Université de Paris

Sémantique
Feuille n° 6 : Types polymorphes - Système F
(Correction)

Exercice 1 :

- Evaluer $(\Lambda\alpha.(x[\alpha \to \alpha])\ (\lambda y : \alpha.y))[int \times bool]$
  ▷
  $$(x[int \times bool \to int \times bool])\ (\lambda y : int \times bool.y)$$
- Evaluer $(\Lambda\beta.\lambda x : \beta \to \alpha.x\ y)[int \to int]\ (\lambda z : int \to int.h)$
  ▷
  $$h$$
- Soient U et V sont deux termes quelconques de type A. Soient T, F et $IfThenElse[A]\ M\ U\ V$ les termes suivants

  $$\begin{array}{lcl} T & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.x \\ F & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.y \\ IfThenElse[A]\ M\ U\ V & \equiv & M[A]\ U\ V \end{array}$$

  Evaluer $IfThenElse[A]\ T\ U\ V$ et $IfThenElse[A]\ F\ U\ V$. Quels sont les types de T, F et $IfThenElse$?
  ▷
  $$\begin{array}{ll} IfThenElse[A]\ T\ U\ V & \equiv \\ T\ A\ U\ V & \equiv \\ (\Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.x)AUV & \to \\ (\lambda x : A.\lambda y : A.x)UV & \to \\ (\lambda y : A.U)V & \to \\ U & \end{array}$$

  $$\begin{array}{ll} IfThenElse[A]\ F\ U\ V & \equiv \\ F\ A\ U\ V & \equiv \\ (\Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.y)AUV & \to \\ (\lambda x : A.\lambda y : A.y)V & \to \\ (\lambda y : A.y)V & \to \\ V & \end{array}$$

  ▷
  $Bool \equiv \forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha$
  $T, F : \forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha$
  $IfThenElse : \forall\beta.(\forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \beta \to \beta \to \beta$
  $IfThenElse[A] : (\forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha) \to A \to A \to A$
  $IfThenElse[A]\ M : A \to A \to A$
  $IfThenElse[A]\ M\ U\ V : A$
  $M : \forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha$
  $M[A] : A \to A \to A$
  $M[A]\ U\ V : A$
- Soit M un terme de type A et N un terme de type B. Soient $P_1[A][B](L)$, $P_2[A][B](L)$ et $Pair[A][B]\ M\ N$ les termes suivants :

  $$\begin{array}{lcl} P_1[A][B](L) & \equiv & L[A](\lambda x : A.\lambda y : B.x) \\ P_2[A][B](L) & \equiv & L[B](\lambda x : A.\lambda y : B.y) \\ Pair[A][B]\ M\ N & \equiv & \Lambda\alpha.(\lambda x : A \to B \to \alpha.xMN) \end{array}$$

Evaluer $P_1[A][B](Pair[A][B]\ M\ N)$ et $P_2[A][B](Pair[A][B]\ M\ N)$. Quels sont les types de P_1, P_2 et $Pair$?

▷

$$\begin{array}{ll}
P_1[A][B](Pair[A][B]\ M\ N) & \equiv \\
(\Lambda\alpha.(\lambda x : A \to B \to \alpha.xMN))A(\lambda x : A.\lambda y : B.x) & \to \\
(\lambda x : A \to B \to A.xMN)(\lambda x : A.\lambda y : B.x) & \to \\
(\lambda x : A.\lambda y : B.x)MN & \to \\
(\lambda y : B.M)N & \to \\
M &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
P_2[A][B](Pair[A][B]\ M\ N) & \equiv \\
(\Lambda\alpha.(\lambda x : A \to B \to \alpha.xMN))B(\lambda x : A.\lambda y : B.y) & \to \\
(\lambda x : A \to B \to B.xMN)(\lambda x : A.\lambda y : B.y) & \to \\
(\lambda x : A.\lambda y : B.y)MN & \to \\
(\lambda y : B.y)N & \to \\
N &
\end{array}$$

