Notes du cours
λ-calcul

Master 2 LMFI
Logique Mathématique et
Fondements de l'Informatique
Université Paris Diderot

Année universitaire 2013–2014

Christine Tasson

Table des matières

1 Sémantique dénotationnelle du λ-calcul simplement typé **5**
1.1 Introduction 5
1.2 Premiers modèles 5
1.2.1 Modèle des ensembles et des fonctions 5
1.2.2 Modèle multirelationnel 6
1.3 Modèles catégoriques du λ-calcul simplement typé 6
1.3.1 Objet terminal et produit cartésien, propriétés universelles 8
1.3.2 Foncteurs 11
1.4 Catégories cartésiennes fermées 11
1.5 Interprétation du lambda-calcul simplement typé dans une CCC 12

2 Sémantique dénotationnelle du λY-calcul simplement typé **17**
2.1 Introduction 17
2.2 CPO 18
2.3 Modèle du λY-calcul 19
2.3.1 CCC enrichie en CPO 19
2.3.2 Interprétation 20

Chapitre 1

Sémantique dénotationnelle du λ-calcul simplement typé

1.1 Introduction

Jusqu'ici on a étudié des sémantiques opérationnelles ou sémantiques par réduction :

$$(\beta)\quad (\lambda x.\, t)\, u \longrightarrow_\beta \{t/u\}\, x \qquad (\eta)\quad \lambda x.\,(t)\, x \longrightarrow_\eta t \qquad (\text{si } x \notin FV(t))$$

Maintenant, on va s'intéresser à des sémantiques dénotationnelles : on se donne un domaine D et on va interpréter les λ-termes dans ce domaine : $[\![t]\!] \in \mathsf{D}$.

On dira alors qu'une interprétation est correcte lorsque :

$$t =_\beta u \Rightarrow [\![t]\!] = [\![u]\!].$$

Il y a plusieurs intérêts à cette approche. Par exemple, avec une interprétation correcte, on a que si t, u n'ont pas la même interprétation (ie $[\![t]\!] \neq [\![u]\!]$) alors ils ne sont pas β-équivalents.

Par ailleurs, cela permet d'introduire de nouvelles constructions syntaxiques compatibles avec Λ.

Rappel du calcul simplement typé avec des paires. Codage usuel des paires à la Church :

Typage des paires de Church :

On peut donc encoder la conjonction par une flèche :

1.2 Premiers modèles

1.2.1 Modèle des ensembles et des fonctions

On considère un premier modèle pour le λ-calcul simplement typé. Les types seront interprétés par des ensembles (noté $[\![A]\!]$) et un terme de type $A \to B$ par une fonction de $[\![A]\!]$ dans $[\![B]\!]$.

Par exemple :

- $[\![\lambda^A x.x]\!] = \begin{array}{c} [\![A]\!] \to [\![A]\!] \\ a \mapsto a \end{array}$
- $[\![\lambda^A x.\lambda^B y.x]\!] = \begin{array}{ccc} [\![A]\!] \times [\![B]\!] & \to & [\![A]\!] \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array}$ ou

– $[\![\lambda^A x.\lambda^B y.x]\!] = \begin{array}{c} [\![A]\!] \to ([\![B]\!] \to [\![A]\!]) \\ a \mapsto (b \mapsto a) \end{array}$

Définition 1.1 (***Modèle des ensembles et des fonctions***)

On se donne une interprétation des types de base : $(E_o)_{o \in \mathcal{B}}$.
- *l'interprétation des types est donnée par :*
  - $[\![o]\!] = E_o$ *si* $o \in \mathcal{B}$
  - $[\![A \to B]\!] = [\![A]\!] \to [\![B]\!]$
  - $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$
- *L'interprétation des termes est donnée par :*
  - $[\![\lambda^A x.t]\!] = \begin{array}{c} [\![A]\!] \to [\![B]\!] \\ a \mapsto [\![x : A \vdash t : B]\!](a) \end{array}$
  - $[\![(t)\, u]\!] = [\![t]\!]([\![u]\!])$
  - $[\![\langle t, u\rangle]\!] = ([\![t]\!], [\![u]\!])$

Est-ce bien un modèle ? Il faut vérifier que si $t =_\beta u$, alors $[\![t]\!] = [\![u]\!]$. Pour cela, le cas clé à vérifier est celui de β-radical ($[\![(\lambda x.\, t)\, u]\!] = [\![t\,\{u/x\}]\!]$) puis il faut vérifier la compatibilité.

Intuitivement, $[\![A]\!]$ est l'ensemble des valeurs de type A.

1.2.2 Modèle multirelationnel

On interprète maintenant les types comme des ensembles et les termes comme des multirelations, $\mathrm{REL}_!$.

Définition 1.2 (***Multiensemble***)

Soit X un ensemble, $\mathcal{M}_{fin}(X)$ est l'ensemble des multiensembles finis de X. (Il s'agit d'une fonction de X dans $\mathbb{N}$ à support fini). On notera $[\,]$ le multiensemble vide.

Définition 1.3 (***Multirelation***)

Une multirelation entre A et B est une relation entre $\mathcal{M}_{fin}(A)$ et B :

$$\rho \subset \mathcal{M}_{fin}([\![A]\!]) \times [\![B]\!]$$

Pour vérifier que $\mathrm{REL}_!$ est bien un modèle, le plus simple est de travailler dans un cadre plus général où on définit d'abord ce qu'est un modèle catégorique du λ-calcul simplement typé et on montre ensuite que $\mathrm{REL}_!$ forme un tel modèle catégorique.

1.3 Modèles catégoriques du λ-calcul simplement typé

On va montrer que toute catégorie cartésienne fermée forme un modèle du λ-calcul simplement typé. Pour cela, on introduit les éléments nécessaires de théorie des catégories.

Définition 1.4

Une catégorie C est la donnée :
- *d'une classe d'objets, notée $Ob(\mathsf{C})$;*
- *d'une classe de morphismes, pour tout $A, B \in Ob(\mathsf{C})$, notée $\mathsf{C}(A, B)$.*

tels que :
- *pour tout $A \in Ob(\mathsf{C})$, il existe un morphisme $id_A \in \mathsf{C}(A, A)$*
- *et une opération sur les morphismes telle que pour tout $f \in \mathsf{C}(A, B)$ et $g \in \mathsf{C}(B, C)$, $g \circ f \in \mathsf{C}(A, C)$*

qui vérifient les conditions suivantes :

– *l'identité est le neutre pour la composition :*

$$\forall f \in \mathsf{C}(A,B), \quad f = f \circ id_A = id_B \circ f$$

– *associativité de la composition :*

$$\forall f \in \mathsf{C}(A,B), g \in \mathsf{C}(B,C), h \in \mathsf{C}(C,D), \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On a une représentation diagrammatique des catégories : un morphisme $f \in \mathsf{C}(A,B)$ se note $A \xrightarrow{f} B$. Par exemple, la condition de neutralité de l'identité par rapport à la composition s'exprime par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[rr, bend left=50, "f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right=50, "f"'] & B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Exemples de catégories :

– <u>SET</u> : les objets sont les ensembles, les morphismes sont les fonctions, l'identité est la fonction identité et la composition est la composition.

