Optimisation et théorèmes ergodiques pour les systèmes à événements discrets

Projet pour le programme MathSTIC

Thierry Bousch* et Jean Mairesse†

18 octobre 2001

Table des matières

1 Définition du thème de recherche **2**

1.1 Le projet vu du côté mathématique 2

1.2 Le projet vu du côté informatique 4

2 Description détaillée du projet **5**

2.1 Applications (max,+) et applications topicales 5

2.2 Rayon spectral joint 6

2.3 Modèles d'empilement de pièces à la Tetris 7

2.4 Monoïde de traces et animaux dirigés 8

2.5 Suites et mesures sturmiennes 9

2.6 Mesures maximisantes 10

3 Membres du projet **10**

4 Collaborations passées et futures **11**

5 Budget prévisionnel **11**

*Cnrs, Laboratoire de Mathématique (UMR 8628) - Université de Paris-Sud - 91405 Orsay Cedex - France - Thierry.Bousch@math.u-psud.fr - http://topo.math.u-psud.fr/~bousch/

†Cnrs, Liafa (UMR 7089) - Université Paris 7 - Case 7014 - 2, place Jussieu - 75251 Paris Cedex 5 - France - mairesse@liafa.jussieu.fr - http://www.liafa.jussieu.fr/~mairesse/

1 Définition du thème de recherche

Le cadre général du projet proposé se situe dans le domaine de l'analyse asymptotique et de l'optimisation de systèmes, éventuellement aléatoires.

Sa problématique se situe à l'intersection entre informatique théorique et mathématique. Les motivations sont à la fois internes aux mathématiques (par exemple, obtenir des analogues des théorèmes ergodiques multiplicatifs classiques) et rattachées à des questions 'pratiques' propres à l'informatique ou à l'automatique (par exemple, comment évaluer le parallélisme dans un système concurrent, ou comment optimiser le débit dans un système de production). Les outils à mettre en oeuvre pour la résolution empruntent également aux deux communautés : systèmes dynamiques, théorie ergodique, mais aussi automates et langages formels. L'objectif du projet est de favoriser les fertilisations croisées entre mathématiciens et informaticiens dans ce domaine.

1.1 Le projet vu du côté mathématique

Considérons un système dynamique topologique (X, T) où X est un espace métrique compact et T continue [23]. A toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ on associe les sommes de Birkhoff

$$S_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f\big[T^i(x)\big].$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X invariantes par T. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}$ ergodique, on sait que $S_n f(x)/n \to \int f d\mu$ pour μ-presque tout point $x \in X$ (théorème ergodique de Birkhoff). Mais c'est un résultat "en moyenne", qui *a priori* ne permet pas de répondre à la question suivante: comment se comportent les $S_n f(x)/n$ pour des $x \in X$ arbitraires? En réalité, les deux situations sont liées. Posons

$$a_n = \min_{x \in X} S_n f(x) \qquad b_n = \max_{x \in X} S_n f(x).$$

Des arguments de sous- ou sur-additivité entraînent facilement l'existence de limites $a_n/n \to \alpha$ et $b_n/n \to \beta$, et on montre [20] que

$$\alpha = \min_{\mu \in \mathcal{M}} \int f d\mu \qquad \beta = \max_{\mu \in \mathcal{M}} \int f d\mu$$

Ainsi le problème de départ, concernant le comportement asymptotique des bornes de $S_n f$, problème purement déterministe et *a priori* sans rapport avec la théorie ergodique, équivaut à optimiser la fonctionnelle $\mu \mapsto \int f d\mu$ sur le compact $\mathcal{M}$. L'interprétation de $\mu \in \mathcal{M}$ comme étant un état du système est classique en physique statistique et les mesures réalisant le minimum de la fonctionnelle peuvent être vues comme les états fondamentaux du système.

