Random Walks on Groups and Monoids with a Markovian Harmonic Measure

Jean Mairesse *

December 16, 2005

Abstract

We consider a transient nearest neighbor random walk on a group G with finite set of generators Σ. The pair (G, Σ) is assumed to admit a natural notion of normal form words where only the last letter is modified by multiplication by a generator. The basic examples are the free products of a finitely generated free group and a finite family of finite groups, with natural generators. We prove that the harmonic measure is Markovian of a particular type. The transition matrix is entirely determined by the initial distribution which is itself the unique solution of a finite set of polynomial equations of degree two. This enables to efficiently compute the drift, the entropy, the probability of ever hitting an element, and the minimal positive harmonic functions of the walk. The results extend to monoids.

Résumé

Considérons une marche aléatoire transiente et au plus proche voisin sur un groupe G muni d'un ensemble fini de générateurs Σ. On suppose que le couple (G, Σ) possède une notion naturelle de forme normale dont les mots ne sont modifiés que localement lors de la multiplication par un générateur. Les exemples les plus simples sont les produits libres d'un groupe libre finiment engendré et d'une famille finie de groupes finis, avec les générateurs naturels. On démontre que la mesure harmonique est Markovienne d'un type particulier. La matrice de transition est entièrement par la distribution initiale, qui est elle-même caractérisée comme l'unique solution d'un ensemble d'équations polynomiales de degré deux. Cela permet de calculer efficacement la vitesse de fuite, l'entropie, la probabilité d'atteinte d'un générateur, et les fonctions harmoniques positives minimales de la marche. Les résultats s'étendent aux monoïdes.

Keywords: Finitely generated group or monoid; free product; random walk; harmonic measure.

Mots-clés: Groupe ou monoïde finiment engendré; produit libre; marche aléatoire, mesure harmonique.

AMS classification (2000): Primary 60J10, 60B15, 31C05; Secondary 60J22, 65C40, 20F65.

*LIAFA, CNRS-Université Paris 7, case 7014, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: Jean.Mairesse@liafa.jussieu.fr