– <u>REL</u> : les objets sont les ensembles, les morphismes sont les relations : $Rel(X,Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$, l'identité est la relation diagonale : $id_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ et la composition est la composition relationnelle :

$$\rho_1 \subset X \times Y, \rho_2 \subset Y \times Z, \rho_2 \circ \rho_1 = \{(x,z) \mid \exists y, (x,y) \in \rho_1, (y,z) \in \rho_2\}$$

– <u>$\mathrm{REL}_!$</u> :
  – les objets sont les ensembles,
  – les morphismes sont les multirelations $\mathrm{REL}_!(X,Y) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_{fin}(X) \times Y)$
  – l'identité est la relation $id_X \subset \mathcal{M}_{fin}(X) \times X$ définie par $id_X = \{([x],x) \mid x \in X\}$
  – la composition est définie comme suit : pour $\rho_1 \subset \mathcal{M}_{fin}(X) \times Y, \rho_2 \subset \mathcal{M}_{fin}(Y) \times Z$,

$$(\mu, z) \in \rho_2 \circ \rho_1 \qquad \text{ssi} \qquad \begin{cases} \exists \eta \in \mathcal{M}_{fin}(Y),\ \exists k \geq 1, \forall i \in [k],\ \exists y_i \in Y \text{ et } \exists \mu_i \in \mathcal{M}_{fin}(X) \\ \text{tel que } \eta = [y_1, \ldots, y_k],\ \text{et } (\eta, z) \in \rho_2, \\ \text{et } \mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k,\ \text{et } (\mu_i, y_i) \in \rho_1 \end{cases}$$

On utilise parfois la notation suivante pour exprimer cette condition :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A & \multicolumn{4}{c}{\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\rho_2 \circ \rho_1\qquad\qquad\qquad}} & C \\
\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k & & & & & & z \\
 & A \xrightarrow{\quad\rho_1\quad} & B & \| & B & \xrightarrow{\quad\rho_2\quad} & C \\
 & \mu_1 & b_1 & \| & [b_1, & & \\
 & \vdots & & \| & \vdots = \eta & & z \\
 & \mu_n & b_n & \| & b_n] & &
\end{array}$$

Définition 1.5 (*Isomorphismes dans une catégorie*)

Un isomoprhisme dans une catégorie C *est un morphisme* $f \in \mathsf{C}(X,Y)$ *tel qu'il exists* $g \in \mathsf{C}(Y,X)$ *tel que (1)* $f \circ g = id_Y$ *et (2)* $g \circ f = id_X$

Proposition 1.6

Si f *est un isomorphisme,* g *est complètement déterminé par* f *et on le note* f^{-1}.

Démonstration : En effet, s'il existe un g' vérifiant (1) et (2), alors on a :

$$g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = id_X \circ g' = g'$$

□

Exemples :

- SET : les isomorphismes sont les fonctions bijectives.
- REL : les isomorphismes sont les graphes des fonctions bijectives.
- $\mathrm{REL}_!$: les isomorphismes entre A et B sont les relations de la forme :

$$\{([a], f(a)) \mid a \in A\} \quad \text{où } f \text{ est une bijection de } A \text{ dans } B.$$

Démonstration : On cherche à caractériser les $h \in \mathrm{REL}_!(A,B)$ tels qu'il existe $h^{-1} \in \mathrm{REL}_!(B,A)$ tel que

$$h \circ h^{-1} = id_B \qquad \text{et} \qquad h^{-1} \circ h = id_A.$$

On a $id_A \subset \mathcal{M}_{fin}(A) \times A$ et même $id_A = \{([x], x) \mid x \in A\}$.
Pour tout $a \in A$, on a $([a], a) \in id_A = h^{-1} \circ h$. Par définition de la composition dans $\mathrm{REL}_!$, il existe $\mu \in \mathcal{M}_{fin}(B)$ tel que $\mu = [b, b_1, \ldots, b_K]$ et $[a] = \eta + \eta_1 + \cdots + \eta_k$, sans perdre de généralité, on peut donc supposer que $\eta = [a]$ et $\eta_i = []$, avec $([a], b) \in h$. De même, pour tout $b \in B$, il existe $a' \in A$ tel que $([b], a') \in h^{-1}$.
Supposons que $([a], b_1) \in h$ et $([a], b_2) \in h$. Il existe $a_i \in A$ tels que $([b_i], a_i) \in h^{-1}$. Par définition de la composition dans $\mathrm{REL}_!$, $([a], a_i) \in h^{-1} \circ h = id_A$ donc $a_1 = a_2 = a$. Maintenant, $([b_1], b_2) \in h \circ h^{-1} = id_B$ donc $b_1 = b_2$. On note $f(a)$ l'unique b tel que $([a], f(a)) \in h$, on a montré que $([f(a)], a) \in h^{-1}$.
Par un raisonnement similaire, on peut définir f^{-1} fonction de B dans A telle que $([b], f^{-1}(b)) \in h^{-1}$ et montrer que f et f^{-1} sont inverses l'une de l'autre. Donc f est une bijection entre A et B.
Supposons maintenant que $(\mu, b) \in h$. Remarquons que par définition de la composition dans $\mathrm{REL}_!$, $(\mu, f^{-1}(b)) \in h^{-1} \circ h = id_A$ donc $\mu = [f^{-1}(b)]$.

□

1.3.1 Objet terminal et produit cartésien, propriétés universelles

Définition 1.7 (*Objet terminal*)

Un objet $\top \in Ob(\mathsf{C})$ *est* **terminal** *s'il est tel que pour tout* $X \in Ob(\mathsf{C})$, $\mathsf{C}(X, \top)$ *est un singleton :*

$$X \xrightarrow{\exists ! *} \top$$

Proposition 1.8

Les objets terminaux sont uniques à isomorphismes près.

Démonstration : Supposons que $\top, \top'$ sont des objets terminaux de C. Alors on a : $\mathsf{C}(\top, \top') = \{h\}$, $\mathsf{C}(\top', \top) = \{g\}$ et par ailleurs $\mathsf{C}(\top, \top)$ est aussi un singleton, or $id_\top, g \circ h \in \mathsf{C}(\top, \top)$, donc $g \circ h = id_\top$ et de même $h \circ g = id_{\top'}$ ce qui montre que h et g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

□

Exemples

- Dans <u>SET</u>, c'est n'importe quel singleton.
- Dans <u>REL</u>, c'est l'ensemble vide.
- Dans <u>REL$_!$</u>, c'est l'ensemble vide.

