

TAS TD 1 - Lambda-Calcul

Le λ -calcul *fort* est défini par la syntaxe :

$$M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN \quad \text{ou } x \text{ est une variable}$$

et par les règles de sémantique opérationnelle à petit pas :

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow M[N/x]} \beta \qquad \frac{M \rightarrow M'}{MN \rightarrow M'N} \mu_l \qquad \frac{N \rightarrow N'}{MN \rightarrow MN'} \mu_r \qquad \frac{M \rightarrow M'}{\lambda x.M \rightarrow \lambda x.M'} \xi$$

Notations

- L'application est *associative à gauche* : $(MN)P = MNP$.
- Le corps d'une abstraction s'étend le plus à droite possible : $\lambda x.(MN) = \lambda x.MN$.
- Les suites d'abstractions sont contractées : $\lambda a.\lambda b.M = \lambda ab.M$.
- La clôture réflexive transitive de la réduction est notée \rightarrow^* .
- Sa clôture réflexive transitive symétrique est notée $=_\beta$.

1 Réductions

Réduire, quand c'est possible, les λ -termes suivants :

1. $I = \lambda x.x$
2. II
3. III
4. $K = \lambda xy.x$
5. KII
6. $S = \lambda xyz.(xz)(yz)$
7. $SIII$
8. SKK

2 Graphes de réduction

Le *graphe de réduction* d'un λ -terme a pour noeuds les réduits de M et une arête entre ces réduits pour chaque pas de réduction possible.

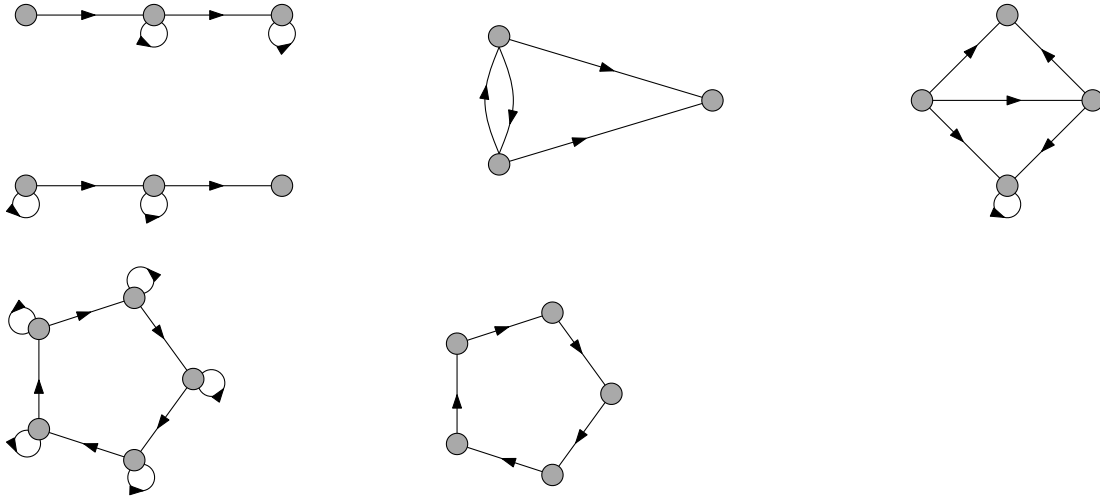
1. Donner les graphes de réduction des termes suivants en étiquetant les noeuds par les termes ($\delta = \lambda x.xx$).

$$Ix \quad I(Ix) \quad II(III) \quad \delta = \delta\delta \quad (\lambda x.\delta x)(\lambda x.\delta x) \quad (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$$

$$(\lambda x.I)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))$$

2. Question inverse :

Indice : on pourra utiliser les λ -termes $I, \delta, \Omega, F = \lambda x.I$ et $A = \lambda xy.yxy$.



3 Entiers de Church

L'interprétation de Church d'un entier n est le λ -terme $\llbracket n \rrbracket = \lambda f x. f^n x$, c'est à dire n itérations de la fonction f appliquées à x .

