Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture

Thierry BOUSCH* Jean MAIRESSE†

30 may 2000

Abstract

Given an Iterated Function System (IFS) of topical maps verifying some conditions, we prove that the asymptotic height optimization problems are equivalent to finding the extrema of a continuous functional, the *average height*, on some compact space of measures. We give general results to determine these extrema, and then apply them to two concrete problems. First, we give a new proof of the theorem that the densest heaps of two Tetris pieces are sturmian. Second, we construct an explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture.

Résumé

Etant donné un système itéré de fonctions (IFS) topicales, vérifiant certaines conditions, nous montrons que les questions d'optimisation asymptotique de la hauteur sont équivalentes à la recherche des extrema d'une fonctionnelle continue, la *hauteur moyenne*, sur un certain espace compact de mesures. Nous présentons des résultats généraux permettant de déterminer ces extrema, puis appliquons ces méthodes à deux problèmes concrets. Premièrement, nous redémontrons que les empilements les plus denses de deux pièces de Tetris sont sturmiens. Deuxièmement, nous construisons un contre-exemple effectif à la conjecture de finitude de Lagarias et Wang.

Keywords: topical maps, max-plus automata, Tetris, sturmian processes, optimal control, finiteness conjecture

Mots-clés: applications topicales, automates max-plus, Tetris, processus sturmiens, contrôle optimal, conjecture de finitude

AMS classification (2000): 49J27, 37D35

*Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: `Thierry.Bousch@math.u-psud.fr`.

†LIAFA, CNRS et Université Paris 7, case 7014, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: `Jean.Mairesse@liafa.jussieu.fr`.