Définition 1.9 (*Produit cartésien*)

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'objets de C, le produit cartésien des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est la donnée :

- *d'un objet $X_1 \times \cdots \times X_n$*
- *de morphismes : $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ tels que la propriété universelle suivante est vérifiée :*

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \\
 & & X_i \\
Z \arrow[r, dashed, "\exists! h"] \arrow[uurr, bend left, "f_1"] \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[drr, bend right, "f_n"'] & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[uur, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_n"] & \\
 & & X_n
\end{tikzcd}$$

Pour tout $Z \in Ob(\mathsf{C})$ et toute famille $(f_i : Z \to X_i)_i$ de morphismes, il existe un unique morphisme $h \in \mathsf{C}(Z, X_1 \times \cdots \times X_n)$ tel que pour tout i, $\pi_i \circ h = f_i$

Exemples

- Dans <u>SET</u>, c'est le produit cartésien.
- Dans <u>REL</u>, c'est l'union disjointe :

$$A_1 \times A_2 = \{1\} \times A_1 \cup \{2\} \times A_2.$$

  En effet, on a le morphisme identité de A_1 dans A_1 et le morphisme vide de A_1 dans A_2.
- Idem dans <u>REL$_!$</u>.

Proposition 1.10

L'objet terminal est l'élément neutre du produit cartésien.

<u>Démonstration :</u> On veut montrer que $A \times \top \equiv A$. Pour construire l'isomorphisme, on utilise la propriété universelle :

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
A \arrow[r, dashed, "\exists! h"] \arrow[urr, bend left, "id_A"] \arrow[drr, bend right, "*"'] & A \times \top \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2", "*"'] & \\
 & & \top
\end{tikzcd}$$

On a donc un candidat avec π_1. Il faut encore montrer que $h \circ \pi_1$ est l'identité de $A \times \top$. On utilise à nouveau la propriété universelle : en utilisant le fait que id et

$h \circ \pi_1$ font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \\
A \times \top \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[urrr, bend left, "\pi_1"] \arrow[drrr, bend right, "*"'] & A \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "id_A"] \arrow[drr, bend right, "*"'] & A \times \top \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2", "*"'] & \\
 & & & \top
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & A \\
A \times \top \arrow[r, "id_{A\times\top}"] \arrow[urr, bend left, "\pi_1"] \arrow[drr, bend right, "*"'] & A \times \top \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2", "*"'] & \\
 & & \top
\end{tikzcd}$$

or on connaît l'unicité d'un tel morphisme.

□

Définition 1.11 (*Catégories cartésiennes*)

- *Une catégorie est cartésienne si toutes les familles finies admettent un produit cartésien.*
- *Une catégorie est cartésienne si :*
  - *elle possède un objet terminal*
  - *pour tous X_1, X_2, on a un objet $X_1 \times X_2 \in Ob(\mathsf{C})$ et $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ et pour tous $f_i \in \mathsf{C}(Y, X_i)$, on a $\langle f_1, f_2\rangle \in \mathsf{C}(Y, X_1 \times X_2)$ qui vérifient les équations :*

$$\pi_i \circ \langle f_1, f_2\rangle = f_i \qquad \langle f_1, f_2\rangle \circ g = \langle f_1 \circ g, f_2 \circ g\rangle \qquad \langle \pi_1, \pi_2\rangle = id_{X_1 \times X_2}$$

Proposition 1.12

Les deux définitions sont équivalentes.

Démonstration : pour 1 implique 2, on utilise la propriété universelle pour vérifier les égalités...

□

Exemple :

- SET est une catégorie cartésienne.
- REL est une catégorie cartésienne.
- $\text{REL}_!$ est une catégorie cartésienne :

Démonstration :
- On rappelle que l'objet terminal de $\text{REL}_!$ est l'ensemble vide.
- On montre que le produit cartésien est l'union disjointe : Soient A_1, A_2, $A_1 \sqcup A_2 = \{(i, a) \mid i \in \{1, 2\}, a \in A_i\}$
- La projection est : $\pi_i = \{([(i, a)], a) \mid a \in A_i\}$
- Paire : $\langle \rho_1, \rho_2\rangle = \{(\eta, (i, a_i)) \mid (\eta, a_i) \in \rho_i, i \in \{1, 2\}\} \subseteq \mathcal{M}_{fin}(Z) \times (A_1 \sqcup A_2)$
  Calcul de $\pi_1 \circ \langle \rho_1, \rho_2\rangle$:

$$\begin{array}{ccccccc}
Z & & & \xrightarrow{\quad\pi_1 \circ <\rho_1, \rho_2>\quad} & & & A_1 \\
\eta & & & & & & a \\
Z & \xrightarrow{<\rho_1,\rho_2>} & A_1 \times A_2 & \| & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\
\eta & & (1, a) & \| & [(1, a)] & & a
\end{array}$$

D'où, $\pi_1 \circ \langle \rho_1, \rho_2\rangle = \{(\eta, a) \mid (\eta, a) \in \rho_1\} = \rho_1$.

Lemme 1.13

$\mathcal{M}_{fin}(Z \sqcup B) \equiv \mathcal{M}_{fin}(Z) \times \mathcal{M}_{fin}(B)$.

□

1.3.2 Foncteurs

Définition 1.14

Soient C, D deux catégories. Un **foncteur** $F : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{D}$ *est la donnée de :*
- *pour tout objet $A \in Ob(\mathsf{C})$, un objet $F(A) \in Ob(\mathsf{D})$;*
- *pour tout morphisme $f \in \mathsf{C}(A, B)$, un morphisme $F(f) \in \mathsf{D}(F(A), F(B))$*

tels que :

$$F(id_A) = id_{F(A)} \qquad F(f \circ_{\mathsf{C}} g) = F(f) \circ_{\mathsf{D}} F(g)$$

Exemple 1.15

- *le foncteur identité*
- *le foncteur d'oubli de SET dans REL :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{SET} & U & \underline{REL} \\ A & \mapsto & A \\ f : (A \to B) & \mapsto & \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \end{array}$$

- *le foncteur produit cartésien : $\_ \times B$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{C} & \_ \times B & \mathsf{C} \\ A & \mapsto & A \times B \\ f : (A \to C) & \mapsto & \langle f \circ \pi_1, \pi_2 \rangle = f \times id_B : (A \times B \to C \times B) \end{array}$$

- *en fait le produit cartésien est un bifoncteur. Pour tous $f \in \mathsf{C}(A, C)$ et $g \in \mathsf{C}(B, D)$, on peut définir le morphisme $f \times g \in \mathsf{C}(A \times B, C \times D)$ par :*

$f \times g =< f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 >$ *voir le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] & C \\ A \times B \arrow[ur, bend left, "\pi_1"] \arrow[r, dashed, "f \times g"] \arrow[dr, bend right, "\pi_2"'] & C \times D \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

1.4 Catégories cartésiennes fermées

Définition 1.16

*Soit C une catégorie cartésienne. Soient A, B deux objets de C. L'***objet des morphismes** $A \Rightarrow B$ *est un objet de C muni d'un morphisme $\mathsf{Ev}_{A,B} \in \mathsf{C}((A \Rightarrow B) \times A, B))$ satisfaisant la propriété universelle suivante : $\forall Z \in Ob(\mathsf{C}), f \in \mathsf{C}(Z \times A, B), \exists! \Lambda(f) \in \mathsf{C}(Z, A \Rightarrow B)$ tel que :*

$$f = \mathsf{Ev}_{A,B} \circ (\Lambda(f) \times A)$$

Proposition 1.17

L'objet des morphismes est unique à isomorphisme près.

