exposants d'approximation de α.

$\rightarrow$ c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout Q $\alpha - ||.||$-BSAD :

$$f(Q) \geq B_\nu q^{\mu_-(\alpha)+\epsilon-1}.$$

exposant d'irrationalité inférieur

définition

L'exposant d'irrationalité inférieur $\mu_-(\alpha)$ de $\alpha \notin \mathbb{Q}^r$ est la borne supérieure des exposants d'approximation de α.

$\rightarrow$ c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout Q $\alpha - ||.||$-BSAD :

$$f(Q) \geq B_\nu q^{\mu_-(\alpha)+\epsilon-1}.$$

proposition

Les $\alpha^{(k)}$ ont le même exposant d'irrationalité inférieur.

On avait :

$$\phi(x) = O\left(\exp(-(\log x)^{1/(2\nu-1)})\right).$$

On avait :

$$\phi(x) = O\left(\exp(-(\log x)^{1/(2\nu-1)})\right).$$

On peut aussi espérer montrer qu'il existe $\theta > 1$ tel que pour une suite infinie de valeurs de x :

$$|\phi(x)| > exp\left(-(\log x)^{1/\theta}\right).$$

Merci
à Brigitte et Philippe

et

Merci de votre attention