ANNEXE

Optimisation et théorèmes ergodiques pour les systèmes à événements discrets

Projet pour le programme MathSTIC*

Thierry Bousch† et Jean Mairesse‡

26 avril 2002

Table des matières

1 Description détaillée du projet **1**
1.1 Applications (max,+) et applications topicales 1
1.2 Rayon spectral joint 2
1.3 Modèles d'empilement de pièces à la Tetris 2
1.4 Monoïde de traces et animaux dirigés 3
1.5 Suites et mesures sturmiennes 4
1.6 Mesures maximisantes 5

*Page web du projet : http ://www.liafa.jussieu.fr/~mairesse/Mathstic

†Cnrs, Laboratoire de Mathématique (UMR 8628) - Université de Paris-Sud - 91405 Orsay Cedex - France - Thierry.Bousch@math.u-psud.fr - http ://topo.math.u-psud.fr/~bousch/

‡Cnrs, Liafa (UMR 7089) - Université Paris 7 - Case 7014 - 2, place Jussieu - 75251 Paris Cedex 5 - France - mairesse@liafa.jussieu.fr - http ://www.liafa.jussieu.fr/~mairesse/

1 Description détaillée du projet

Le projet s'articule en 6 sous-projets, étroitement reliés entre eux, que nous listons avant de les passer en revue plus en détails.

- Applications (max,+) et applications topicales ;
- rayon spectral joint ;
- modèles d'empilement de pièces à la Tetris ;
- monoïde de traces et animaux dirigés ;
- suites et mesures sturmiennes ;
- mesures maximisantes.

1.1 Applications (max,+) et applications topicales

Le *semi-anneau max-plus* est constitué de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des lois max et +. Cette structure a été étudiée depuis les années 50, initialement comme structure naturelle pour les problèmes de plus long chemin [16, 22, 3, 28, 23]. Plus récemment, le semi-anneau max-plus est apparu comme la structure naturelle pour modéliser "linéairement" les phénomènes de synchronisation qui apparaissent dans les SED. Le semi-anneau $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equip des lois min et + est appel *semi-anneau tropical*. Il est utilis pour rsoudre certains problmes de dcidabilit sur les langages formels [29].

Une *application max-plus* est une application f de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ définie par $f(x)_i = \max_j(a_{ij} + x_j)$ avec $A = (a_{ij})_{ij} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{k \times k}$ (aucune ligne de A n'étant identiquement égale à $-\infty$).

Une *application topicale* est une application f de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ croissante (pour l'ordre partiel de $\mathbb{R}^k$) et vérifiant $f(x + (\lambda, \dots, \lambda)) = f(x) + (\lambda, \dots, \lambda)$ (homogénéité additive). Une application max-plus est un exemple d'application topicale.

Nous écrivions dans le projet 2001-2002 :

La théorie spectrale pour une application max-plus est maintenant bien comprise [15, 19, 3], de même que celle pour une application min-max-plus [14]. En revanche de nombreuses questions demeurent concernant d'autres sous-familles d'applications topicales, sans même mentionner les applications topicales générales.

Nous avons travaillé cette année sur une classe plus générale d'applications topicales : les applications à courte portée, pour lesquelles nous avons démontré des résultats spectraux précis [6]. Une application T donnée par $(x_1 \dots x_N) \mapsto (y_1 \dots y_{N'})$ est *à courte portée* s'il existe des constantes $C, L > 0$ telles que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ \forall j \in \{1, \dots, N'\},\quad \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \leq C \exp -\frac{|y_j - x_i|}{L} \quad \text{p.p.}$$

Les applications max-plus, min-plus, min-max-plus et conjuguées-linéaires sont à courte portée.

1.2 Rayon spectral joint

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{A}$ de matrices carrées à coefficients réels, on définit le *rayon spectral joint* comme suit

$$\rho_{\max}(\mathcal{A}) = \limsup_n (\max(\rho(\text{produits de } n \text{ matrices})^{1/n})) ,$$

où $\rho(.)$ est le rayon spectral de la matrice. Cette notion introduite par Rota et Strang dans les années 60, s'avère particulièrement pertinente dans de nombreux domaines tels que l'automatique ou la construction de fonctions d'échelle pour les ondelettes [17, 31].