Caractérisation équationnelle de l'objet des morphismes :

On a $\mathsf{Ev}_{A,B} \circ \Lambda(\mathsf{Ev}_{A,B}) \times A = \mathsf{Ev}_{A,B} = \mathsf{Ev}_{A,B} \circ id_{A\Rightarrow B\times A}$.

$$\begin{tikzcd}
A \Rightarrow B \times A \arrow[d, bend right=60, "\Lambda(\mathsf{Ev}_{A,B})\times id_A"'] \arrow[d, bend left=30, "id_{A\Rightarrow B\times A}"] \arrow[dr, bend left, "\mathsf{Ev}_{A,B}"] & \\
A \Rightarrow B \times A \arrow[r, "\mathsf{Ev}_{A,B}"] & B
\end{tikzcd}$$

La propriété universelle définissant $\mathsf{Ev}_{A,B}$ assure que $\Lambda(\mathsf{Ev}_{A,B}) \times id_A = id_{A\Rightarrow B\times A} = id_{A\Rightarrow B} \times id_A$. On en tire l'équation $\Lambda(\mathsf{Ev}_{A,B}) = id_{A\Rightarrow B}$.

Par ailleurs, si $f \in \mathsf{C}(Z \times A, B)$ et $g \in \mathsf{C}(Z', Z)$ alors les deux diagrammes commutent :

$$\begin{tikzcd}
Z' \times A \arrow[r, "g\times id_A"] \arrow[dr, "="', "\Lambda(f\circ(g\times id_A))"'] & Z \times A \arrow[dr, bend left, "f"] & \\
& A \Rightarrow B \times A \arrow[r, "\mathsf{Ev}_{A,B}"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z' \times A \arrow[r, "g\times id_A"] \arrow[dr, "="', "(\Lambda(f)\circ g)\times id_A"'] & Z \times A \arrow[d, "\Lambda(f)\times id_A"', "="] \arrow[dr, bend left, "f"] & \\
& A \Rightarrow B \times A \arrow[r, "\mathsf{Ev}_{A,B}"] & B
\end{tikzcd}$$

d'où par la propriété universelle de l'objet des morphismes, on a

$$(\Lambda(f) \circ g) = \Lambda(f \circ (g \times id_A))$$

Définition 1.18

Une **catégorie cartésienne close** *(*CCC*) est une catégorie cartésienne telle que pour tous objets A, B, il existe un objet des morphismes.*

On peut également donner une définition équationnelle des CCC :

Définition 1.19

Une catégorie cartésienne est close lorsque, pour tous $A, B \in Ob(\mathsf{C})$, on se donne
- *un objet $A \Rightarrow B$ et un morphisme $\mathsf{Ev}_{A,B} \in \mathsf{C}((A \Rightarrow B) \times A, B)$ et*
- *pour tout $f \in \mathsf{C}(Z \times A, B)$ on se donne un morphisme $\Lambda(f) \in \mathsf{C}(Z, A \Rightarrow B)$*

vérifiant :
- $f = \mathsf{Ev}_{A,B} \circ (\Lambda(f) \times id_A)$
- $\Lambda(f) \circ g = \Lambda(f \circ (g \times id_A))$
- $\Lambda(\mathsf{Ev}_{A,B}) = id_{A\Rightarrow B}$.

Exemple 1.20

Dans $REL_!$, $A \Rightarrow B = \mathcal{M}_{fin}(A) \times B$ on montre que $REL_!$ est une CCC *en montrant que l'objet des morphismes est celui indiqué ci-dessus.*

1.5 Interprétation du lambda-calcul simplement typé dans une CCC

L'objectif de cette section va être de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.21

Soit C *une catégorie cartésienne fermée. Alors si $\Gamma \vdash t : A$ et $t \longrightarrow_\beta^\star u$, on a :*

$$\Gamma \vdash u : A \text{ et } [\![t]\!]^\Gamma = [\![u]\!]^\Gamma$$

On définit une interprétation $[\![\ ]\!]$ qui à tous types A ou $A \to B$ va associer un objet de C avec $[\![A \to B]\!] = [\![A]\!] \Rightarrow [\![B]\!]$. On va interpréter tout terme dans un jugement de typage donné : $x_1 : A_1, \dots x_n : A_n \vdash t : B$ sera interprété par un morphisme de $\mathsf{C}(\top \times [\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!], [\![B]\!])$.

On utilisera la notation suivante pour interpréter un terme t, pour peu qu'il soit typable dans le contexte Γ :

$$[\![t]\!]^\Gamma = [\![\Gamma \vdash t : A]\!]$$

Rappelons que l'objet terminal est le neutre du produit cartésien. Si Γ est le contexte vide, alors $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]$ est un morphisme dans $\mathsf{C}(\top, [\![A]\!])$ et si Γ est non vide $x_1 : A_1, \dots x_n : A_n$ et que l'on note $[\![\Gamma]\!] = [\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!]$, alors $[\![t]\!]^\Gamma$ est un morphisme dans $\mathsf{C}([\![\Gamma]\!], [\![B]\!])$.

Définition 1.22

L'interprétation d'un terme du λ-calcul simplement typé est défini par induction sur les règles de typage par :

- *Variable :*

$$[\![x_1 : A_1 \dots x_n : A_n \vdash x_i : A_i]\!] = \pi_i \in \mathsf{C}([\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!], [\![B]\!])$$

- *Application : On suppose qu'on a* $[\![t]\!]^\Gamma \in \mathsf{C}([\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!], [\![A]\!] \Rightarrow [\![B]\!])$ *et* $[\![u]\!]^\Gamma \in \mathsf{C}([\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!], [\![A]\!])$. *On pose alors :*

$$[\![x_1 : A_1 \dots x_n : A_n \vdash (t)u : B]\!] = \mathsf{Ev}_{A,B} \circ \langle [\![t]\!]^\Gamma, [\![u]\!]^\Gamma \rangle$$

