Université de Paris

Sémantique
Feuille n° 8 : Σ-Algèbre
(Correction)

Exercice 1 :

Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $p \in Pos(s)$ et $q \in Pos(t)$, alors $(s[t]_p)|_{p.q} = t|_q$ et $(s[t]_p)[r]_{p.q} = s[t[r]_q]_p$.
2. Si $p.q \in Pos(s)$, alors $(s[t]_{p.q})|_p = (s|_p)[t]_q$ et $(s[t]_{p.q})[r]_p = s[r]_p$.
3. Si $p, q \in Pos(s)$ et $p \bowtie q$, alors $(s[t]_p)|_q = s|_q$ et $(s[t]_p)[r]_q = (s[r]_q)[t]_p$.

▷ *En el tercer bullet se puede hacer por induccion tambien usando el hecho de que si* $p = \Lambda$ *entonces la propriedad tiene antecedente falso, sino* $p = ip'$ *y se debe mostrar que* $q = jq'$ *donde* $i \neq j$ *o* $i = j$ *y* p' *y* q' *son paralelos.*

Exercice 2 :

Montrer que la relation $\sim = \{(x, y) \mid 4 \text{ est un diviseur de } x-y\}$ est une congruence sur l'algèbre $< I\!N, \{+/2, \cdot/2\} >$ ($\sim$ est une relation d'équivalence et la somme et multiplication sont monotones par rapport à $\sim$).

▷ *En général,* 5 *est diviseur de* $a - b$ *ssi* $a - b$ *s'écrit comme* $5 \times k$*, où* k *est une entier quelconque. Le même raisonnement marche pour la fonction succ et pred.*

- $\mathcal{S}$ *est réflexive : il faut montrer* $a\mathcal{S}a$*, c'est à dire* $a - a = 0 = 5 \times k$*, ce qui est évident pour* $k = 0$.
- $\mathcal{S}$ *est symétrique : Supposons* $a\mathcal{S}b$*, il faut montrer* $b\mathcal{S}a$*. Par hypothèse* 5 *est diviseur de* $a - b$*, donc* $a - b = 5 \times k$ *et* $-(a - b) = -a + b = b - a = 5 \times -k$*, donc* $b\mathcal{S}a$.
- $\mathcal{S}$ *est transitive : Supposons* $a\mathcal{S}b$ *et* $b\mathcal{S}c$*, il faut montrer* $a\mathcal{S}c$*. Par hypothèse* 5 *est diviseur de* $a-b$ *et de* $b - c$*, donc* $a - b = 5 \times k$ *et* $b - c = 5 \times k'$*, et en conséquence* $(a - b) + (b - c) = a - c = 5 \times k + 5 \times k' = 5 \times (k + k')$*. On en conclut* $a\mathcal{S}c$.
- $\mathcal{S}$ *est une congruence par rapport à* $i(a) = n \times a$ *: Supposons* $a\mathcal{S}b$*, il faut montrer* $i(a)\mathcal{S}i(b)$*. Par hypothèse* 5 *est diviseur de* $a-b$*, donc* $a-b = 5\times k$*. On a* $i(a)-i(b) = n\times a-n\times b = n\times(a-b) = n \times (5 \times k) = 5 \times (n \times k)$ *et on conclut donc* $i(a)\mathcal{S}i(b)$.
- $\mathcal{S}$ *est une congruence par rapport à* $p(a, b) = n \times a + m \times b$ *: Supposons* $a\mathcal{S}b$ *et* $a'\mathcal{S}b'$*, il faut montrer* $p(a, a')\mathcal{S}p(b, b')$*. Par hypothèse* 5 *est diviseur de* $a - b$ *et de* $a' - b'$*, donc* $a - b = 5 \times k$ *et* $a' - b' = 5\times k'$*. On a* $p(a, a')-p(b, b') = n\times a+m\times a'-n\times b-m\times b' = n\times(a-b)+m\times(a'-b') = n \times 5 \times k + m \times 5 \times k' = 5 \times (n \times k + m \times k')$*. On conclut donc* $p(a, a')\mathcal{S}p(b, b')$.

Rappel : système équationnel syntaxique

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \textit{axiome} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \textit{reflexivite}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \textit{symetrie} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \textit{transitivite}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \textit{substitution} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \textit{contexte}$$

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{\theta(s) \leftrightarrow_{\mathcal{E}} \theta(t)} \qquad \frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{\theta(t) \leftrightarrow_{\mathcal{E}} \theta(s)} \qquad \frac{s \leftrightarrow_{\mathcal{E}} t}{u[s]_p \leftrightarrow_{\mathcal{E}} u[t]_p}$$

Exercice 3 :

Soient $p_1, \ldots, p_n \in Pos(u)$ t.q. $p_i \bowtie p_j$ pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

