Random walks on free products of cyclic groups and on Artin groups with two generators

Jean Mairesse * and Frédéric Mathéus †

April 1, 2004

Abstract

Let G be a free product of a finite family of finite groups. We consider a transient nearest neighbor random walk on G. The harmonic measure is Markovian and can be completely described via a finite set of polynomial equations. We show that in several simple cases of interest, the polynomial equations can be explicitly solved, to get closed form formulas for the drift, the entropy, the probability of ever hitting an element, and the minimal positive harmonic functions of the walk. The examples considered are: the modular group, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, the braid group B_3, $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, the Hecke groups $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, and Artin groups with two generators. We use these various examples to study the relation between the drift, the entropy, and the volume of the group.

Résumé

Soit G un produit libre d'une famille finie de groupes finis. On considère une marche aléatoire transiente et au plus proche voisin sur le groupe G. Sa mesure harmonique est markovienne est peut être complètement décrite à l'aide d'une famille finie d'équations polynomiales. On montre que dans une certain nombre de cas intéressants, les dites équations peuvent être résolues complètement, ce qui permet d'obtenir des formules explicites pour la vitesse de fuite, l'entropie, la probabilité d'atteinte d'un élément, ou encore les fonctions harmoniques positives minimales. Les exemples traités sont : le groupe modulaire, le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le groupe de tresses B_3, les groupes $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, les groupes de Hecke $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, les groupes d'Artin à deux générateurs. On utilise ces différents exemples pour étudier la relation entre vitesse de fuite, entropie et volume.

Keywords: random walk, free product group, braid group, Artin group, harmonic measure, drift, entropy, extremal generators.

Mots-clés: marche aléatoire, produit libre de groupes, groupe de tresses, groupe d'Artin, mesure harmonique, vitesse de fuite, entropie, générateurs extrémaux.

*LIAFA, CNRS-Université Paris 7, case 7014, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: Jean.Mairesse@liafa.jussieu.fr

†LMAM, Université de Bretagne-Sud, Campus de Tohannic, BP 573, 56017 Vannes, France. E-mail: Frederic.Matheus@univ-ubs.fr