Université de Paris

Sémantique
Feuille n° 4 : Unification et Lambda-calcul simplement typé

I) Unification

Les règles de transformation pour l'unification

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \text{ (effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \text{ (orienter)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \text{ (décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \text{ (remplacer)}$$

Exercice 1 :

Dans cet exercice les lettres p, q, a, b, f, g, h, k sont des symboles de fonction, les autres sont des variables. Appliquer l'algorithme d'unification aux problèmes suivants :

1. $p(a, x, f(g(y))) \doteq p(z, f(z), f(u))$
2. $q(f(a), g(x)) \doteq q(y, y)$
3. $p(x, f(y, z)) \doteq p(x, g(h(k(x))))$
4. $p(x, f(u, x)) \doteq p(f(y, a), f(z, f(b, z)))$
5. $p(x, f(x), g(f(x), x)) \doteq p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
6. $p(f(g(x, y)), g(v, w), y) \doteq p(f(z), x, f(x))$
7. $p(x, f(x), f(f(x))) \doteq p(f(f(y)), y, f(y))$
8. $p(f(y), f(z), f(t), f(x)) \doteq p(g(z), g(x), g(y), g(z))$

Exercice 2 :

Montrer que l'algorithme d'unification termine et qu'il est correct, c'est-à-dire que s'il termine sur une forme résolue, c'est-à-dire dont toutes les variables sont résolues (une variable x est résolue dans un problème si elle apparaît dans une équation x = t de ce problème, sans apparaître ni dans t ni dans aucune autre équation du problème) alors on en déduit un unificateur principal.

II) Typage

Exercice 3 :

Donner des dérivations de types, si possible, pour les termes suivants :

1. $\lambda f \lambda x.f\ x\ x$
2. $(\lambda f \lambda x.f\ (f\ z))\ (\lambda x.x)$
3. $(\lambda f \lambda g \lambda x.f\ (g\ x))\ (\lambda x.x)\ (\lambda y.y\ (y\ z))\ z'$
4. $\lambda x.(\lambda y.\lambda z.yz)((\lambda w.w)x)x$

Exercice 4 :
Montrer que $\Gamma \vdash t : A$ implique $\Gamma, y : C \vdash t : A$, où $y \notin \mathtt{fv}(t)$ et C est un type quelconque.

Exercice 5 :
Montrer que $\Gamma \vdash t : A$ implique $\mathtt{fv}(t) \subseteq \mathtt{dom}(\Gamma)$.

Exercice 6 :
Montrer que si $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : B$ est dérivable, alors $(A_1 \to \cdots (A_n \to B) \cdots)$ est une tautologie de la logique propositionnelle où $\to$ est l'implication et les types atomiques les variables propositionnelles. Conclure qu'il existe des types A qui ne sont pas *habités*, *i.e.*, il n'existe pas de λ-terme clos M tel que $\emptyset \vdash M : A$.

Exercice 7 :
Montrer qu'il n'existe pas de λ-terme M tel que : $\emptyset \vdash M : (b \to b) \to b$. On introduit la notation $\neg A = A \to b$. Montrer qu'il existe des λ-termes N_1 et N_2 tels que :

$$\emptyset \vdash N_1 : A \to (\neg\neg A) \ , \quad \emptyset \vdash N_2 : (\neg\neg\neg A) \to (\neg A) \ .$$