Il a été conjecturé au début des années 90 par Lagarias et Wang [26], ainsi que par Gurvits, que le rayon spectral joint était toujours atteint, c'est-à-dire qu'il existe toujours un produit fini $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ de matrices de $\mathcal{A}$ tel que $\rho(\mathcal{A}) = \rho(A_{i_1} \cdots A_{i_k})^{1/k}$. Cette conjecture est connue sous le nom de *conjecture de finitude* et a été activement étudiée ces dernières années. Toutefois la conjecture s'avère être fausse. Un contre-exemple constitué de deux matrices positives de dimension 2 est proposé dans [7]. L'une des deux matrices dépend d'un paramètre et nous avons démontré que pour certaines valeurs du paramètre, le rayon spectral joint n'est atteint que pour les produits infinis donnés par une suite sturmienne à paramètre irrationnel. Plus précisément, on montre que pour ce système itéré de fonctions, il existe une unique mesure maximisante qui est sturmienne et dont le paramètre dépend continment du paramètre variable dans les matrices. Il est intéressant de noter que le contre-exemple est obtenu comme une 'déformation' d'un modèle de Tetris à deux pièces (voir ci-dessous).

Malgré ou en raison de l'existence de ce contre-exemple, de nombreuses questions demeurent. Par exemple : est-il possible de trouver des contre-exemples plus 'effectifs' à la conjecture ? Étant donné un ensemble fini de matrices sait-on décider si on est en présence d'un contre-exemple ? Sait-on caractériser les mesures susceptibles d'être des mesures maximisantes, outre les mesures périodiques et les mesures sturmiennes ? Mentionnons enfin un problème ouvert qui intrigue les automaticiens : la propriété 'le rayon spectral joint est < 1' est-elle décidable ? (On suppose ici que les matrices sont à coefficients rationnels pour pouvoir définir le concept de décidabilité). La conjecture de finitude, si elle avait été vraie, aurait entrainé la décidabilité.

1.3 Modèles d'empilement de pièces à la Tetris

Les modèles d'empilement de pièces sont constitués par un ensemble fini de pièces de forme polyominales. Les pièces sont soumises à la gravité et s'empilent suivant le principe du jeu de TETRIS, voir la figure ci-dessous. Au niveau algébrique, à chaque pièce correspond une application max-plus, et la hauteur d'un empilement est obtenue en composant les applications correspondantes. Les modèles d'empilements de pièces ont été récemment

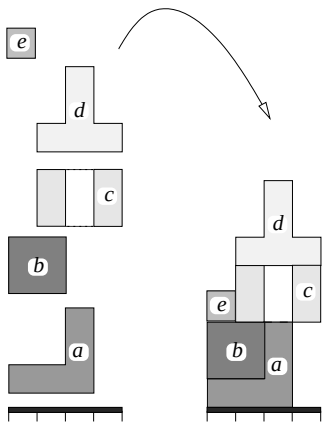

FIG. 1 – Modèle d'empilements de pièces.

utilisés pour représenter les réseaux de Petri 1-bornés temporisés [20]. Ces mêmes réseaux de Petri servent à la modélisation de problèmes d'ordonnancement dans les ateliers flexibles.

Les problèmes que l'on se pose sur ces modèles sont analogues à ceux décrits au paragraphe suivant.

1.4 Monoïde de traces et animaux dirigés

Le monoïde de trace, ou monoïde partiellement commutatif, est une généralisation naturelle du monoïde libre. Dans un monoïde de trace, certaines lettres commutent et d'autres non. Plus formellement, soit A un alphabet fini et soit $I \subset A \times A$ une relation symétrique et irréflexive dite d'indépendance. Le monoïde de traces $\mathbb{M}(A, I)$ est le quotient du monoïde libre A^* par la plus petite congruence contenant les relations $ab \sim ba$ pour $(a, b) \in I$. Les éléments de $\mathbb{M}(A, I)$ sont appelées des *traces*.

Les monoïdes de traces interviennent naturellement pour modéliser le parallélisme dans les SED. Chaque lettre correspond à une tâche et deux lettres sont indépendantes si les tâches correspondantes peuvent être executées en parallèle. Un monoïde de traces peut être visualisé à l'aide d'un modèle d'empilement de pièces ayant la particularité que toutes les pièces sont rectangulaires et de hauteur un [32]. On peut donc retraduire les problèmes sur les monoïdes de traces dans le formalisme des systèmes itérés de fonctions max-plus.

