Université de Paris

Sémantique
Feuille n° 1 : Ordres bien fondés et induction

Définition :[Relation bien fondée] Une relation d'ordre $> \subseteq E \times E$ est *bien fondée* si il n'existe pas de suite infinie d'éléments de E décroissante par rapport à $>$.

Exercice 1 :
(Constructions) Étant donnés deux ordres bien fondés $(A, >_A)$ et $(B, >_B)$, indiquer lesquels parmi les suivants sont aussi des ordres bien fondés :

1. $(A \times B, >_1)$ avec $(a,b) >_1 (a',b')$ ssi $a >_A a'$ et $b >_B b'$.
2. $(A \times B, >_2)$ avec $(a,b) >_2 (a',b')$ ssi $a >_A a'$ et $b = b'$ ou $a = a'$ et $b >_B b'$.

Theorem :[Principe d'induction bien fondée] Soient donnés un ensemble E quelconque, un ordre strict $<$ sur E (dont $\mathscr{M}$ est son ensemble d'éléments minimaux), et une propriété P sur E.

Si

1. pour tout élément **minimal** $m \in \mathscr{M}$ on a **P(m)**
2. le fait que **P(k)** soit vérifiée pour **tout** élément $k < x$ implique **P(x)**

alors
pour tout $x \in E$ on a $P(x)$

Exercice 2 :
(Soustraction entière) Considérons l'opération suivante sur les couples d'entiers

$$\begin{array}{lcl} sub(n,0) & = & n \\ sub(0,m) & = & 0 \\ sub(n,m) & = & sub(n-1,m-1) \end{array}$$

Montrez par induction bien fondée que

– elle est bien définie pour tout couple d'entiers
– $\forall m,n \in \mathbb{N}\ sub(n,m) \leqslant n$

Définition : Soit $(E,<)$ un ordre bien fondé.
L'ordre **lexicographique** $<_{\text{lex}}$ sur $E \times E$ est défini par :

$$(x,y) <_{\text{lex}} (x',y') \iff \left\{ \begin{array}{l} x < x' \\ \text{ou } x = x' \text{ et } y < y' \end{array} \right\}$$

L'ordre **multiensemble** $<_{\text{mult}}$ sur les multi-ensembles finis $\mathrm{M}_f(E)$ est défini par :

$$m <_{\text{mult}} m' \iff \exists x \in \mathrm{M}_f(E),\ \exists y \in \mathrm{M}_f(E),\ m = (m' \backslash p) \uplus q \land \forall x \in q,\ \exists x' \in p,\ x < x'$$

Exercice 3 :
Considérez les multi-ensembles finis d'entiers naturels avec l'ordre induit par l'ordre des entiers.
Si ρ et ρ' sont des multiensembles sur les entiers, alors $\rho < \rho'$ lorsque ρ peut être obtenu en remplaçant tout élément x de ρ' par un nombre quelconque d'éléments $y < x$ (y compris 0 éléments).

1. Les suites suivantes sont-elles croissantes ? décroissantes ?
   (a) $\{42\};\{21,21,24,30\};\{12,12,12,12,21\};\{2\}$
   (b) $\{\};\{5\};\{4,3,2,1,0\}$
2. Donner une suite décroissante de longueur 321 partant de $\{2\}$.
3. Donner une suite décroissante de longueur 1234567890 partant de $\{2\}$.
4. Existe-t-il un maximum et un minimum des multi-ensembles finis d'entiers naturels ?

Exercice 4 : Terminaison de la visite en largeur d'un arbre

Considérons la fonction `bfvisit` :

```
type 'a tree = Leaf of 'a | Node of 'a * ('a tree list) ;;

let rec bfv =
   function
      ([],acc) = acc
   |  ((Leaf v)::r,acc)  = bfv(r,v::acc)
   |  ((Node (v,vl))::r,acc) = bfv(r@vl,v::acc)
 ;;

let bfvisit t = bfv([t],[]);;
```

En utilisant un ordre multiset, montrez que

1. `bfvisit` termine toujours quand ell'est appelee sur la racine d'un arbre fini ;
2. `bfvisit` termine toujours quand ell'est appelee sur la racine d'un DAG fini.

Définition :[Relation bien fondée] Une relation $R \subseteq E \times E$ est *bien fondée* sso pour toute partie X t.q. $\emptyset \neq X \subseteq E$, il existe un élément $x \in X$ minimal dans X ($\forall z \in X : z \geqslant x$ ou z incomparable avec x).

Exercice 5 :

Prouver que le principe d'induction bien fondée est valable aussi pour toutes les relations $R \subseteq E \times E$ bien fondées (même si elles ne sont pas des ordres).

Exercice 6 : Mots bien parenthésés

Dans cet exercice, on travaille avec un alphabet Σ dans lequel on distingue deux lettres particulières $\texttt{[} \in \Sigma$ ("crochet ouvrant") et $\texttt{]} \in \Sigma$ ("crochet fermant"), les autres éléments de Σ étant arbitraires. On note Σ^* l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet Σ et E l'ensemble des mots *bien parenthésés*, qui est défini inductivement à partir des règles suivantes (ε désigne le mot vide) :

$$\frac{}{\varepsilon \in E} \qquad \frac{x \in \Sigma \quad x \neq \texttt{[} \quad x \neq \texttt{]}}{x \in E} \qquad \frac{u \in E}{\texttt{[}u\texttt{]} \in E} \qquad \frac{u \in E \quad v \in E}{uv \in E}$$

À toute lettre $x \in \Sigma$, on associe un *poids* $p(x) \in \mathbb{N}$ défini par :

$$p(\texttt{[}) = 1, \qquad p(\texttt{]}) = -1, \qquad p(x) = 0 \quad \text{si } (x \neq \texttt{[} \text{ et } x \neq \texttt{]})$$

On étend cette fonction de poids à tous les mots sur l'alphabet Σ en posant

$$p(x_1 x_2 \cdots x_n) \;=\; p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

pour tout mot $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^*$. En particulier, pour $n = 0$, on a $p(\varepsilon) = 0$.

1. Montrer que tout mot bien parenthésé $u \in E$ satisfait les deux propriétés suivantes :
   (P-a) $p(u) = 0$.
   (P-b) Si v est un préfixe de u, alors $p(v) \geqslant 0$.
2. Montrer réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait les propriétés (P-a) et (P-b), alors u est bien parenthésé.
3. En déduire un algorithme qui permet de tester si un mot est bien parenthésé.