- Généraliser la propriété de l'exercice 1, point 3 au cas n.
  $\triangleright$ $s[s_1]_{p_1} \ldots [s_n]_{p_n} = s[s_{i_1}]_{p_{i_1}} \ldots [s_{i_n}]_{p_{i_n}}$ *où* $p_{i_1} \ldots p_{i_n}$ *est une permutation de* $p_1 \ldots p_n$.
- Définir par induction $u[s_1, \ldots, s_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ comme le terme u où l'on a remplacé simultanément les sous-termes $u|_{p_1}, \ldots, u|_{p_n}$ par $s_1, \ldots, s_n$.
- Montrer que si $s_i \doteq t_i$ est dérivable à partir de $\mathcal{E}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, alors $u[s_1, \ldots, s_n]_{p_1,\ldots,p_n} \doteq u[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ est aussi dérivable à partir de $\mathcal{E}$. Dit autrement, si $\mathcal{E} \vdash s_i \doteq t_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors $\mathcal{E} \vdash u[s_1, \ldots, s_n]_{p_1,\ldots,p_n} \doteq u[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$.
  $\triangleright$ *Par induction sur n. Le cas $n = 1$ est la regle contexte. Le cas inductif :* $u[s_1, \ldots, s_n]_{p_1,\ldots,p_n} = u[s_n]_{p_n}[s_1, \ldots, s_{n-1}]_{p_1,\ldots,p_{n-1}} =_{h.r.} u[s_n]_{p_n}[t_1, \ldots, t_{n-1}]_{p_1,\ldots,p_{n-1}} = u[t_1, \ldots, t_{n-1}]_{p_1,\ldots,p_{n-1}}[s_n]_{p_n} =_{ctx} u[t_1, \ldots, t_{n-1}]_{p_1,\ldots,p_{n-1}}[t_n]_{p_n} = u[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$.

Exercice 4 :

On considère les expressions sur l'alphabet $\Sigma = \{a/0, b/0, S/2, M/2\}$ et les propriétés spécifiées par l'ensemble d'équations suivant :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{lcllcl} S(a,a) & \doteq & a, & S(S(x_1,x_2),x_3) & \doteq & S(x_1,S(x_2,x_3)), \\ S(a,b) & \doteq & b, & M(M(x_1,x_2),x_3) & \doteq & M(x_1,M(x_2,x_3)), \\ S(b,a) & \doteq & b, & S(M(x_1,x_2),x_3) & \doteq & M(S(x_1,x_3),S(x_2,x_3)), \\ S(b,b) & \doteq & b, & M(S(x_1,x_2),x_3) & \doteq & S(M(x_1,x_3),M(x_2,x_3)), \\ M(a,a) & \doteq & a & & & \\ M(a,b) & \doteq & a & & & \\ M(b,a) & \doteq & a & & & \\ M(b,b) & \doteq & b & & & \end{array} \right\}$$

1. Démontrer que l'équation $S(M(a,b),a) \doteq M(a,a)$ est dérivable de manière syntaxique à partir de l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. Démontrer que les quatre équations suivantes

$$S(e,b) \doteq b, S(e,a) \doteq e, M(e,b) \doteq e, M(e,a) \doteq a$$

sont dérivables de manière syntaxique à partir de l'ensemble $\mathcal{E}$ pour tout terme clos e.

$\triangleright$ *On montre $S(e,b) \doteq b$ par induction sur e.*

- $e = b$

$$\frac{S(b,b) \doteq b \in \mathcal{E}}{S(b,b) \doteq b}$$

- $e = a$

$$\frac{S(a,b) \doteq b \in \mathcal{E}}{S(a,b) \doteq b}$$

- $e = S(e_1,e_2)$. *Par h.r. il existe une derivation Π_{e_1} de l'équation $S(e_1,b) \doteq b$ et une derivation Π_{e_2} de l'équation $S(e_2,b) \doteq b$. On construit une dérivation pour $S(e_1,e_2)$ comm suit :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(S(x_1,x_2),x_3) \doteq S(x_1,S(x_2,x_3)) \in \mathcal{E}}{S(S(x_1,x_2),x_3) \doteq S(x_1,S(x_2,x_3))}}{S(S(e_1,e_2),b) \doteq S(e_1,S(e_2,b))}\,subst \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_{e_2}}{S(e_2,b) \doteq b}\,h.r.}{S(e_1,S(e_2,b)) \doteq S(e_1,b)}\,ctxt \quad \dfrac{\Pi_{e_1}}{S(e_1,b) \doteq b}\,h.r.}{S(e_1,S(e_2,b)) \doteq b}\,trans}{S(S(e_1,e_2),b) \doteq b}\,trans$$

– $S(M(e_1, s_2), b) \doteq M(S(e_1, b), S(e_2, b)) \doteq_{h.r.} S(b, b) \doteq b$

Exercice 5 :

Soit $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ la cloture reflexive tranistive de $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}$.

1. Montrer que $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}$ est stable par subsitution et est une congruence sur l'algèbre des termes $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \Sigma)$.
2. Montrer que $\mathcal{E} \vdash s \doteq t$ ssi $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} t$

▷ $\Rightarrow$ *par induction sur la dérivation de* $\mathcal{E} \vdash s \doteq t$
$\Leftarrow$ *par induction sur la longuer de* $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$