▷ $A \times B \equiv \forall\alpha.(A \to B \to \alpha \to \alpha)$
$Pair : \forall\alpha_1.\forall\alpha_2.\alpha_1 \to \alpha_2 \to (\forall\alpha.(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha \to \alpha))$
$Pair[A][B] : A \to B \to (\forall\alpha.(A \to B \to \alpha \to \alpha))$
$Pair[A][B]\ M\ N : \forall\alpha.(A \to B \to \alpha \to \alpha)$
$P_1 : \forall\alpha_1.\forall\alpha_2.(\forall\alpha.(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha \to \alpha)) \to \alpha_1$
$P_1[A][B] : (\forall\alpha.(A \to B \to \alpha \to \alpha)) \to A$
$L : \forall\alpha.(A \to B \to \alpha \to \alpha)$
$P_1[A][B]\ L : A$
$L[A] : A \to B \to A \to A$
$L[A](\lambda x : A.\lambda y : B.x) : A$

– Soient M et N deux termes quelconques de type C. B. Soient $Case[A][B][C]\ L\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N))$, $I_1[A][B]\ L_1$ et $I_2[A][B]\ L_2$ les termes suivants :

$$\begin{array}{lll}
I_1[A][B](L_1) & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : A \to \alpha.\lambda y : B \to \alpha.xL_1 \\
I_2[A][B](L_2) & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : A \to \alpha.\lambda y : B \to \alpha.yL_2 \\
Case[A][B][C]\ L\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N) & \equiv & L[C](\lambda x : A.M)(\lambda y : B.N)
\end{array}$$

Evaluer $Case[A][B][C]\ I_1[A][B](L_1)\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N)$ et $Case[A][B][C]\ I_2[A][B](L_2)\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N)$. Quels sont les types de I_1, I_2 et $Case$?

▷

$$\begin{array}{ll}
Case[A][B][C](I_1[A][B](L_1), \lambda x : A.M, \lambda y : B.N) & \equiv \\
(\Lambda\alpha.\lambda x : A \to \alpha.\lambda y : B \to \alpha.xL_1)C(\lambda x : A.M)(\lambda y : B.N) & \to \\
(\lambda x : A \to C.\lambda y : B \to C.xL_1)(\lambda x : A.M)(\lambda y : B.N) & \to \\
(\lambda y : B \to C.(\lambda x : A.M)L_1)(\lambda y : B.N) & \to \\
(\lambda x : A.M)L_1 & \to \\
M\{x/L_1\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
Case[A][B][C](I_2[A][B](L_2), \lambda x : A.M, \lambda y : B.N) & \to^* \\
N\{y/L_2\} &
\end{array}$$

▷ $A + B \equiv \forall\alpha.(A \to \alpha) \to (B \to \alpha) \to \alpha$
$I_1 : \forall\alpha_1.\forall\alpha_2.\alpha_1 \to \alpha_1 + \alpha_2.$
$I_1[A][B] : A \to A + B.$
$L_1 : A$
$I_1[A][B]\ L_1 : A + B.$
$L : A + B$
$L[C] : (A \to C) \to (B \to C) \to C$
$L[C]\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N) : C$
$case : \forall\alpha_1.\forall\alpha_2.\forall\alpha_3.\alpha_1 + \alpha_2 \to (\alpha_1 \to \alpha_3) \to (\alpha_2 \to \alpha_3) \to \alpha_3$
$case[A][B][C] : A + B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$
$case[A][B][C]\ L : (A \to C) \to (B \to C) \to C$
$case[A][B][C]\ L\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N) : C$

Exercice 2 :

Dans cet exercice, nous allons encoder les types simples et les termes usuels qui les habitent.