La *longueur* d'une trace est la longueur (nombre de lettres) d'un quelconque de ses représentants. La *hauteur* d'une trace est la hauteur de l'empilement associé. Dans le contexte des SED, la longueur correspond au temps d'exécution séquentiel d'une suite de tâches, et la hauteur au temps d'exécution parallèle. Le ratio longueur/hauteur a été étudié sous le nom de

speedup dans [13]. Le problème de la hauteur moyenne se définit comme suit. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans A, supposée i.i.d. ou de mesure ergodique sur $(A^{\mathbb{N}}, T)$ (T étant l'opérateur de décalage). On définit une suite aléatoire de traces $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_n = t_{n-1}a_{n-1}$. La *hauteur moyenne* (si elle existe) est la limite de $n^{-1}E[h(t_n)]$ où $h(.)$ est la fonction hauteur et $E[.]$ l'espérance. La hauteur moyenne a été étudiée à la fois dans le cas de la mesure uniforme sur les mots [30, 11] et de la mesure uniforme sur les traces [25].

De nombreuses questions ouvertes existent autour de l'évaluation de la hauteur moyenne, même dans les cas les plus simples. Supposons que $(a_n)_n$ est i.i.d. et que $P\{a_0 = a\} = 1/|A|$ pour tout $a \in A$. On sait alors que la hauteur moyenne existe [30] mais on ne sait pas en général la calculer (il s'agit d'une difficulté générique pour les constantes obtenues comme limite sous-additive). L'exemple le plus simple pour lequel on ne sait pas calculer la hauteur moyenne est $\mathbb{M}(A, I)$ pour $A = \{a, b, c, d\}, I = \{(a, c), (a, d), (b, d)\}$. Calculer, ou à défaut trouver des bonnes bornes ou des approximations pour la hauteur moyenne est un problème difficile et important au niveau des applications.

Étant donné un graphe orienté et un nœud distingué o, un *animal dirigé* est un ensemble E de nœuds tel que tout élément de E peut être joint depuis o par un chemin dont tous les nœuds sont dans E. Les animaux dirigés sont un modèle important en physique (percolation) et en chimie (structure des polymères), et dont la combinatoire s'avère très complexe [18]. Les animaux dirigés sur les réseaux carrés ou triangulaires peuvent être vus comme des empilements de pièces particuliers (empilements de dominos). La question de la hauteur de ces objets est difficile et revient à regarder la hauteur de certaines traces sur un alphabet infini [8, 9, 32].

A. Bouillard (ENS) effectue actuellement son stage de DEA au LIAFA sur le le calcul de la hauteur moyenne dans un *groupe* partiellement commutatif.

1.5 Suites et mesures sturmiennes

Les suites sturmiennes apparaissent sous des noms divers et dans des contextes variés allant de la théorie des nombres à la physique des quasi-cristaux. Il existe de nombreuses définitions possibles pour les suites sturmiennes (apériodiques) : codage d'approximation de droites, suites équilibrées, suites apériodiques de compléxité minimale... Pour une étude combinatoire détaillée et une bibliographie, on se reportera à [4, 1]. Les suites sturmiennes interviennent naturellement dans les problèmes d'optimisation de SED [24, 2]. Le modèle canonique est celui du routage d'un flot de clients vers deux files d'attente (numérotées 0 et 1). Sans information sur l'état du système, le routage optimal est donné par une suite sturmienne.

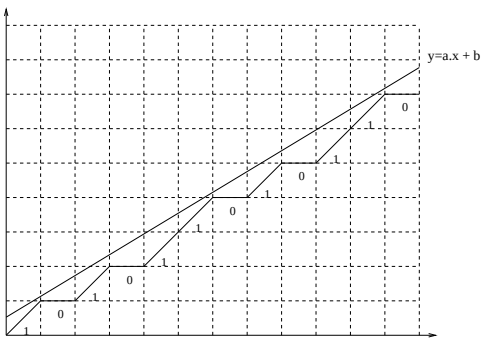

FIG. 2 – Définition d'une suite sturmienne par approximation de droite, a est le paramètre de la suite.

Les mesures sturmiennes sont les mesures sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dont les points du support sont les suites sturmiennes de paramètre fixé. On peut encore les voir comme les mesures sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dont le support est porté par un intervalle $[\gamma, \gamma + 1/2]$ pour $\gamma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, voir [12]. Ces mesures interviennent comme mesures maximisantes dans plusieurs contextes différents [5, 7, 21, 27].

Sur un alphabet de plus de deux lettres, les extensions des différentes définitions des suites sturmiennes ne coïncident plus. Comprendre quelles sont les bonnes généralisations dans le contexte des mesures maximisantes est un problème largement ouvert.

