

# Typage et Analyse Statique

## Exercices cours 2

Emmanuel Chailloux

Parcours Science et Technologie du Logiciel  
Master mention Informatique  
Sorbonne Université

année 2023-2024

# Typage SKK

On cherche à typer  $S K K = \lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz))(\lambda ab.a)(\lambda uv.u)$ ,  
pour cela on décompose le travail en 3 étapes :

1. construction de l'arbre de typage en introduisant de nouveaux types  $t_i$  si nécessaire (quand on ne sait pas le type d'un terme)
2. résolution des contraintes sur ces nouveaux types
3. effectuer les substitutions issues de cette résolution et construction de l'arbre de typage complet du terme

## Etape 1 : construction de l'arbre de typage

le type de  $SKK$  est le type de  $I$  (subject reduction), i.e.  $\alpha \rightarrow \alpha$

$$\frac{\frac{\frac{C \vdash x : t_4 \rightarrow t_3 \rightarrow \alpha \quad C \vdash z : t_4}{C \vdash xz : t_3 \rightarrow \alpha} \quad \frac{C \vdash y : t_5 \rightarrow t_3 \quad C \vdash z : t_5}{C \vdash yz : t_3}}{C = z : \alpha, y : t_1, x : t_2 \vdash xz(yz) : \alpha} \quad \frac{y : t_1, x : t_2 \vdash \lambda z. xz(yz) : \alpha \rightarrow \alpha}{x : t_2 \vdash \lambda y. \lambda z. xz(yz) : t_1 \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha}}{\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz) : t_2 \rightarrow t_1 \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} \quad \vdash (\lambda ab. a) : t_2}{\vdash (\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz))(\lambda ab. a) : t_1 \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} \quad \vdash (\lambda uv. u) : t_1}{\vdash (\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz))(\lambda ab. a)(\lambda uv. u) : \alpha \rightarrow \alpha}$$

introduction de nouvelles variables de type ( $t_i$ ) à l'application.

## Etape 2 : résolution des contraintes de types

$$t_1 = \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad (1)$$

$$t_2 = \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \quad (2)$$

$$t_3 = \beta \rightarrow \alpha \quad (3)$$

$$t_4 = \alpha \quad (4)$$

$$t_5 = \alpha \quad (5)$$

## Etape 3 : finalisation de l'arbre de typage

$$\begin{array}{c}
 \frac{C \vdash x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \quad C \vdash z : \alpha}{C \vdash xz : (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha} \quad \frac{C \vdash y : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \quad C \vdash z : \alpha}{C \vdash yz : (\beta \rightarrow \alpha)} \\
 \frac{C = z : \alpha, y : (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha), x : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \vdash xz(yz) : \alpha}{y : (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha), x : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \vdash \lambda z. xz(yz) : \alpha \rightarrow \alpha} \\
 \frac{x : t_2 \vdash \lambda y. \lambda z. xz(yz) : (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha}{\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz) : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} \quad \vdash (\lambda ab. a) : t_2 \\
 \frac{\vdash (\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz))(\lambda ab. a) : (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \quad \vdash (\lambda uv. u) : t_1}{\vdash (\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz))(\lambda ab. a)(\lambda uv. u) : \alpha \rightarrow \alpha}
 \end{array}$$

avec  $t_1 = (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha)$

et  $t_2 = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$

les deux  $K$ , arguments de  $S$ , n'ont pas le même type!!!