- *Abstraction : On suppose qu'on a* $[\![t]\!]^{\Gamma, x:A} \in \mathsf{C}([\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!] \times [\![A]\!], [\![B]\!])$. *On pose alors :*

$$[\![x_1 : A_1 \dots x_n : A_n \vdash \lambda x.t : A \to B]\!] = \Lambda([\![t]\!]^{\Gamma, x:A})$$

Exercice 1.1

- $\lambda x^A.\, \lambda y^B.\, y$
- $\lambda x^A.\, \lambda y^B.\, \langle x, y \rangle$
- $\lambda f^{A \to A}.\, \lambda x^A.\, (f)\, x$
- $\lambda f^{A \to A}.\, \lambda x^A.\, (f)\, (f)\, x$

On veut montrer le théorème de correction de l'interprétation :

Théorème 1.23 (*Théorème de correction de la sémantique catégorique*)

Soient $t, u \in \Lambda$ tels que $\Gamma \vdash t : A$ et $\Gamma \vdash u : A$, alors :

$$t =_\beta u \quad \Rightarrow \quad [\![t]\!]^\Gamma = [\![u]\!]^\Gamma$$

Pour montrer ce théorème, on va montrer que l'interprétation d'un lambda-terme est indifférente par β-réduction, c'est-à-dire que

$$[\![(\lambda x.\, t)\, u]\!]^\Gamma = [\![t\, \{u/x\}]\!]^\Gamma.$$

On remarque qu'elle passe au contexte, c'est à dire que :

Si $[\![t]\!]^\Gamma = [\![u]\!]^\Gamma$, alors $[\![\lambda x^A.\, t]\!]^\Gamma = [\![\lambda x^A.\, u]\!]^\Gamma$, $[\![(t)\, s]\!]^\Gamma = [\![(u)\, s]\!]^\Gamma$ et $[\![(s)\, t]\!]^\Gamma = [\![(s)\, u]\!]^\Gamma$.

Pour cela, on va montrer le lemme de substitution dont la propriété ci-dessus se déduit :

Lemme 1.24 (*de substitution*)

Soient $t, u \in \Lambda$ tels que $\Gamma, x : A \vdash t : B$ et $\Gamma \vdash u : A$, alors :

$$\llbracket t\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} = \llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x:A} \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle$$

On utilisera notamment les lemmes d'échange et d'affaiblissement :

Lemme 1.25 (*d'échange*)

L'isomorphisme canonique $\Phi^{\Gamma,\Delta}_{A,B} : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \to \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket$ est tel que :

Si $\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash t : C$, alors $\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash t : C$ et

$$\llbracket \Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash t : C \rrbracket = \llbracket \Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash t : C \rrbracket \circ \Phi_{A,B}$$

Démonstration : L'isomorphisme ϕ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \arrow[r, bend left, "\phi = id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \times \pi_B \times \pi_A \times id_{\llbracket \Delta \rrbracket}"] & \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \arrow[l, bend left, "\phi^{-1} = id_{\llbracket \Gamma \rrbracket} \times \pi'_A \times \pi'_B \times id_{\llbracket \Delta \rrbracket}"] \end{tikzcd}$$

où $\pi_A : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$ et $\pi_B : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$ et $\pi'_A : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$ et $\pi'_B : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$.

Le lemme d'échange se démontre par récurrence sur la hauteur d'une dérivation de typage.

Si $h = 1$, alors $t = x$ et on a trois cas possibles :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \times A \times B \times \Delta \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & \llbracket A \rrbracket \\ \Gamma \times B \times A \times \Delta \arrow[ur, "\pi'_A"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \Gamma \times A \times B \times \Delta \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & \llbracket B \rrbracket \\ \Gamma \times B \times A \times \Delta \arrow[ur, "\pi'_B"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \Gamma \times A \times B \times \Delta \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & \llbracket C \rrbracket \\ \Gamma \times B \times A \times \Delta \arrow[ur, "\pi'_C"'] & \end{tikzcd}$$

On vérifie que les trois diagrammes commutent par définition de $\phi_{A,B}$ et par les propriétés du produit cartésien.

Pour l'hérédité, on suppose que la proposition est vraie pour toute dérivation de typage de hauteur h et pour tous Γ et Δ. Considérons une dérivation de hauteur $h+1$.

Si la dernière règle est une application et que l'on type le terme $(t)u$, alors par hypothèse de récurrence, les deux diagrammes commutent

$$\begin{tikzcd} \Gamma \times A \times B \times \Delta \arrow[r, "\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & \llbracket C \rrbracket \\ \Gamma \times B \times A \times \Delta \arrow[ur, "\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \Gamma \times A \times B \times \Delta \arrow[r, "\llbracket u \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & \llbracket C \rrbracket \\ \Gamma \times B \times A \times \Delta \arrow[ur, "\llbracket u \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta}"'] & \end{tikzcd}$$

Donc

$$\begin{aligned} \llbracket (t)u \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta} &= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta} \rangle \text{ induction} \\ &= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta} \circ \phi, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta} \circ \phi \rangle \text{ paire et composition} \\ &= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta} \rangle \circ \phi \text{ interprétation} \\ &= \llbracket (t)u \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta} \circ \phi \end{aligned}$$

Si la dernière règle est une abstraction et que le jugement est $\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash \lambda z^C.\, t : C \to D$, alors par hypothèse de récurrence, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times A \times B \times \Delta \times C \arrow[rr, "\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta, z^C}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & & \llbracket D \rrbracket \\
\Gamma \times B \times A \times \Delta \times C \arrow[urr, "\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta, z^C}"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl}
\llbracket \lambda z^C.\, t \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta} & = & \Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A, y^B, \Delta, z^C}) \\
& = & \Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta, z^C} \circ \phi_{A,B}^{\Gamma, (\Delta, z^C)}) \\
& = & \Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta, z^C} \circ \phi_{A,B}^{\Gamma, \Delta} \times id_{\llbracket C \rrbracket}) \\
& = & \Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, y^B, x^A, \Delta, z^C}) \circ \phi_{A,B}^{\Gamma, \Delta}
\end{array}$$

□

Lemme 1.26 (*d'affaiblissement*)

Soient $t, u \in \Lambda$ tels que $\Gamma \vdash t : B$, et $x : A \notin \Gamma$, alors :

$$\llbracket \Gamma \vdash t : B \rrbracket = \llbracket \Gamma, x : A \vdash t : B \rrbracket \circ \pi_1$$

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \Gamma \rrbracket \arrow[rr, "\llbracket t \rrbracket^{\Gamma}", "\shortparallel"'] \arrow[dr, bend right, "\pi_1"'] & & \llbracket B \rrbracket \\
& \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \arrow[ur, bend right, "\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Le lemme d'affaiblissement se démontre par induction sur la hauteur d'une dérivation de typage :

