Master 1 — Année 2011/2012

Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n° 4

Exercice 1 — Donner une démonstration sémantique puis une démonstration en déduction naturelle des tautologies suivantes :

1. $(F \wedge G) \to G$
2. $\neg F \to (F \to G)$

Exercice 2 —

1. Montrer que si le séquent $F_1 \vdash F_2$ est prouvable, alors on peut utiliser la règle R suivante :

$$\frac{\mathcal{F} \vdash F_1}{\mathcal{F} \vdash F_2}\, R$$

   pour prouver des séquents.
2. Prouver le séquent $A \vee B \vdash \neg A \to B$. En utilisant la question précédente, quelle règle vient d'être démontrée ?
3. Prouver le séquent $\vdash (\forall x, A \vee \forall x, B) \to \forall x, (A \vee B)$.

Exercice 3 — Soit Q un prédicat binaire. Donner le nom des règles appliquées à chaque étape de la déduction naturelle, avec justification des hypothèses d'application de la règle si nécessaire.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\exists x, \forall y, Q(x,y) \vdash \exists x, \forall y, Q(x,y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\forall y, Q(x_0,y), \neg Q(x_0,y_0) \vdash \neg Q(x_0,y_0)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\forall y, Q(x_0,y), \neg Q(x_0,y_0) \vdash \forall y, Q(x_0,y)$}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\forall y, Q(x_0,y), \neg Q(x_0,y_0) \vdash Q(x_0,y_0)$}
\RightLabel{...}
\BinaryInfC{$\forall y, Q(x_0,y), \neg Q(x_0,y_0) \vdash \bot$}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\forall y, Q(x_0,y) \vdash Q(x_0,y_0)$}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\forall y, Q(x_0,y) \vdash \exists x, Q(x,y_0)$}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\exists x, \forall y, Q(x,y), \forall y, Q(x_0,y) \vdash \exists x, Q(x,y_0)$}
\RightLabel{...}
\BinaryInfC{$\exists x, \forall y, Q(x,y) \vdash \exists x, Q(x,y_0)$}
\RightLabel{...}
\UnaryInfC{$\exists x, \forall y, Q(x,y) \vdash \forall y, \exists x, Q(x,y)$}
\end{prooftree}
$$

Énoncer (sans utiliser de séquent) le théorème démontré. Énoncer sa réciproque et en donner soit une preuve si elle est vraie, soit un contre-exemple.

Exercice 4 — La preuve suivante du séquent $\vdash \exists x, A \to \forall x, A$ est-elle correcte ? Si non, peut-on en trouver une preuve correcte ?

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\exists x, A \vdash \exists x, A}\,{\scriptstyle Ax} \qquad \cfrac{}{\exists x, A, A \vdash A}\,{\scriptstyle Ax}}{\exists x, A \vdash A}\,{\scriptstyle \exists e}}{\exists x, A \vdash \forall x, A}\,{\scriptstyle \forall i}}{\vdash \exists x, A \to \forall x, A}\,{\scriptstyle \to i}$$

Exercice 5 —

1. Soit la règle suivante, appelée *loi de Peirce*. Prouver cette règle.

$$\cfrac{\mathcal{F}; \neg A \vdash A}{\mathcal{F} \vdash A}\,{\scriptstyle LP}$$

2. Soit la règle suivante, appelée *règle du tiers exclu*. Prouver cette règle.

$$\cfrac{\mathcal{F}; A \vdash B \qquad \mathcal{F}; \neg A \vdash B}{\mathcal{F} \vdash B}\,{\scriptstyle TE}$$

3. Soit la règle suivante, appelée $\bot e$. Prouver cette règle.

$$\cfrac{\mathcal{F}; \neg A \vdash A}{\mathcal{F}; \neg A \vdash \bot}\,{\scriptstyle \bot e}$$

4. Prouver la règle suivante :

$$\cfrac{\mathcal{F}; \exists x \neg A(x) \vdash B \qquad x \text{ non libre dans } \mathcal{F}}{\mathcal{F}; \neg\forall x, A(x) \vdash B}\,{\scriptstyle \neg\forall}$$

5. Prouver le séquent $\vdash \forall x, A(x) \vee \exists x, \neg A(x)$.