Université de Paris

Sémantique
Feuille n° 3 : λ-calcul (II)

Exercice 1 : Combinateurs de point fixe

Un combinateur de point fixe est un terme (clos) C tel que, pour tout terme M, $CM \leftrightarrow^*_\beta M(CM)$. Soient

- $Y = \lambda x.\ VV$, où $V = \lambda y.\ x(yy)$.
- $\Theta = ZZ$, où $Z = \lambda zx.\ x(zzx)$.
- $\Gamma = \underbrace{\$\$\ldots\$}_{26}$, où $\$ = \lambda abc...opqst...xyzr.\ r(thisisafixedpointcombinator)$.

1. Prouver que Y, Θ et Γ sont des combinateurs de point fixe.
2. Parmi ces trois, lesquels vérifient "pour tout M, $CM \to^*_\beta M(CM)$" ?
3. Définir une variante "francophone" de Γ.

Exercice 2 : λ-définissabilité des fonctions récursives

L'ensemble $\mathcal{R}$ des *fonctions récursives partielles*, sous-ensemble de l'ensembles de fonctions partielles, est défini inductivement comme suit.

Fonctions de base de $\mathcal{R}$:

- $0 : N \in \mathcal{R}$ (la constante 0)
- $S : N \to N \in \mathcal{R}$ (la fonction successeur $S(n) = n + 1$)
- $\pi^n_k : N^n \to N \in \mathcal{R}$ (la k-ième projection, définie par $\pi^n_k(x_1, \ldots, x_n) := x_k$, pour $n \geqslant 1, k$)

Cas inductifs de $\mathcal{R}$:

- composition :
  si $h : N^k \to N \in \mathcal{R}$, $g_1, ..., g_k : N^n \to N \in \mathcal{R}$ $(k \geqslant 0)$, alors $comp_{h,g_1...g_k} : N^n \to N \in \mathcal{R}$, où $comp_{h,g_1...g_k}$ est définie par $comp_{h,g_1...g_k}(x_1, ..., x_n) := h(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))$.
- récursion primitive :
  si $g : N^{n-1} \to N \in \mathcal{R}$ et $h : N^{n+1} \to N \in \mathcal{R}$, alors $f : N^n \to N \in \mathcal{R}$, où f est définie par
  $f(0, x_1, ..., x_{n-1}) := g(x_1, ..., x_{n-1})$
  $f(S(x), x_1, ..., x_{n-1}) := h(f(x, x_1, ..., x_{n-1}), x, x_1, ..., x_{n-1})$.
- minimisation :
  si $g : N^{n+1} \to N \in \mathcal{R}$, alors $min_g : N^n \to N \in \mathcal{R}$, où min_g est définie par
  $$min_g(x_1, ..., x_n) := \begin{cases} min\ A & si\ A = \{k \in N \mid g(k, x_1, ..., x_n) = 0\ et \\ & \forall h < k\ g(h, x_1, ..., x_n) \text{ est défini}\} \neq \emptyset \\ indéfini & sinon \end{cases}$$

1. Soit $fact(n) = n!$. Montrer que $fact : N \to N \in \mathcal{R}$.
2. Prouver que toutes les fonctions récursives partielles sont λ-définissables, c.à.d. que pour tout $f : N^k \to N \in \mathcal{R}$ il existe un λ-terme M_f tel que, pour tout $n_1, ..., n_k \in N$, $M_f\overline{n_1}...\overline{n_k}$ a comme forme normale $\overline{f(n_1, ..., n_k)}$ si $f(n_1, ..., n_k)$ est défini, et $M_f\overline{n_1}.\overline{n_k}$ n'a pas de forme normale si $f(n_1, ..., n_k)$ est indéfini.