- Si $h = 1$, alors $t = x_i$ où $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ et $B = A_i$ et on sait que $x_i \neq x$ pour tout i. On a $\llbracket \Gamma \vdash x_i : A_i \rrbracket = \pi_i$ et $\llbracket \Gamma, x : A \vdash x_i : A_i \rrbracket = \pi_1$.
  $(\pi_1 : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \to \llbracket \Gamma \rrbracket); (\pi_i : \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket A_i \rrbracket)$
- Hérédité : On suppose le résultat vrai pour les preuves de hauteur inférieure ou égale à k.
  Si elle est obtenue par un typage d'abstraction :
  On a par hypothèse d'induction : $\llbracket \Gamma, y : B \vdash t : C \rrbracket \circ \pi_1 \simeq \llbracket \Gamma, y : B, x : A \vdash t : C \rrbracket$ et

$$\begin{array}{rl}
\llbracket \lambda y.\, t \rrbracket^{\Gamma, x:A} & = \llbracket \Gamma, x : A \vdash \lambda y.\, t : B \to C \rrbracket \\
& = \Lambda(\llbracket \Gamma, x : A, y : B \vdash t : C \rrbracket) \\
& = \Lambda(\llbracket \Gamma, y : B, x : A \vdash t : C \rrbracket \circ \Phi) \\
& = \Lambda(\llbracket \Gamma, y : B \vdash t : C \rrbracket \circ \pi_1 \circ \Phi) \\
& = \Lambda(\llbracket \Gamma, y : B \vdash t : C \rrbracket \circ (\pi_1 \times \llbracket B \rrbracket)) \\
& = \Lambda(\llbracket \Gamma, y : B \vdash t : C \rrbracket) \circ \pi_1 \qquad \text{(par curryfication)} \\
& = \llbracket \Gamma \vdash \lambda y.\, t : B \to C \rrbracket \circ \pi_1 \qquad \text{(par déf. de l'int. de } \lambda) \\
& = \llbracket \Gamma, x : A \vdash \lambda y.\, t : B \to C \rrbracket \qquad \text{(par hypothèse d'induction)}
\end{array}$$

  Si elle est obtenue par une application, par induction on a :

$$\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x:A} = \llbracket t \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1 \qquad \llbracket u \rrbracket^{\Gamma, x:A} = \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1$$

  on a :

$$\llbracket (t)\, u \rrbracket^{\Gamma} = \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle$$

et

$$\begin{aligned}
\llbracket (t)\, u \rrbracket^{\Gamma, x:A} &= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x:A}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma, x:A} \rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1 \rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket t \rrbracket^{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \circ \pi_1 \qquad \text{(par les propriétés de } \langle , \rangle \text{ et } \circ) \\
&= \llbracket (t)\, u \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1
\end{aligned}$$

□

On prouve maintenant le lemme de substitution :

Démonstration : On va donc montrer, par induction sur la structure de t, que si $t, u \in \Lambda$ tels que $\Gamma, x : A \vdash t : B$ et $\Gamma \vdash u : A$, on a $\llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} = \llbracket t \rrbracket^{\Gamma} \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle$

- $t = y (\neq x)$, $t\,\{u/x\} = y$ et $\llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} = \pi'_y$

$$\begin{aligned}
\llbracket y \rrbracket^{\Gamma, x:A} \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle &= \pi_y \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \pi'_y \circ \pi_1 \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \pi'_y \circ id \\
&= pi'_y = \llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma}
\end{aligned}$$

- $t = x$, $t\,\{u/x\} = u$ et $\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x:A} = \pi_2 : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$ et $\llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket = \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} : \Gamma \to A$.
  On a $\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x:A} \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket \Gamma \rangle = \pi_2 \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket \Gamma \rangle = \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} = \llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket$
- Application : $t = (s)\, v$

$$\begin{aligned}
\llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} &= \llbracket s\,\{u/x\}\, v\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket s\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma}, \llbracket v\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket s \rrbracket^{\Gamma, x:A} \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle, \llbracket v \rrbracket^{\Gamma, x:A} \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma}, \rangle \rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket s \rrbracket^{\Gamma, x:A}, \llbracket v \rrbracket^{\Gamma, x:A} \rangle \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \llbracket (s)\, v \rrbracket^{\Gamma, x:A} \circ \langle id, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle
\end{aligned}$$

- Cas de l'abstraction $t = \lambda y^C.\, s$, avec $y \neq x$. On a $t\,\{u/x\} = \lambda y.\, s\,\{u/x\}$.

$$\begin{aligned}
\llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} &= \llbracket \lambda y^C.\, s\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} \\
&= \Lambda(\llbracket s\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma, y:C}) \\
&= \Lambda(\llbracket s \rrbracket^{\Gamma, y:C, x:A} \circ \langle id_{\Gamma \times C}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma, y:C} \rangle) \\
&= \Lambda(\llbracket s \rrbracket^{\Gamma, y:C, x:A} \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1 \rangle) \qquad \text{Lemme d'affaiblissement} \\
&= \Lambda(\llbracket s \rrbracket^{\Gamma, x:A, y:C} \circ \phi^{\Gamma}_{A,C} \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \circ \pi_1 \rangle) \qquad \text{Lemme d'échange} \\
&= \Lambda(\llbracket s \rrbracket^{\Gamma, x:A, y:C} \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \circ (\pi_1 \times id_C)) \qquad \text{Voir diagramme ci-dessous} \\
&= \Lambda(\llbracket s \rrbracket^{\Gamma, x:A, y:C} \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle) \circ \pi_1 \qquad \text{Curryfication et composition}
\end{aligned}$$

On vérifie le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times C \arrow[r, "\langle id_{\Gamma \times C}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle"] \arrow[rr, bend right, "\langle \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle, id_C \rangle"'] & (\Gamma \times C) \times A \arrow[r, "\phi"] & \Gamma \times A \times C
\end{tikzcd}$$

□

$$\begin{aligned}
\llbracket (\lambda x.\, t)\, u \rrbracket^{\Gamma} &= \mathsf{Ev} \circ \langle \llbracket \lambda x.\, t \rrbracket^{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x:A}), \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété universelle du produit cartésien, on vérifie que

$$(\Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A}) \times id_A) \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle = \langle \Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A}), \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\llbracket (\lambda x.\, t)\, u \rrbracket^{\Gamma} &= \mathsf{Ev} \circ (\Lambda(\llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A}) \times id_A) \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \llbracket t \rrbracket^{\Gamma, x^A} \circ \langle id_{\Gamma}, \llbracket u \rrbracket^{\Gamma} \rangle \\
&= \llbracket t\,\{u/x\} \rrbracket^{\Gamma} \qquad \text{lemme de substitution}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Sémantique dénotationnelle du λY-calcul simplement typé

2.1 Introduction

On rappelle que λY est une extension du λ-calcul simplement typé avec un opérateur de point fixe, c'est-à-dire des familles de constantes $Y_A : (A \to A) \to A$ et de constantes $\Omega_A : A$ pour tout type A, avec les règles de typage :

$$\frac{}{\Gamma \vdash Y_A : (A \to A) \to A} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Omega_A : A}$$

Et une règle de réduction (Y) :

$$(Y)\, t \longrightarrow_Y (t)\,(Y)\, t.$$

(on n'indique pas le type de Y ici car pour chaque terme $t : A \to A$, il n'y a qu'une seule constante qu'on peut appliquer.)

