Université Paris 7 – Denis-Diderot
MPRI 2006

Rapport de M2

Foncteurs analytiques et Logique linéaire

stage effectué par

Christine Tasson

sous la direction de Pierre-Louis Curien et Thomas Ehrhard

Je tiens à remercier outre mes directeurs de stage, Martin Hyland et Paul-André Melliès qui ont su prendre du temps pour répondre à mes questions.

Table des matières

Introduction **4**

1 Etude des foncteurs analytiques **11**
1.1 Définitions et premières propriétés 11
1.1.1 Définitions 12
1.1.2 Propriétés de préservation 12
1.2 Quelques outils 15
1.2.1 Catégorie des éléments 16
1.2.2 Hypothèse supplémentaire 17
1.2.3 Minimaux et supports 17
1.2.4 Weak Normal Form (WNF) et génériques 19

2 Propriétés des foncteurs analytiques **27**
2.1 Caractérisation des foncteurs analytiques 27
2.1.1 Le théorème 27
2.1.2 Son interprétation 29
2.2 Unicité du développement en série de Taylor 30
2.3 Opérations classiques sur les foncteurs analytiques 31
2.3.1 Somme 32
2.3.2 Produit fini 33
2.3.3 Quotient 35
2.3.4 Colimite filtrée 38
2.3.5 La composition 40
2.4 Opérations spécifiques à notre étude 41
2.4.1 Le second ordre 41
2.4.2 Le point fixe 47

3 Le modèle relationnel du second ordre. **51**
3.1 Foncteurs stables ou foncteur analytiques ? 51
3.1.1 Foncteurs stables 51
3.1.2 Deux notions différentes 53
3.2 Le modèle relationnel du second ordre 60
3.2.1 La logique linéaire du second ordre 60
3.2.2 Le modèle relationnel 61
3.2.3 Interprétation des formules 61
3.2.4 Construction d'opérations 62
3.2.5 Interprétation des preuves 64

4 Lien avec les faisceaux **66**
4.1 Cotopologie 66
4.2 Faisceaux ou foncteurs stables ? 67

Conclusion **73**

A Rappels catégoriques **74**
A.1 Catégories 74
A.2 Foncteurs 74
A.3 Colimites filtrées 75
A.4 Produits fibrés 76

B Autres définitions des foncteurs analytiques **78**
B.1 Définition via les extensions de Kan 78
B.2 Définition via les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ 80

Introduction

La sémantique dénotationnelle

« La sémantique dénotationnelle est l'étude mathématique des langages de programmation et de leur compilation »[1].
Formellement, on associe à un programme une fonction qui va de l'ensemble modélisant les arguments du programme vers l'ensemble modélisant ses résultats. Ici, on étudie les programmes et le *type* (entier, flottant, fonction...) des arguments et des résultats. Par exemple, on peut associer à un programme qui prend deux arguments de type entier et renvoie leur somme de type entier, la fonction $sum : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Si cette abstraction est un bon modèle, son étude mathématique pourra donner des informations sur les propriétés du programme et de sa compilation.
Le même objet est utilisé pour modéliser le programme ou son type. On parlera respectivement de *sémantique des termes* ou de *sémantique des types*.

Les modèles classiques

De nombreux travaux en semantique dénotationnelle ont été consacrés à la modélisation d'un langage de programmation simplifié appelé PCF (une extension du lambda-calcul simplement typé obtenue en ajoutant les points fixes). Dans ce langage, les programmes sont appelés des *termes*.
On peut citer comme exemples :

- Le modèle des domaines de Scott et des fonctions continues, dans lequel les types sont modélisés par des *cpo* (i.e. des ensembles dont les parties dirigées possèdent une borne supérieure[2]) et les termes sont interprétés par des fonctions *continues* (i.e. des fonctions monotones qui préservent les sups filtrants). La notion de continuité sert à traduire une propriété simple des programmes. Etant donné un argument, on dit qu'un programme termine s'il calcule le résultat en un temps fini. Dans ce cas, il n'a besoin que d'une quantité finie de l'information contenue dans l'argument. Ceci se traduit par :
  Soient x un argument, f un programme. Pour tout b fini tel que $f(x) \geq b$, il existe $x_0 \subseteq x$ fini tel que $f(x_0) \geq b$.
- Le modèle des domaines de Berry et des fonctions stables, dans lequel les types sont modélisés par des *dI-domaines* (i.e. un cas particulier de cpo) et

[1] Cours d'introduction aux Modèles des langages de programmation - MPRI 2005.
[2] On appelle *sup filtrant* une telle borne.