L'ensemble $\mathcal{M}$ étant relativement bien compris dans le cas des systèmes dynamiques hyperboliques, on pourrait penser que les extréma de $\mu \mapsto \int f d\mu$ seront alors faciles à déterminer explicitement, mais il n'en est rien. L'un de ces problèmes a été résolu complètement [8]; il s'agit du cas où T est l'application de doublement de l'angle sur le cercle $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $f(x) = \cos 2\pi(x - \omega)$, où ω est un paramètre. On démontre que les mesures maximisantes, i.e. les $\mu \in \mathcal{M}$ réalisant le maximum de $\int f d\mu$, sont les *mesures sturmiennes* (voir §2.5). La démonstration de ce résultat n'est pas simple et repose sur des estimations dont la technicité tranche de façon choquante avec la simplicité de l'énoncé. Ces questions ont été reprises dans des situations (encore) plus compliquées, voir §2.6.

Un problème analogue à celui de l'estimation des bornes de $S_n f/n$, et qui le généralise, consiste à itérer des produits gauches $\mathcal{T} : X \times \mathbb{R}^m \to X \times \mathbb{R}^m$, avec $\mathcal{T}(x, \vec{v}) = (Tx, A_x\vec{v})$, où la matrice $A_x \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ dépend continûment de x. On est naturellement amené à considérer la vitesse de croissance de $\mathcal{T}^n(x, \vec{v})$, c'est-à-dire de

$$A_{T^{n-1}x} \cdots A_{Tx} A_x(\vec{v})$$

quand $n \to \infty$. En dimension $m = 1$, ceci se ramène à l'estimation de sommes de Birkhoff, mais dès que $m \geq 2$ la non-commutativité du produit de matrices rend la problème beaucoup plus difficile.

Les théorèmes ergodiques multiplicatifs pour les opérateurs linéaires ont fait l'objet d'une étude approfondie depuis les années 50 avec en particulier le théorème d'Oseledec en 1969, voir par exemple les monographies [7, 19, 30, 35]. En revanche beaucoup reste à faire au niveau des mesures optimisantes.

Faire une hypothèse de positivité sur les matrices A_x simplifie énormément la dynamique et permet de se ramener, comme précédemment, à un problème variationnel sur $\mathcal{M}$, dont la résolution peut être relativement simple. L'article [9] illustre cette approche, en approximant un produit d'opérateurs max-plus par un produit de matrices 2×2 positives, dont on détermine les mesures maximisantes (ce qui nous permet, en passant, de réfuter la conjecture de finitude de Lagarias-Wang, voir §2.2); ici encore, on retrouve les mesures sturmiennes.

L'article [9] fournit aussi une théorie générale dans le cas des sytèmes itérés de fonctions "topicales" (voir §2.1 pour une définition) "tubulaires", c'est-à-dire dont l'espace des états est le produit de $\mathbb{R}$ par un compact. La dynamique est alors quasiment unidimensionnelle : toutes les coordonnées croissent à la même vitesse, et la "performance" du système est décrite par un unique nombre, mesurant la vitesse moyenne de progression le long du tube.

Il est toutefois important de pouvoir se passer de cette hypothèse de tubularité. Du point de vue des applications concrètes aux SED (voir §1.2 pour plus de précisions), la notion centrale de 'parallélisme' implique que l'espace des états modulo $\mathbb{R}$ ne soit pas compact. Il est donc essentiel d'avoir une théorie valable pour les dynamiques générales, non tubulaires. La perte de compacité devra être compensée par d'autres hypothèses. La première étape serait de démontrer des théorèmes ergodiques multiplicatifs pour les produits aléatoires d'applications topicales, afin de pouvoir définir une notion de "performance" du système pour tout μ dans un certain espace de processus stochastiques. Si à l'heure actuelle les produits aléatoires d'opérateurs max-plus sont bien compris [18, 2], on sait en revanche beaucoup moins de choses pour les applications topicales générales [42, 4].

La deuxième étape, encore bien distante, serait de démontrer que, comme dans le cas tubulaire, l'optimisation asymptotique peut se reformuler en un problème variationnel sur μ, et de donner des théorèmes suffisamment constructifs sur les mesures maximisantes pour pouvoir les déterminer entièrement, au moins dans les cas les plus simples.

1.2 Le projet vu du côté informatique

Les Systèmes à Événements Discrets (SED) sont une abstraction pour de nombreux *systèmes* conçus par l'homme (systèmes informatiques ou de production, réseaux de télécommunications ou de transport), obéissant à des règles opérationnelles, ou algorithmes, et dont les transformations ont lieu à des instants *discrets*, en réponse à des *événements* ponctuels (arrivée d'un client, d'un signal ou achèvement d'une tâche).