Pour interpréter Y, on va avoir besoin de se placer dans des CPO (ordres partiels complets) dans lesquels on va pouvoir calculer des (plus petits) points fixes. On veut que notre interprétation vérifie :

$$\begin{aligned} [\![(Y)\, t]\!] &= [\![(t)\,(Y)\, t]\!] \\ &= \mathsf{Ev}_{A,A} \circ \langle [\![t]\!], [\![(Y)\, t]\!] \rangle \end{aligned}$$

On interprète donc $(Y)\, t$ par le point fixe de cette équation.

On obtient par approximations successives :

- $[\![\Omega_A]\!] = \bot$, dans l'ordre partiel, $\bot$ est le plus petit élément.
- $[\![(t)\, \Omega_A]\!]$, l'information obtenue en appliquant une fois t. Par exemple si $t = \lambda f^{B \to B}.\, \lambda x^B.\, x$, on a :

$$(Y)\, t \longrightarrow (t)\,(Y)\, t \longrightarrow \lambda x^B.\, x$$

- ...
- $[\![(t^n)\, \Omega_A]\!]$, l'information obtenue en appliquant n fois t :

$$(Y)\, t \longrightarrow (t)\,(Y)\, t \longrightarrow^\star (t^n)\,(Y)\, t$$

Cela va former une suite croissante et on va finalement en prendre le sup :

$$[\![(Y)\, t]\!] = sup_n [\![(t^n)\, \Omega_A]\!].$$

2.2 CPO

Définition 2.1 (*Ordre partiel*)

Un **ordre partiel** *est la donnée de* $(X, \leq)$ *où* X *est un ensemble muni d'une relation* $\leq$ *qui est :*
- *réflexive :* $x \leq x$
- *transitive :* $x \leq y, y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z$
- *antisymétrique :* $x \leq y, y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y$

Définition 2.2 (*Partie filtrante*)

Une partie D *d'un ordre partiel* $(X, \leq)$ *est* **filtrante** *si :*
- $D \neq \emptyset$ *;*
- $\forall x, y \in D, \exists z \in D$ *tel que* $x, y \leq y$*.*

Définition 2.3 (*Sup*)

Le **sup** *de deux éléments* $x, y \in X$*, s'il existe, est le plus petit des majorants de* x *et* y*. Plus généralement, si une partie de* $X' \subseteq X$ *admet un plus petit majorant, celui-ci est appelé sup de* X' *et noté* $\bigvee X'$*.*

Définition 2.4 (*CPO*)

Un ordre partiel $(X, \leq)$ *est* **complet** *lorsque :*
- *ses parties filtrantes* D *admettent un sup* $\bigvee D$ *dans* X *(DCPO) et*
- $(X, \leq)$ *possède un plus petit élément que l'on note* $\perp$*.*

Par exemple, si on prend l'ensemble des parties d'un ensemble non vide ordonné par l'inclusion, on a un CPO dont les sup sont donnés par l'union d'une famille d'ensembles et le plus petit élément est l'ensemble vide.

Définition 2.5 (*Fonctions continues*)

Si $(X, \leq_X)$ *et* $(Y, \leq_Y)$ *sont deux CPO et* $f : X \to Y$ *une fonction, on dit que :*
- f *est une fonction* **croissante** *lorsque :*

$$x_1 \leq_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_Y f(x_2)$$

- *une fonction croissante* f *est* **continue** *lorsque pour toute famille filtrante* D *de* X*,*

$$f(\bigvee D) = \bigvee f(D).$$

Remarque 2.6

Si f *est continue et* D *est filtrante, alors* $f(D)$ *est filtrante. En effet, si* $y_1, y_2 \in f(D)$*, ils sont images de* x_1, x_2 *et comme* D *est filtrant, il existe* $z \geq x_1, x_2$ *d'où, par croissance de* f*,* $f(x_1), f(x_2) \leq f(z) \in f(D)$*.*

Le résultat qui va nous permettre d'interpréter le λY-calcul dans les CPO est le point fixe de Kleene qui dit que dans un CPO, toute fonction continue à un (plus petit) point fixe :

Théorème 2.7 (*Théorème de point fixe de Kleene*)

Soient $(X, \leq)$ *un CPO (de plus petit élément* $\perp$*) et* $f : X \to X$ *une fonction continue, alors* $\{f^n(\perp), n \in \mathbb{N}\}$ *est dirigée et* $f(\bigvee f^n(\perp)) = \bigvee f^n(\perp)$*.*

Alors $\bigvee f^n(\bot)$ est le plus petit point fixe de f.

L'idée c'est que toute fonction continue d'un CPO vers lui-même admet un plus petit point fixe $\bigvee f^n(\bot)$.

Démonstration : On a $f^n(\bot) \leq f^{n+1}(\bot)$ (ce qui se démontre par récurrence : $\bot \leq f(\bot)$ et si $f^n(\bot) \leq f^{n+1}(\bot)$ alors comme f est continue (et donc croissante), alors $f^{n+1}(\bot) \leq f^{n+2}(\bot)$), donc $\{f^n(\bot), n \in \mathbb{N}\}$ est dirigée.

Comme $(X, \leq)$ est un CPO, $\bigvee\{f^n(\bot), n \in \mathbb{N}\}$ existe.

On montre que c'est un point fixe. On a $\bigvee f^n(\bot) = \bigvee f^{n+1}(\bot)$ et donc $f(\bigvee f^n(\bot)) = \bigvee f(f^n(\bot)) = \bigvee f^n(\bot)$: c'est un point fixe.

C'est bien le plus petit point fixe de f : Si ϕ est un autre point fixe, on a bien sûr $\bot \leq \phi$ et donc par croissance de f, $f^n(\bot) \leq f^n(\phi) = \phi$ pour tout entier n et donc $\bigvee f^n(\bot) \leq \phi$.