1. Les entiers sont représentés par le type `int` $= \forall\alpha.\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$. Donner un encodage du 0, du successeur et de l'itérateur.
2. On veut former le type **liste**(α) et de constantes **nil**, **tl**(), **hd**() et :: avec les règles de typage suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{nil} : & \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha) \\ \mathbf{cons} : & \forall\alpha.\alpha \times \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha) \\ \mathbf{hd} : & \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha) \to \alpha \\ \mathbf{tl} : & \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha) \end{array}$$

   On choisit le type $\mathbf{liste}(\alpha) = \forall\beta.\beta \to (\alpha \to \beta \to \beta) \to \beta$. Donner l'encodage des constructeurs de ce type.
3. Définir un type arbre et donner les encodages des constructeurs.

Exercice 3 :

1. Donner une extension de l'algorithme de typage à la ML aux cas des listes.

   ▷

$$A ::= ... \mid \mathbf{liste}(A)$$

$$\begin{array}{lll} M ::= & ... & \\ & \mathbf{nil} & \mid \\ & \mathbf{hd}(M) & \mid \\ & \mathbf{tl}(M) & \mid \\ & M :: M & \end{array}$$

$$\frac{A \leqslant \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha)}{\Gamma \vdash \mathbf{nil} : A} \qquad \frac{A \leqslant \forall\alpha.(\alpha \times \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha))}{\Gamma \vdash \mathbf{cons} : A}$$

$$\frac{A \leqslant \forall\alpha.(\mathbf{liste}(\alpha) \to \alpha)}{\Gamma \vdash \mathbf{hd} : A} \qquad \frac{A \leqslant \forall\alpha.(\mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha))}{\Gamma \vdash \mathbf{tl} : A}$$

$$\frac{A \leqslant \forall\alpha\beta.(\mathbf{liste}(\alpha) \times \beta \times \beta \to \beta)}{\Gamma \vdash \mathbf{if}\ \_\ \mathbf{then}\ \_\ \mathbf{else}\ \_\ : A}$$

2. Donner une dérivation de types pour le terme $\lambda f.\lambda l.f(\mathbf{hd}(l)) :: map(f, \mathbf{tl}(l))$

   ▷

   Soit $\Gamma = f : \alpha \to \beta, l : \mathbf{liste}(\alpha)$. *On suppose* $map : \forall\alpha\beta.(\alpha \to \beta \times \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\beta))$.

$$\dfrac{\Gamma \vdash f : \alpha \to \beta \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{hd} : \mathbf{liste}(\alpha) \to \alpha \qquad \Gamma \vdash l : \mathbf{liste}(\alpha)}{\Gamma \vdash \mathbf{hd}(l) : \alpha}}{\Gamma \vdash f\ \mathbf{hd}(l) : \beta}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash map : \alpha \to \beta \times \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\beta) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \alpha \to \beta \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{tl} : \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha) \qquad \Gamma \vdash l : \mathbf{liste}(\alpha)}{\Gamma \vdash \mathbf{tl}(l) : \mathbf{liste}(\alpha)}}{\Gamma \vdash \langle f, \mathbf{tl}(l)\rangle : \alpha \to \beta \times \mathbf{liste}(\alpha)}}{\Gamma \vdash map(f, \mathbf{tl}(l)) : \mathbf{liste}(\beta)}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{cons} : \beta \times \mathbf{liste}(\beta) \to \mathbf{liste}(\beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma \vdash f\ \mathbf{hd}(l) : \beta} \qquad \dfrac{\dots}{\Gamma \vdash map(f, \mathbf{tl}(l)) : \mathbf{liste}(\beta)}}{\Gamma \vdash \langle f\ \mathbf{hd}(l), map(f, \mathbf{tl}(l))\rangle : \beta \times \mathbf{liste}(\beta)}}{\Gamma \vdash f(\mathbf{hd}(l)) :: map(f, \mathbf{tl}(l)) : \mathbf{liste}(\beta)}}{f : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \vdash \lambda l.f(\mathbf{hd}(l)) :: map(f, \mathbf{tl}(l)) : \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\beta)}}{\vdash \lambda f.\lambda l.f(\mathbf{hd}(l)) :: map(f, \mathbf{tl}(l)) : (\alpha \to \beta) \to \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\beta)}
$$