Les SED peuvent également se définir de façon négative par opposition aux systèmes classiques modélisant les phénomènes de la nature, dont l'évolution est régie par les lois de la physique et la dynamique modélisée par des équations différentielles.

On modélise l'action élémentaire d'un SED comme une application transformant les instants de début d'exécution en les instants de fin d'exécution pour un ensemble fini de tâches. L'existence de plusieurs modes opératoires pour le SED (par exemple l'existence de plusieurs gammes de fabrication dans un système de production) conduit à l'introduction d'un système itéré de fonctions $(U_i)_{i\in I}$. Supposer que les applications U_i sont topicales (voir §2.1) est alors naturel. En effet la croissance correspond à supposer que retarder les instants de début d'exécution des tâches retarde également les instants de fin d'exécution. Quant à l''homogénéité additive', elle correspond à l'invariance de la dynamique par translation dans le temps.

On se retrouve dès lors en présence d'un système itéré de fonctions topicales $(U_i)_{i\in I}$. Le choix de la fonction U_i doit être vu comme un contrôle et l'objectif est de choisir la suite des contrôles de façon à optimiser un critère. Au niveau du SED, ce critère est en général le débit du système ou le temps de réponse.

On considère également les SED sous des hypothèse aléatoires. De nombreux arguments (variabilité intrinsèque des phénomènes étudiés ou impos-

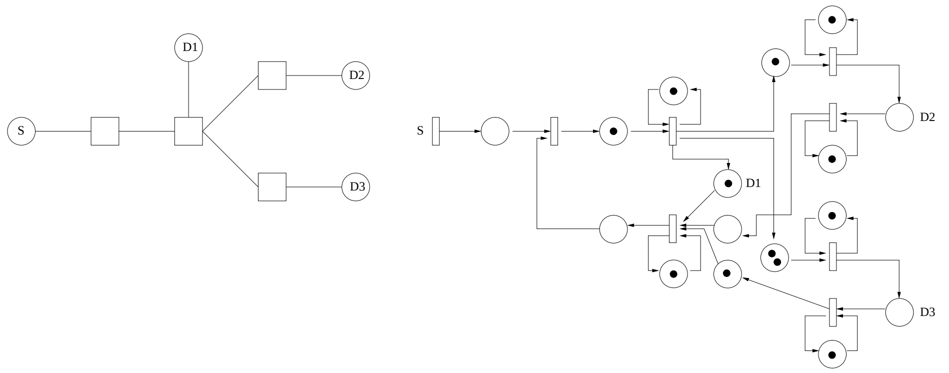

FIG. 1 – Routeur multipoint avec contrôle de flux à fenêtre, et graphe d'événement associé.

sibilité de les évaluer avec précision) plaident en faveur de ce choix. La modélisation conduit à considérer une suite aléatoire $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications topicales; l'objectif est alors d'évaluer le débit ou le temps de réponse moyen.

Le modèle le plus étudié en suivant le programme précédemment décrit est celui des graphes d'événements temporisés. Les graphes d'événements sont des réseaux de Petri avec synchronisation mais sans choix. Leur dynamique peut être représentée à l'aide d'application "linéaires" sur le semi-anneau max-plus [17, 3]. L'extension de ce programme à d'autres classes de SED est un problème largement ouvert.

2 Description détaillée du projet

Dans le cadre général détaillé ci-dessus, le projet s'articulera autour de plusieurs axes de recherches étroitement reliés entre eux que nous listons avant de les passer en revue plus en détails.

- Applications (max,+) et applications topicales;
- rayon spectral joint;
- modèles d'empilement de pièces à la Tetris;
- monoïde de traces et animaux dirigés;
- suites et mesures sturmiennes;
- mesures maximisantes.

2.1 Applications (max,+) et applications topicales

Le *semi-anneau max-plus* est constitué de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des lois max et $+$. Cette structure a été étudiée depuis les années 50, initialement comme structure naturelle pour les problèmes de plus long chemin

[21, 29, 3, 37, 31]. Plus récemment, le semi-anneau max-plus est apparu comme la structure naturelle pour modéliser "linéairement" les phénomènes de synchronisation qui apparaissent dans les SED. Le semi-anneau $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ equipé des lois min et $+$ est appelé *semi-anneau tropical.* Il est depuis longtemps utilisé pour résoudre certains problèmes de décidabilité sur les langages formels [38].