□

2.3 Modèle du λY-calcul

2.3.1 CCC enrichie en CPO

Définition 2.8 (*CCC enrichie en CPO*)

Une CCC C *est* **enrichie en CPO** *lorsqu'elle est telle que :*
- *$\forall A, B \in Ob(\mathsf{C})$, $\mathsf{C}(A, B)$ est un CPO, on note $\bot_{A,B}$ son plus petit élément ;*
- *C est une CCC compatible avec l'enrichissement en CPO :*
  - *la composition est continue ;*
  - *la paire et la curryfication sont croissantes ;*
  - *la composition et l'évaluation sont strictes à gauche.*

On explicite cette définition :

Définition 2.9 (*Continuité de la composition*)

Soit F une famille filtrante de morphismes, $F \subseteq \mathsf{C}(B, C)$, $g \in \mathsf{C}(C, D)$ et $h \in \mathsf{C}(A, B)$:

$$\begin{array}{ccc} h & \to & g \\ A \to B & \vdots & C \to D \\ & \to & \\ & F & \end{array}$$

$g \circ F = \{g \circ f \mid f \in F\}$ et $F \circ h = \{f \circ h \mid f \in F\}$
Si $f_1 \leq f_2$, alors $g \circ f_1 \leq g \circ f_2$ et $f_1 \circ h \leq f_2 \circ h$
Et on a $\bigvee(g \circ F) = g \circ \bigvee F$ et $\bigvee(F \circ h) = (\bigvee F) \circ h$.

Définition 2.10 (*paire croissante*)

Soient $f_1 \leq f_2 \in \mathsf{C}(A, B)$ et $g \in \mathsf{C}(A, C)$. On a alors $\langle f_1, g\rangle \leq \langle f_2, g\rangle$ et $\langle g, f_1\rangle \leq \langle g, f_2\rangle$.

Définition 2.11 (*curryfication croissante*)

Soient $f_1 \leq f_2 \in \mathsf{C}(Z \times A, B)$. On a alors $\Lambda(f_1) \leq \Lambda(f_2)$.

Définition 2.12 (*Composition stricte à gauche*)

Soit $f \in \mathsf{C}(A, B)$. On a $\bot_{B,C} \circ f = \bot_{A,C}$ (où $\bot_{A,B}$ est le plus petit élément de $\mathsf{C}(A, B)$).

Définition 2.13 (*Évaluation stricte à gauche*)

Soit $f \in \mathsf{C}(A, B)$, on a :

$$\mathsf{Ev}_{B,C} \circ \langle \perp_{A,(B \Rightarrow C)}, f \rangle = \perp_{A,C}$$

2.3.2 Interprétation

Définition 2.14 (*Modèle de* $\boldsymbol{\lambda Y}$)

Un **modèle de plus petit point fixe** *est la donnée d'une CCC enrichie en CPO telle que :*

- *à tout type A on associe $[\![A]\!] \in OB(\mathsf{C})$;*
- *l'interprétation des termes est définie par induction sur les règles de typage en étendant l'interprétation du λ-calcul simplement typé et satisfait :*
  - $[\![\Gamma \vdash \Omega_A : A]\!] = \perp \in \mathsf{C}([\![\Gamma]\!], [\![A]\!])$
  - $[\![\Gamma \vdash Y_A : (A \to A) \to A]\!] = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} [\![\lambda f^{A \to A}.\,(f^n)\,\Omega_A]\!]$

Proposition 2.15

$([\![\lambda f^{A \to A}.\,(f^n)\,\Omega_A]\!])_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite croissante.*

Remarque 2.16

Utilise croissance de paire et Λ.

Démonstration : On remarque déjà qu'on a le bon type.

$$\begin{aligned}
&[\![\lambda f^{A \to A}.\,(f^n)\,\Omega_A]\!]^\Gamma \in \mathsf{C}([\![\Gamma]\!], ([\![A]\!] \Rightarrow [\![A]\!]) \Rightarrow [\![A]\!]) \\
&= \Lambda([\![f : A \to A \vdash (f^{n+1})\,\Omega_A : A]\!]) \\
&= \Lambda(\mathsf{Ev} \circ \langle [\![f]\!], [\![(f^{n+1})\,\Omega_A]\!] \rangle)
\end{aligned}$$

Montrons que $[\![(f^{n+1})\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A}$ est croissante.

- $n = 0$, $[\![(f)\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A} \geq [\![\Omega_A]\!]^{f : A \to A} = \perp$
- hérédité : on suppose que $[\![(f^{n+1})\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A} \geq [\![(f^n)\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A}$ et on a

$$\begin{aligned}
[\![(f^{n+2})\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A} &= \mathsf{Ev} \circ \langle [\![f]\!]^{f : A \to A}, [\![(f^{n+1})\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A} \rangle \\
&\geq \mathsf{Ev} \circ \langle [\![f]\!]^{f : A \to A}, [\![(f^n)\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A} \rangle \qquad \text{(par croissance de la paire et de } \mathsf{Ev}\text{).} \\
&\geq [\![(f^{n+1})\,\Omega_A]\!]^{f : A \to A}
\end{aligned}$$

On conclut par croissance de Λ.

□

Lemme 2.17

La paire et la curryfication sont continues.

Démonstration : En exercice.

□

Proposition 2.18

Un modèle de plus petit point fixe satisfait :

$$[\![(Y)\,t]\!] = [\![(t)\,(Y)\,t]\!].$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
[\![(Y)\,t]\!] &= \mathsf{Ev} \circ \langle \bigvee [\![\lambda f.\,(f^n)\,\Omega]\!], [\![t]\!]\rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle \bigvee (\Lambda([\![(f^n)\,\Omega]\!]^{f:A\to A})), [\![t]\!]\rangle \\
&= \mathsf{Ev} \circ \bigvee \langle \Lambda([\![(f^n)\,\Omega]\!]^{f:A\to A}), [\![t]\!]\rangle \qquad \text{par continuité de la paire} \\
&= \bigvee (\mathsf{Ev} \circ \langle \Lambda([\![(f^n)\,\Omega]\!]^{f:A\to A}), [\![t]\!]\rangle) \qquad \text{par continuité de la composition} \\
&= \bigvee [\![(\lambda f.\,(f^n)\,\Omega t)\,]\!] \\
&= \bigvee [\![(t^n)\,\Omega]\!] \qquad \text{car modèle du } \lambda\text{-calcul simplement typé.}
\end{aligned}$$

et on fait un calcul similaire pour

$$\begin{aligned}
[\![(t)\,(Y)\,t]\!] &= \mathsf{Ev} \circ \langle [\![t]\!], [\![(Y)\,t]\!]\rangle \qquad \text{par le point ci-dessus} \\
&= \mathsf{Ev} \circ \langle [\![t]\!], \bigvee [\![(t^n)\,\Omega]\!]\rangle \qquad \text{par le point ci-dessus} \\
&= \bigvee_n \mathsf{Ev} \circ \langle [\![t]\!], [\![(t^n)\,\Omega]\!]\rangle \qquad \text{par continuité de pair, } \circ, \mathsf{Ev}. \\
&= \bigvee_n [\![(t^{n+1})\,\Omega]\!] \qquad \text{par l'interprétation de l'application.}
\end{aligned}$$

$\square$

Exemples :
- $\mathrm{REL}_!$ est un modèle de plus petit point fixe ;
- Cont : domaines de Scott et fonctions continues.