1.6 Mesures maximisantes

Le problème consiste à chercher des mesures maximisantes dans des situations généralisant le cas $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $f(x) = \cos 2\pi(x - \omega)$ (voir *Projet de recherche actualisé*). Ces questions ont été abordées par J.-P. Conze et J. Brémont en essayant également d'étudier la façon dont les mesures maximisantes sont approchées par les mesures de Gibbs quand on fait tendre la température vers zéro, voir par exemple l'article récent [10]. Le problème est double. En premier lieu, il faut deviner quelles peuvent être les mesures maximisantes, et en donner des caractérisations, par leur combinatoire ou bien par une propriété de leur support, puis démontrer qu'elles sont effectivement maximisantes dans le problème donné.

En effet, les mesures sturmiennes semblent n'être que le *premier* degré de complexité possible pour les mesures maximisantes. Quels sont les suivants ?

Références

[1] *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, number 43 in Prépublication Inst. Math. Luminy, 2000.

[2] E. Altman, B. Gaujal, and A. Hordijk. Admission control in stochastic event graphs. *IEEE Trans. Autom. Control*, 45(5) :854–867, 2000.

[3] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. John Wiley & Sons, New York, 1992.

[4] J. Berstel and P. Séébold. Sturmian words. In M. Lothaire, editor, *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 2001. To appear.

[5] T. Bousch. Le poisson n'a pas d'arêtes. *Ann. IHP Proba. Stat.*, 36(4) :489–508, 2000.

[6] T. Bousch and J. Mairesse. Applications topicales à courte portée. En préparation, 2002.

[7] T. Bousch and J. Mairesse. Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture. *J. Am. Math. Soc.*, 2002. posted on September 10, 2001, PII S0894-0347(01)00378-2 (to appear in print).

[8] M. Bousquet-Mélou. New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Math.*, 180 :73–106, 1998.

[9] M. Bousquet-Mélou and A.D. Rechnitzer. Lattice animals and heaps of dimers. submitted, 2001.

[10] J. Brémont. Convergence of Gibbs measures. Research Report, 2001.

[11] M. Brilman. *Evaluation de Performances d'une Classe de Systèmes de Ressources Partagées*. PhD thesis, Univ. Joseph Fourier - Grenoble I, 1996.

[12] S. Bullett and P. Sentenac. Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 115(3) :451–481, 1994.

[13] C. Cérin and A. Petit. Speedup of recognizable trace languages. In *Proc. MFCS 93*, number 711 in Lect. Notes Comput. Sci., pages 332–341. Springer, 1993.

[14] J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, and J. Gunawardena. A constructive fixed-point theorem for min-max functions. *Dynam. Stability Systems*, 14(4) :407–433, 1999.

[15] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30 :210–220, 1985.

[16] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*, volume 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[17] I. Daubechies and J. Lagarias. Sets of matrices all infinite products of which converge. *Linear Algebra Appl.*, 161 :227–263, 1992.

[18] D. Dhar. Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's hard square lattice gas model. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :959–962, 1982.

[19] S. Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes.* PhD thesis, École des Mines, Paris, 1992.

[20] S. Gaubert and J. Mairesse. Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 44(4) :683–698, 1999.

[21] B. Gaujal. Optimal allocation sequences of two processes sharing a resource. *Discrete Event Dynamic Systems*, 7 :327–354, 1997.

[22] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes.* Eyrolles, Paris, 1979. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1986.

[23] J. Gunawardena, editor. *Idempotency.* Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

[24] B. Hajek. Extremal splittings of point processes. *Math. Oper. Res.*, 10 :543–556, 1985.

[25] D. Krob, J. Mairesse, and I. Michos. On the average Cartier-Foata height of traces. In *Proceedings of Comb01 : Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2001.

[26] J. Lagarias and Y. Wang. The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 214 :17–42, 1995.

[27] J. Mairesse and L. Vuillon. Optimal sequences in a heap model with two pieces. Liafa research report 98/09, Université Paris 7, 1998.

[28] V. Maslov and S. Samborskiĭ, editors. *Idempotent Analysis*, volume 13 of *Adv. in Sov. Math.* AMS, 1992.

[29] J.E. Pin. Tropical semirings. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*, pages 50–69. Cambridge University Press, 1998.

[30] N. Saheb. Concurrency measure in commutation monoids. *Discrete Applied Mathematics*, 24 :223–236, 1989.

[31] J. Tsitsiklis and V. Blondel. The lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard - when not impossible - to compute and to approximate. *Math. Control Signals Syst.*, 10(1) :31–40, 1997.

[32] G.X. Viennot. Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas. In Labelle and Leroux, editors, *Combinatoire Énumérative*, number 1234 in Lect. Notes in Math., pages 321–350. Springer, 1986.