Une *application max-plus* est une application f de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ définie par $f(x)_i = \max_j(a_{ij} + x_j)$ avec $A = (a_{ij})_{ij} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{k\times k}$ (aucune ligne de A n'étant identiquement égale à $-\infty$).

Une *application topicale* est une application f de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ croissante (pour l'ordre partiel de $\mathbb{R}^k$) et vérifiant $f(x + (\lambda, \dots, \lambda)) = f(x) + (\lambda, \dots, \lambda)$ (homogénéité additive). Une application max-plus est un exemple d'application topicale.

La théorie spectrale pour une application max-plus est maintenant bien comprise [17, 26, 3], de même que celle pour une application min-max-plus [16]. En revanche de nombreuses questions demeurent concernant d'autres sous-familles d'applications topicales, sans même mentionner les applications topicales générales. La situation concernant les théorèmes ergodiques et les mesures maximisantes pour les systèmes max-plus ou topicaux a été évoquée en §1.1.

2.2 Rayon spectral joint

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{A}$ de matrices carrées à coefficients réels, on définit le *rayon spectral joint* comme suit

$$\rho_{\max}(\mathcal{A}) = \limsup_n (\max(\rho(\text{produits de } n \text{ matrices})^{1/n}))\,,$$

où $\rho(.)$ est le rayon spectral de la matrice. Cette notion introduite par Rota et Strang dans les années 60, s'avère particulièrement pertinente dans de nombreux domaines tels que l'automatique ou la construction de fonctions d'échelle pour les ondelettes [22, 40].

Il a été conjecturé au début des années 90 par Lagarias et Wang [34], ainsi que par Gurvits, que le rayon spectral joint était toujours atteint, c'est-à-dire qu'il existe toujours un produit fini $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ de matrices de $\mathcal{A}$ tel que $\rho(\mathcal{A}) = \rho(A_{i_1} \cdots A_{i_k})^{1/k}$. Cette conjecture est connue sous le nom de *conjecture de finitude* et a été activement étudiée ces dernières années. Toutefois la conjecture s'avère être fausse. Un contre-exemple constitué de deux matrices positives de dimension 2 est proposé dans [9]. L'une des deux matrices dépend d'un paramètre et nous avons démontré que pour certaines valeurs du paramètre, le rayon spectral joint n'est atteint que pour les produits infinis donnés par une suite sturmienne à paramètre irrationnel. Plus précisément, on montre que pour ce système itéré de fonctions, il existe une unique mesure maximisante qui est sturmienne et dont le paramètre dépend continûment du paramètre variable dans les matrices. Il est intéressant de noter que le contre-exemple est obtenu comme une 'déformation' d'un modèle de Tetris à deux pièces (voir ci-dessous).

Malgré ou en raison de l'existence de ce contre-exemple, de nombreuses questions demeurent. Par exemple: est-il possible de trouver des contre-exemples plus 'effectifs' à la conjecture ? Étant donné un ensemble fini de matrices sait-on décider si on est en présence d'un contre-exemple ? Sait-on caractériser les mesures susceptibles d'être des mesures maximisantes, outre les mesures périodiques et les mesures sturmiennes (voir aussi §1.1) ? Mentionnons enfin un problème ouvert qui intrigue les automaticiens : la propriété 'le rayon spectral joint est < 1' est-elle décidable ? (On suppose ici que les matrices sont à coefficients rationnels pour pouvoir définir le concept de décidabilité). La conjecture de finitude, si elle avait été vraie, aurait entrainé la décidabilité.

