

2. Soit la règle suivante, appelée *règle du tiers exclu*. Prouver cette règle.

$$\frac{\mathcal{F}; A \vdash B \quad \mathcal{F}; \neg A \vdash B}{\mathcal{F} \vdash B} \text{TE}$$

3. Soit la règle suivante, appelée *\perp e*. Prouver cette règle.

$$\frac{\mathcal{F}; \neg A \vdash A}{\mathcal{F}; \neg A \vdash \perp} \perp e$$

4. Prouver la règle suivante :

$$\frac{\mathcal{F}; \exists x \neg A(x) \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F}}{\mathcal{F}; \neg \forall x, A(x) \vdash B} \neg \forall$$

5. Prouver le séquent $\vdash \forall x, A(x) \vee \exists x, \neg A(x)$.

Exercice 4 — Donner une démonstration sémantique puis une démonstration en déduction naturelle des tautologies suivantes :

1. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
2. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
3. $(\exists x, A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x, A(x) \wedge \exists x, B(x))$
4. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$
5. Soit c une constante, P un prédicat unaire et Q un prédicat binaire. En admettant que la règle *\wedge ig* de l'exercice suivant est correcte, prouver la tautologie

$$((\forall x, P(x) \rightarrow Q(x, c)) \wedge (\exists y, P(y))) \rightarrow (\exists z, Q(z, c))$$

Exercice 5 — Montrer que les règles suivantes sont correctes :

$$\frac{\Gamma; A \wedge B \vdash F}{\Gamma; A; B \vdash F} \wedge eg \qquad \frac{\Gamma; A; A \rightarrow B; B \vdash F}{\Gamma; A; A \rightarrow B \vdash F} \rightarrow ig$$

$$\frac{\Gamma; A; B \vdash F}{\Gamma; A \wedge B \vdash F} \wedge ig \qquad \frac{\Gamma; \neg A; \neg B \vdash C}{\Gamma; \neg(A \vee B) \vdash C} \vee m$$

Exercice 6 — Retrouver les erreurs :

$$\frac{\frac{\frac{A \vee B \vdash A \vee B \dots}{A \vee B \vdash A} \dots \quad \frac{A \vee B \vdash A \vee B \dots}{A \vee B \vdash B} \dots}{A \vee B \vdash A \wedge B} \dots}{\vdash A \vee B \rightarrow A \wedge B} \dots \qquad \frac{\frac{\frac{\frac{\exists x, A \vdash \exists x, A \dots}{\exists x, A; A \vdash A} \dots}{\exists x, A \vdash A} \dots}{\exists x, A \vdash \forall x, A} \dots}{\vdash \exists x, A \rightarrow \forall x, A} \dots$$