1. Ecrire $\llbracket 0 \rrbracket$ et $\llbracket 3 \rrbracket$
2. Ecrire les λ -termes interprétant les fonctions successeur, addition, multiplication et puissance.
On interprète les booléens par $T = K = \lambda xy.x$ et $\perp = 0 = \lambda xy.y$.
3. Donner une interprétation de `if then else`.
4. Comment interpréter les couples ?
5. Proposer un λ -terme décidant si un étudiant peut accéder au campus en fonction de son numéro étudiant.
6. Proposer un λ -terme interprétant la fonction prédécesseur .

4 Listes

On peut représenter la liste $[e_1, e_2, \dots, e_k]$ par le terme $\lambda cn. c e_1 (c e_2 \dots (c e_k n) \dots)$

1. Donner deux termes réalisant la liste vide et la construction d'une liste (à partir d'une liste et d'un élément).
2. Donner un λ -terme réalisant la concaténation de deux listes.
3. Donner un λ -terme réalisant l'extraction de la tête.
4. Donner un λ -terme réalisant un *map* sur une liste.
5. Donner un λ -terme réalisant un *reducelfold* sur une liste.
6. Donner un λ -terme calculant la longueur d'une liste.
7. Donner un λ -terme réalisant l'extraction de la queue.
8. Donner un λ -terme réalisant un *filter* sur une liste.
9. Expliquer comment représenter un arbre binaire en λ -calcul.

5 Indices de De Bruijn

Pour de nombreuses raisons, il peut être pratique de se débarrasser de l' α -conversion en ayant une représentation unique des λ -termes. La syntaxe du λ -calcul en indice de De Bruijn est définie par la grammaire :

$$M ::= n \mid MM \mid \lambda.M$$

où n est un entier naturel. Intuitivement n représente la variable liée par le $(n + 1)$ -ème λ obtenu en remontant le terme. Ainsi $\lambda\lambda.(10)(\lambda.20)$ désigne le λ -terme $\lambda xy.(xy)(\lambda z.xz)$.

1. Ecrire les règles décrivant la sémantique opérationnelle à petits pas du λ -calcul en indice de De Bruijn.
2. Ecrire la multiplication en indice de De Bruijn.
3. Donner la traduction du λ -calcul dans celui en indice de De Bruijn, et la traduction inverse.

6 Stratégies

Une stratégie de réduction pour le λ -calcul est une relation $\rightarrow_s \subseteq \rightarrow$ qui est déterministe.

1. Que signifie " \rightarrow_s est déterministe " ?

6.1 Call-by-value

On définit le λ -calcul en appel par valeur en définissant (x est une variable) :

- les termes : $M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN$
- les valeurs : $V ::= x \mid \lambda x.M$
- la sémantique opérationnelle à petits pas :

$$\frac{}{(\lambda x.M)V \rightarrow_v M[V/x]} \beta \qquad \frac{M \rightarrow_v M'}{MN \rightarrow_v M'N} \mu_l \qquad \frac{N \rightarrow_v N'}{VN \rightarrow_v VN'} \mu_r$$

1. Réduisez les termes $\delta(I\delta I)$ et $I(F\delta I)$ avec la relation \rightarrow_v .
2. Prouvez que \rightarrow_v est déterministe.
3. Cette présentation est appelée "left-to-right", quelle est la présentation "right-to-left" ?

6.2 Call-by-name

La sémantique du λ -calcul en appel par nom est :

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_n M[N/x]} \beta \qquad \frac{M \rightarrow_n M'}{MN \rightarrow_n M'N} \mu_l$$

1. Répondez aux questions précédentes pour l'appel par nom.

7 Combinateurs de point fixe

Un λ -terme M est un *point-fixe* d'un λ -terme F si $M =_\beta FM$. Un terme C est un *combinateur de point fixe* si pour tout terme F , CF est un point fixe de F .

On définit les termes suivants :

$$p = \lambda f x.f(xx) \qquad \mathbf{Y} = \lambda f.pf(pf) \qquad q = \lambda xy.y(xxy) \qquad \mathbf{Theta} = qq$$

1. Montrer que \mathbf{Y} et \mathbf{Theta} sont des combinateurs de point fixe.