2.3 Modèles d'empilement de pièces à la Tetris

Les modèles d'empilement de pièces sont consitués par un ensemble fini de pièces de forme polyominales. Les pièces sont soumises à la gravité et s'empilent suivant le principe du jeu de TETRIS, voir la figure ci-dessous. Au niveau algébrique, à chaque pièce correspond une application max-plus,

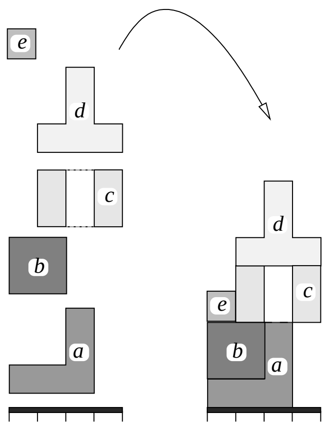

FIG. 2 – Modèle d'empilements de pièces.

et la hauteur d'un empilement est obtenue en composant les applications correspondantes. Les modèles d'empilements de pièces ont été récemment utilisés pour représenter les réseaux de Petri 1-bornés temporisés [27]. Ces mêmes réseaux de Petri servent à la modélisation de problèmes d'ordonnancement dans les ateliers flexibles.

Les problèmes que l'on se pose sur ces modèles sont analogues à ceux décrits au paragraphe suivant.

2.4 Monoïde de traces et animaux dirigés

Le monoïde de trace, ou monoïde partiellement commutatif libre, est une généralisation naturelle du monoïde libre. Dans un monoïde de trace, certaines lettres commutent et d'autres non. Plus formellement, soit A un alphabet fini et soit $I \subset A \times A$ une relation symétrique et irréflexive dite d'indépendance. Le monoïde de traces $\mathbb{M}(A, I)$ est le quotient du monoïde libre A^* par la plus petite congruence contenant les relations $ab \sim ba$ pour $(a, b) \in I$. Les éléments de $\mathbb{M}(A, I)$ sont appelées des *traces*.

Les monoïdes de traces interviennent naturellement pour modéliser le parallélisme dans les SED. Chaque lettre correspond à une tâche et deux lettres sont indépendantes si les tâches correspondantes peuvent être executées en parallèle. Un monoïde de traces peut être visualisé à l'aide d'un modèle d'empilement de pièces ayant la particularité que toutes les pièces sont rectangulaires et de hauteur un [41]. On peut donc retraduire les problèmes sur les monoïdes de traces dans le formalisme des systèmes itérés de fonctions max-plus.

La *longueur* d'une trace est la longueur (nombre de lettres) d'un quelconque de ses représentants. La *hauteur* d'une trace est la hauteur de l'empilement associé. Dans le contexte des SED, la longueur correspond au temps d'exécution séquentiel d'une suite de tâches, et la hauteur au temps d'exécution parallèle. Le ratio longueur/hauteur a été étudié sous le nom de *speedup* dans [15]. Le problème de la hauteur moyenne se définit comme suit. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans A, supposée i.i.d. ou de mesure ergodique sur $(A^{\mathbb{N}}, T)$ (T étant l'opérateur de décalage). On définit une suite aléatoire de traces $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_n = t_{n-1}a_{n-1}$. La *hauteur moyenne* (si elle existe) est la limite de $n^{-1}E[h(t_n)]$ où $h(.)$ est la fonction hauteur et $E[.]$ l'espérance. La hauteur moyenne a été étudiée à la fois dans le cas de la mesure uniforme sur les mots [39, 12] et de la mesure uniforme sur les traces [33].

De nombreuses questions ouvertes existent autour de l'évaluation de la hauteur moyenne, même dans les cas les plus simples. Supposons que $(a_n)_n$ est i.i.d. et que $P\{a_0 = a\} = 1/|A|$ pour tout $a \in A$. On sait alors que la hauteur moyenne existe [39] mais on ne sait pas en général la calculer (il s'agit d'une difficulté générique pour les constantes obtenues comme limite sous-additive). L'exemple le plus simple pour lequel on ne sait pas calculer la hauteur moyenne est $\mathbb{M}(A, I)$ pour $A = \{a, b, c, d\}, I = \{(a, c), (a, d), (b, d)\}$. Calculer, ou à défaut trouver des bonnes bornes ou des approximations pour la hauteur moyenne est un problème difficile et important au niveau des applications.

