On the existence of fixed points for the $\cdot/\mathrm{GI}/1/\infty$ queue

Jean Mairesse, and Balaji Prabhakar

Abstract

A celebrated theorem of Burke's asserts that when a Poisson process with mean inter-arrival time equal to α is input to a single server queue whose service times are i.i.d. exponentials (symbolically $\cdot/\mathrm{M}/1/\infty$) with mean $\beta < \alpha$, the equilibrium departure process from the queue is also a mean α Poisson process. In this sense mean α Poisson processes are "fixed points" for the $\cdot/\mathrm{M}/1/\infty$ queueing operator.

We consider the following question: For queues which dispense i.i.d. services of finite mean, but otherwise of arbitrary distribution (i.e. $\cdot/GI/1/\infty$ queues), do fixed points exist? We show that the answer is in the affirmative if the service time s satisfies: $P\{s \neq E[s]\} > 0$ and $\exists a > 0$, such that $E\left[s^{3+a}\right] < \infty$. More precisely, there are values $\alpha > E[s]$ such that there exists a unique ergodic fixed point of mean α. The set of such values $\mathcal{S}$ is infinite and satisfies $\inf\{u \in \mathcal{S}\} = E[s]$ and $\sup\{u \in \mathcal{S}\} = \infty$.

Résumé

Un résultat classique, du à Burke, dit que si le processus d'arrivée à une file d'attente de type $./1/M/\infty$ (un seul serveur, services exponentiels de moyenne β) est un processus de Poisson de moyenne $\alpha > \beta$, alors le processus stationnaire de départ est un processus de Poisson de moyenne α. Ainsi on peut dire que les processus de Poisson sont des "points fixes" pour la file d'attente $./1/M/\infty$. Dans cet article, on considère la question suivante : pour une file d'attente de type $./1/GI/\infty$ (temps de service i.i.d. et de moyenne finie, sans autre restriction sur la distribution), existe-t-il des points fixes ?

On montre que la réponse est positive si la durée de service s vérifie : $P\{s \neq E[s]\} > 0$ et $\exists a > 0$ tel que $E[s^{3+a}] < \infty$. Plus précisèment, il existe des valeurs de $\alpha > E[s]$ telles qu'il y ait un unique point fixe ergodique de moyenne α. L'ensemble $\mathcal{S}$ des valeurs pour lesquelles un tel point fixe existe est infini et vérifie $\inf\{u \in \mathcal{S}\} = E[s]$ et $\sup\{u \in \mathcal{S}\} = \infty$.