Asymptotic Results on Infinite Tandem Queueing Networks

F. Baccelli, A. Borovkov, and J. Mairesse

Abstract

We consider an infinite tandem queueing network consisting of $\cdot/GI/1/\infty$ stations with i.i.d. service times. We investigate the asymptotic behavior of $t(n,k)$, the inter-arrival times between customers n and $n+1$ at station k, and that of $w(n,k)$, the waiting time of customer n at station k. We establish a duality property by which $w(n,k)$ and the "idle times" $y(n,k)$ play symmetrical roles. This duality structure, interesting by itself, is also instrumental in proving some of the ergodic results. We consider two versions of the model: the quadrant and the half-plane. In the quadrant version, the sequences of boundary conditions $\{w(0,k),\ k \in \mathbb{N}\}$ and $\{t(n,0),\ n \in \mathbb{N}\}$, are given. In the half-plane version, the sequence $\{t(n,0), n \in \mathbb{Z}\}$ is given. Under appropriate assumptions on the boundary conditions and on the services, we obtain ergodic results for both versions of the model. For the quadrant version, we prove the existence of temporally ergodic evolutions and of spatially ergodic ones. Furthermore, the process $\{t(n,k), n \in \mathbb{N}\}$ converges weakly with k to a limiting distribution, which is invariant for the queueing operator. In the more difficult half plane problem, the aim is to obtain evolutions which are both temporally and spatially ergodic. We prove that $1/n \sum_{k=1}^{n} w(0,k)$ converges almost surely and in L_1 to a finite constant. This constitutes a first step in trying to prove that $\{t(n,k), n \in \mathbb{Z}\}$ converges weakly with k to an invariant limiting distribution.

Résumé

On s'intéresse à une suite infinie de files d'attente en série de type $\cdot/GI/1/\infty$, les temps de service aux différentes files étant i.i.d. On étudie le comportement asymptotique de $t(n,k)$, l'inter-arrivée entre les clients n et $n+1$ à la file k, et celui de $w(n,k)$, le temps d'attente du client n à la file k. On démontre l'existence d'une dualité entre les temps d'attente des clients, $w(n,k)$, et ceux des files, $y(n,k)$. Cette dualité est utilisée dans la suite pour obtenir certains résultats ergodiques. On considère deux versions différentes du modèle : le demi-plan et le quart-de-plan. Les conditions initiales sont $\{w(0,k),\ k \in \mathbb{N}\}$ et $\{t(n,0),\ n \in \mathbb{N}\}$ pour le quart-de-plan et $\{t(n,0), n \in \mathbb{Z}\}$ pour le demi-plan. Sous certaines hypothèses sur les conditions initiales et sur les temps de service, on démontre des résultats asymptotiques pour les deux versions du modèle. Pour le quart-de-plan, on montre l'existence de régimes ergodiques en temps et de régimes ergodiques en espace. Le processus $\{t(n,k), n \in \mathbb{N}\}$ converge en loi vers un processus limite invariant. Le problème du demi-plan est plus compliqué, l'objectif étant d'obtenir des régimes ergodiques à la fois en temps et en espace. On montre que le temps d'attente moyen d'un client, $1/n \sum_{k=1}^{n} w(0,k)$, converge p.s. et dans L_1 vers une constante finie. Ceci constitue une étape préliminaire de la preuve de la conjecture selon laquelle $\{t(n,k), n \in \mathbb{Z}\}$ converge en loi vers un processus limite invariant.