Université de Paris

Sémantique

Feuille n° 9 : Paires critiques, Confluence et Terminaison

Exercice 1 : Paires Critiques

Rappel : Une paire critique entre deux règles disjointes $l \to r$ et $g \to d$ de $\mathbb{R}$ (pas forcément des règles distinctes) est une paire $\langle \sigma(r), \sigma(l)[\sigma(d)]_p \rangle$ telle que

- p est une position de l et $l|_p$ n'est pas une variable.
- σ est un unificateur principal de $l|_p$ et g.
- Si $l \to r$ et $g \to d$ sont les mêmes règles, alors $p \neq \Lambda$.

1. Définir un système de réécriture sans paires critiques, puis un deuxième avec au moins une paire critique.
2. Trouver toutes les paires critiques du systeme de réecriture suivant (où, comme d'habitude, les lettres de debut d'alphabet représentent des constantes, celles de fin d'alphabet des variables) :

$$\begin{array}{lcl} f(g(x,a),h(c)) & \to & i(x,a,c) \\ g(y,y) & \to & y \\ h(z) & \to & z \end{array}$$

3. On dit q'une paire critique $< t, s >$ d'un système de réecriture $\mathbb{R}$ est *joignable* s'il existe un terme r tel que $t \ \to^*_{\mathbb{R}} r$ et $s \to^*_{\mathbb{R}} r$.
   - Les paires critiques du système ci-dessus sont-elles joignables ?
   - Définir une extension du système dans laquelle les paires critiques soient joignables.
4. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ donner une signature Σ_i et un système de réécriture R_i sur la signature Σ_i tels que R_i contient exactement i paires critiques.

Exercice 2 : Théorème de confluence par commutation (voir cours)

Soient $(A, \to_1)$ et $(A, \to_2)$ deux systèmes de réécritures. On dit qu'ils *commutent* lorsque $a \xrightarrow{*}_1 b$ et $a \xrightarrow{*}_2 c$ impliquent que $\exists d,\ (b \xrightarrow{*}_2 d$ and $c \xrightarrow{*}_1 d)$.
Montrer que si $\to_1$ et $\to_2$ sont *confluents* et *commutent* alors $\to_1 \cup \to_2$ est aussi confluent.

Exercice 3 : Terminaison et interprétation polynomiale

1. Montrer que le système $\{g(x, g(y,z)) \to g(g(x,y),z); g(g(x,y),z) \to g(y,y)\}$ termine en utilisant une interprétation polynomiale.
2. Prouver la terminaison du système suivant construit sur la signature $\Sigma = \{g/2, f/1\}$ à l'aide d'un ordre polynômial.

$$\begin{array}{lll} g(g(x,y),z) & \to_{r1} & g(x,g(y,z)) \\ g(f(x),f(y)) & \to_{r2} & f(g(x,y)) \\ g(f(x),g(y,z)) & \to_{r3} & g(g(x,y),z) \end{array}$$

Exercice 4 : Terminaison et RPO

1. On considère la signature Σ qui contient les constantes $true$ et $false$, les symboles de fonction binaires *and* et *or* et le symbole de fonction unaire *not*.
   Soit S le système défini par [1]

$$\begin{array}{lcl} not(not(x)) & \rightarrow & x \\ not(or(x,y)) & \rightarrow & and(not(x), not(y)) \\ not(and(x,y)) & \rightarrow & or(not(x), not(y)) \\ and(x, or(y,z)) & \rightarrow & or(and(x,y), and(x,z)) \\ and(or(x,y), z) & \rightarrow & or(and(x,z), and(y,z)) \end{array}$$

   Montrer que le système termine avec la technique RPO.
2. Prouver la terminaison du système suivant construit sur la signature $\Sigma = \{f/2, i/1, e/0\}$ en appliquant la technique RPO.

$$\begin{array}{lll} f(x,e) & \rightarrow_{r1} & x \\ f(e,x) & \rightarrow_{r2} & x \\ i(f(x,y)) & \rightarrow_{r3} & f(i(x), i(y)) \\ f(f(x,y),z) & \rightarrow_{r4} & f(x, f(y,z)) \\ i(i(x)) & \rightarrow_{r5} & i(f(x,e)) \end{array}$$

3. Montrez que le système suivant termine avec la technique RPO.

$$S_1 = \{f(a,x) \rightarrow g(x); f(a,x) \rightarrow h(x,x)\}$$

   sur la signature $\{a/0, g/1, f/2, h/2\}$
4. Montrez que le système suivant de *Distributivité et Associativité* termine avec la technique RPO.

$$S_2 = \{(x+y)\cdot z \rightarrow (x\cdot z) + (y \cdot z); (x \cdot y)\cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)\}$$

   sur la signature $\Sigma = \{a/0, b/0, \cdot/2, +/2\}$

1. S calcule la *forme normale disjonctive* d'une formule du calcul propositionnel