les termes sont interprétés par des fonctions *stables* (i.e. qui préservent les sups filtrants et les bornes inférieures des parties finies non vides).
Dans le modèle de Berry, on peut traduire une propriété un peu plus forte que la continuité de Scott. Si, étant donné un argument, un programme termine, alors il existe un ensemble minimal fini contenant toute l'information nécessaire au calcul du résultat. Ceci se traduit par :
Soient x un argument, f un programme. Pour tout b fini tel que $f(x) \geq b$, il existe $x_0 \subseteq x$ fini tel que $f(x_0) \geq b$ et si $y \subseteq x$ vérifie $f(y) \geq b$, alors $x_0 \subseteq y$.
- Le modèle de Girard des espaces cohérents et des fonctions stables, dans lequel les types sont modélisés par des *espaces cohérents* (i.e. ensembles munis d'une relation de cohérence) et les termes sont interprétés par des cliques (i.e. une partie de l'espace cohérent dont tous les éléments sont en relation deux à deux).
  Les espaces cohérents sont des cas particuliers de dI-domaines. Une clique est une formulation concrète des fonctions stables (en fait ces deux notions sont isomorphes).
- Le modèle relationnel des ensembles et relations, dans lequel les types sont modélisés par des ensembles et les termes par des relations.
  C'est le modèle le plus simple du λ-calcul simplement typé.

La théorie catégorique des modèles

La mise en évidence de points communs entre les différents modèles du lambda-calcul typé a permis de définir un cadre d'étude plus général : *la théorie catégorique des domaines*. Une catégorie est définie par des *objets* et des *morphismes* entre ces objets. Dans cette théorie, les types sont maintenant interprétés par les objets et les termes par les morphismes.
On constate que les modèles précédemment cités sont des cas particuliers de cette théorie :
- Dans le modèle de Scott, on utilise la catégorie dont les objets sont les domaines de Scott et les morphismes les fonctions continues.
- Dans le modèle de Berry, on utilise la catégorie dont les objets sont les domaines de Berry et les morphismes les fonctions stables.
- Dans le modèle de Girard, on utilise la catégorie **Coh** dont les objets sont les espaces cohérents et les morphismes les fonctions stables.
- Dans le modèle relationnel, on utilise la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes les relations.

Les foncteurs pour interpréter les termes

Dans la suite, nous évoquerons un cas particulier du modèle catégorique où on interprète les types par des catégories et les termes par des foncteurs entre ces catégories. Le modèle est alors la catégorie des catégories et des foncteurs. Plus précisément, il s'agit d'un modèle du lambda-calcul simplement typé proposé par J.-Y. Girard dans les années 80. Ce modèle transpose le modèle de Berry aux catégories. On suppose donc que les catégories (modélisant les types) préservent :
- les colimites filtrées qui correspondent aux sups filtrants
- les produits fibrés qui correspondent aux bornes inférieures

On suppose aussi que les foncteurs (modélisant les termes du calcul) préservent les colimites filtrées et les produits fibrés.
Lorsque les types sont modélisés par la seule catégorie **Set**[3], les foncteurs sont dits *normaux*. R. Hasegawa [1] a récemment généralisé ce modèle à PCF [1].

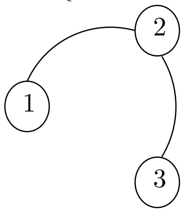
Les foncteurs pour interpréter les types

Nous allons maintenant nous intéresser aux programmes qui prennent des arguments de types différents. Par exemple, en *CAML*, le programme *append* concatène des listes sans s'occuper du type des éléments qui les composent. On dit ainsi qu'un programme est *polymorphe* lorsqu'il utilise un même algorithme pour traiter des données de types différents.
On étudiera un langage de programmation simplifié appelé le *système F* [2] (λ-calcul polymorphe).

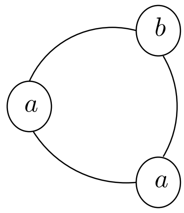
On s'intéressera à des programmes polymorphes qui s'appliquent à des arguments de type paramétré. Les arbres, les listes ou les graphes sont des exemples classiques de types paramétrés. En effet, ce sont des structures qui prennent en argument un type (par exemple le type entier ou le type listes d'entiers) et renvoient un type (par exemple le type des graphes d'entiers ou le type graphe de listes d'entiers).

Pour décrire les types paramétrés, on va utiliser des *foncteurs*. Dans le cadre de la sémantique des types, on peut assimiler un foncteur à deux opérateurs. Le premier prend des briques dans un ensemble et produit l'ensemble des édifices constructibles selon certaines règles. Le second s'attache à renommer les briques dans chacun des édifices.
Par exemple, pour les graphes, le foncteur G prend comme briques l'ensemble des noeuds X et lui associe les graphes symétriques non étiquetés de sommets pris dans X :

- si $\mathbb{N} = \{1, \ldots, n, \ldots\}$ et $Y = \{a, b, c, d\}$, alors



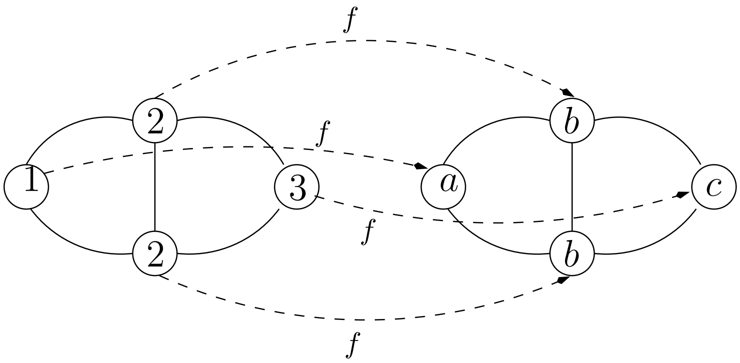
$\in G(\mathbb{N})$ et



$\in G(Y)$.