Étant donné un graphe orienté et un nœud distingué o, un *animal dirigé* est un ensemble E de nœuds tel que tout élément de E peut être joint depuis o par un chemin dont tous les nœuds sont dans E. Les animaux dirigés sont un modèle important en physique (percolation) et en chimie (structure des polymères), et dont la combinatoire s'avère très complexe [24]. Les animaux dirigés sur les réseaux carrés ou triangulaires peuvent être vus comme des empilements de pièces particuliers (empilements de dominos). La question de la hauteur de ces objets est difficile et revient à regarder la hauteur de certaines traces sur un alphabet infini [10, 11, 41].

2.5 Suites et mesures sturmiennes

Les suites sturmiennes apparaissent sous des noms divers et dans des contextes variés allant de la théorie des nombres à la physique des quasi-cristaux. Il existe de nombreuses définitions possibles pour les suites sturmiennes (apériodiques) : codage d'approximation de droites, suites équilibrées, suites apériodiques de compléxité minimale... Pour une étude combinatoire détaillée et une bibliographie, on se reportera à [5, 6]. Les suites

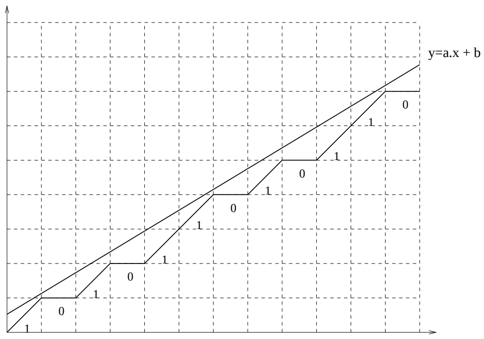

FIG. 3 – Définition d'une suite sturmienne par approximation de droite, a est le paramètre de la suite.

sturmiennes interviennent naturellement dans les problèmes d'optimisation de SED [32, 1]. Le modèle canonique est celui du routage d'un flot de clients vers deux files d'attente (numérotées 0 et 1). Sans information sur l'état du système, le routage optimal est donné par une suite sturmienne.

Les mesures sturmiennes sont les mesures sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dont les points du support sont les suites sturmiennes de paramètre fixé. On peut encore les voir comme les mesures sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dont le support est porté par un intervalle $[\gamma, \gamma + 1/2]$ pour $\gamma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, voir [13]. Ces mesures interviennent comme mesures maximisantes dans plusieurs contextes différents [8, 9, 28, 36].

Sur un alphabet de plus de deux lettres, les extensions des différentes définitions des suites sturmiennes ne coïncident plus. Comprendre quelles sont les bonnes généralisations dans le contexte des mesures maximisantes est un problème largement ouvert.

2.6 Mesures maximisantes

Le problème consiste à chercher des mesures maximisantes dans des situations généralisant le cas $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $f(x) = \cos 2\pi(x - \omega)$ (voir 1.1). Ces questions ont été abordées par J.-P. Conze et J. Brémont en essayant également d'étudier la façon dont les mesures maximisantes sont approchées par les mesures de Gibbs quand on fait tendre la température vers zéro. Le problème est double. En premier lieu, il faut deviner quelles peuvent être les mesures maximisantes, et en donner des caractérisations, par leur combinatoire ou bien par une propriété de leur support, puis démontrer qu'elles sont effectivement maximisantes dans le problème donné.

En effet, les mesures sturmiennes semblent n'être que le *premier* degré de complexité possible pour les mesures maximisantes. Quels sont les suivants? Conze a conjecturé que les mesures invariantes vérifiant une certaine condition de support (dont on suppose, sans savoir le démontrer en général, qu'elle est remplie pour les mesures maximisantes) sont données par des codages d'échanges d'intervalles. Cette conjecture est vérifiée dans tous les cas connus. Sa démonstration, surtout si elle était constructive, serait une très grande avancée.

3 Membres du projet

Voici la liste des équipes participant au projet. Certains membres de ces équipes participent à d'autres projets dans le cadre du programme MathSTIC (M. Bousquet-Mélou, N. Saheb).

- Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications (UMR 7089), Université Paris 7 : Daniel Krob (DR CNRS), Jean Mairesse (CR CNRS), Laurent Vuillon (MdC Paris 7).
- Laboratoire de Topologie et Dynamique (UMR 8628), Université d'Orsay : Thierry Bousch (CR CNRS).
- Probabilités et Modèles Aléatoires (UMR 7599), Université Paris 6: Philippe Bougerol (Pr Paris 6), Olivier Catoni (DR CNRS), François Ledrappier (DR CNRS).
- Institut de Recherche Mathématique de Rennes (UMR 6625), Université Rennes 1 : Jean-Pierre Conze (Pr Rennes), Yves Guivarc'h (Pr Rennes), Anne Siegel (MdC Rennes).
- Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (UMR 5800), Université Bordeaux 1 : Mireille Bousquet-Mélou (CR CNRS), Nasser Saheb (MdC Bordeaux).

D'autre part, bien que la liste ci-dessus ne fasse apparaître que les chercheurs et enseignants-chercheurs sur poste, plusieurs jeunes chercheurs des équipes participantes (doctorants, post-doctorants, ATER) seront très directement impliqués dans le déroulement du projet.

Enfin des relations étroites existent sur les thèmes du projet entre ses membres et de nombreux chercheurs en France ou à l'étranger. Mentionnons entre autres : F. Baccelli et D. Hong (ENS, INRIA), V. Blondel (U. Louvain, Belgique), B . Gaujal (ENS Lyon, INRIA), A. Jean-Marie (LIRMM, Montpellier), O. Jenkinson (U. of London), A. D. Rechnitzer (York University, Toronto), J.M. Vincent (IMAG, Grenoble).

4 Collaborations passées et futures

Les liens profonds existant entre les approches suivies par les communautés mathématique et informatique dans le domaine n'ont été découverts que récemment par les différents partenaires. Réunir aujourd'hui dans un même projet des personnes ayant souvent travaillé indépendamment par le passé nous paraît très fructueux.

Néanmoins, le projet peut s'appuyer sur un certain nombre d'interactions déjà existantes et qu'il s'agira de poursuivre et d'amplifier. On peut mentionner à ce titre, et en se limitant à la période 2000-2001, la collaboration ayant abouti à l'article [9], et la participation croisée à des séminaires (P. Bougerol à Rennes; T. Bousch à Paris 6, Paris 7 et Rennes; O. Catoni à Rennes, J. Mairesse à Bordeaux; A. Siegel à Paris 6, Paris 7 et Paris 11; L. Vuillon à Paris 6).

5 Budget prévisionnel

La durée envisagée pour le projet est de deux ans. Le budget global du projet est estimé à 300 kF.

Nature de la dépense	Montant
Missions	200 kF
Journées thématiques	80 kF
Livres	20 kF
Total des dépenses	300 kF

Les missions recouvrent à la fois des visites de travail croisées entre membres du projet et la participation à des conférences nationales ou internationales dans le domaine. Il est également envisagé d'organiser des journées thématiques réunissant tous les membres du projet. Enfin, un des objectifs est de permettre à de jeunes chercheurs (doctorants, post-doctorants) du projet de faire des séjours de courte ou moyenne durée dans une autre équipe que la leur.

Références

[1] E. Altman, B. Gaujal, and A. Hordijk. Admission control in stochastic event graphs. *IEEE Trans. Autom. Control*, 45(5):854–867, 2000.

[2] F. Baccelli. Ergodic theory of stochastic Petri networks. *Annals of Probability*, 20(1):375–396, 1992.

[3] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity.* John Wiley & Sons, New York, 1992.

[4] F. Baccelli and D. Hong. Analyticity of iterates of random non-expansive maps. *Adv. Appl. Probab.*, 32(1):193–220, 2000.

[5] J. Berstel and P. Séébold. Sturmian words. In M. Lothaire, editor, *Algebraic Combinatorics on Words.* Cambridge University Press, 2001. To appear.

[6] V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, and A. Siegel (Eds). *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, number 43 in Prépublication Inst. Math. Luminy, 2000.

[7] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators.* Progress in Probability and Statistics. Birkhäuser, 1985.

[8] T. Bousch. Le poisson n'a pas d'arêtes. *Ann. IHP Proba. Stat.*, 36(4):489–508, 2000.

[9] T. Bousch and J. Mairesse. Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture. *J. Am. Math. Soc.*, 2002. posted on September 10, 2001, PII S0894-0347(01)00378-2 (to appear in print).

[10] M. Bousquet-Mélou. New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Math.*, 180:73–106, 1998.

[11] M. Bousquet-Mélou and A.D. Rechnitzer. Lattice animals and heaps of dimers. submitted, http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/~bousquet, 2001.

[12] M. Brilman. *Evaluation de Performances d'une Classe de Systèmes de Ressources Partagées.* PhD thesis, Univ. Joseph Fourier - Grenoble I, 1996.

[13] S. Bullett and P. Sentenac. Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 115(3):451–481, 1994.

[14] O. Catoni. Metropolis, simulated annealing, and iterated energy transformation algorithms: Theory and experiments. *J. Complexity*, 12(4):595–623, 1996.

[15] C. Cérin and A. Petit. Speedup of recognizable trace languages. In *Proc. MFCS 93*, number 711 in Lect. Notes Comput. Sci., pages 332–341. Springer, 1993.

[16] J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, and J. Gunawardena. A constructive fixed-point theorem for min-max functions. *Dynam. Stability Systems*, 14(4):407–433, 1999.

[17] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:210–220, 1985.

[18] J. Cohen. Subadditivity, generalized product of random matrices and operations research. *SIAM Review*, 30(1):69–86, 1988.

[19] J. Cohen, H. Kesten, and M. Newman, editors. *Random Matrices and their Applications*, volume 50 of *Contemporary Mathematics*. AMS, 1986.

[20] J.-P. Conze and Y. Guivarc'h. Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel. Unpublished manuscript, 1993.

[21] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*, volume 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[22] I. Daubechies and J. Lagarias. Sets of matrices all infinite products of which converge. *Linear Algebra Appl.*, 161:227–263, 1992.

[23] M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces*, volume 527 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1976.

[24] D. Dhar. Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's hard square lattice gas model. *Phys. Rev. Lett.*, 49:959–962, 1982.

[25] S. Eilenberg. *Automata, languages and machines*, volume A. Academic Press, New York, 1974.

[26] S. Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. PhD thesis, École des Mines, Paris, 1992.

[27] S. Gaubert and J. Mairesse. Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 44(4):683–698, 1999.

[28] B. Gaujal. Optimal allocation sequences of two processes sharing a resource. *Discrete Event Dynamic Systems*, 7:327–354, 1997.

[29] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 1979. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1986.

[30] Y. Guivarc'h. Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires. In P. L. Hennequin, editor, *École d'été de probabilités de Saint-Flour VIII-1978*, number 774 in Lecture Notes in Mathematics, pages 117–250. Springer-Verlag, 1980.

[31] J. Gunawardena, editor. *Idempotency.* Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

[32] B. Hajek. Extremal splittings of point processes. *Math. Oper. Res.*, 10:543–556, 1985.

[33] D. Krob, J. Mairesse, and I. Michos. On the average Cartier-Foata height of traces. In *Proceedings of Comb01: Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2001.

[34] J. Lagarias and Y. Wang. The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 214:17–42, 1995.

[35] F. Ledrappier. Quelques proprietés des exposants caractéristiques. In P.L. Hennequin, editor, *École d'été de probabilités de Saint-Flour XII - 1982*, number 1097 in Lect. Notes Math., pages 305–396. Springer-Verlag, 1984.

[36] J. Mairesse and L. Vuillon. Optimal sequences in a heap model with two pieces. Liafa research report 98/09, Université Paris 7. To appear in TCS, 2002.

[37] V. Maslov and S. Samborskiĭ, editors. *Idempotent Analysis*, volume 13 of *Adv. in Sov. Math.* AMS, 1992.

[38] J.E. Pin. Tropical semirings. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*, pages 50–69. Cambridge University Press, 1998.

[39] N. Saheb. Concurrency measure in commutation monoids. *Discrete Applied Mathematics*, 24:223–236, 1989.

[40] J. Tsitsiklis and V. Blondel. The lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard - when not impossible - to compute and to approximate. *Math. Control Signals Syst.*, 10(1):31–40, 1997.

[41] G.X. Viennot. Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas. In Labelle and Leroux, editors, *Combinatoire Énumérative*, number 1234 in Lect. Notes in Math., pages 321–350. Springer, 1986.

[42] J.M. Vincent. Some ergodic results on stochastic iterative discrete events systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 7(2):209–233, 1997.