- si $f : \mathbb{N} \to Y$, alors $G(f)$ renomme, dans les édifices de $G(\mathbb{N})$, les noeuds étiquetés par $\mathbb{N}$ en des noeuds étiquetés par Y. Par cette opération, on obtient un édifice de $G(Y)$.

[3] Catégorie des ensembles et fonctions.



$$\begin{aligned} f : 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto b \\ 3 &\mapsto c \end{aligned}$$

Etant donnée une catégorie $\mathbf{T}$ de types et de fonctions de renommage, on interprète ainsi un type paramétré A par un foncteur noté $[A] : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$.
On peut citer deux exemples :

- J.-Y. Girard [2], il y a tout juste vingt ans, a introduit cette méthode de modélisation. Il a proposé comme catégorie de types la catégorie **CohInj** des espaces cohérents et des plongements (injections qui préservent la relation de cohérence). Les types paramétrés sont interprétés par des foncteurs *stables* (i.e. foncteurs de **CohInj** $\to$ **CohInj** qui préservent les colimites filtrées et les produits fibrés)
- Sous la direction de T. Ehrhard, A. Bac a proposé la catégorie de types **INJ** des ensembles et injections. Les types paramétrés sont interprétés par des foncteurs de **INJ** dans **INJ** dits *stables* (i.e. caractérisés par la préservation dans **INJ** des colimites filtrées et des produits fibrés)

On va maintenant expliquer comment on interprète les termes du système F. On utilise la sémantique des termes : un terme est interprété par un morphisme de l'ensemble modélisant son argument vers l'ensemble modélisant son résultat. Pour se ramener à cette méthode, on instancie le paramètre du type du terme. Ainsi, un terme t de type paramétré $A \to B$ sera interprété pour chaque type $S \in \mathbf{T}$ par un morphisme $[t]_S$ de $[A](S)$ vers $[B](S)$.

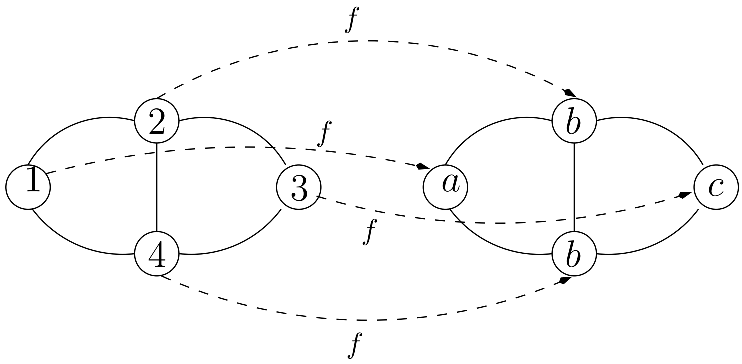
- Dans le modèle de J.-Y. Girard, pour chaque espace cohérent S, un terme t de type paramétré $A \to B$ est interprété par une clique $[t]_S \subseteq [A](S) \times [B](S)$.
- Dans le modèle proposé par T. Ehrhard et A. Bac, pour chaque ensemble S, un terme t de type paramétré $A \to B$ est interprété par une partie $[t]_S \subseteq [A](S) \times [B](S)$.
  Le modèle relationnel de la sémantique des termes peut alors se généraliser en un modèle de la logique linéaire avec second ordre[4] dans la sémantique des types.

Les foncteurs analytiques

Les foncteurs qui sont utilisés dans la théorie des domaines ressemblent aux *foncteurs analytiques* utilisés en combinatoire. Commençons par introduire ce sujet.

[4] La logique linéaire du second ordre est équivalente au système F par l'isomorphisme de Curry-Howard.

Le coefficient d'ordre n d'une série génératrice s'écrit comme le cardinal d'un ensemble *intéressant* construit à partir de n éléments. S'inspirant de cette idée, Joyal a élaboré une théorie catégorique de la combinatoire dans laquelle les foncteurs analytiques s'expriment sous la forme d'une série génératrice.
On décrit ainsi l'ensemble des édifices comme l'union disjointe des édifices qui ont n briques. On remarque que chacun de ces édifices peut être obtenu par renommage à partir d'un édifice ayant des briques de noms différents dit *sous forme normale*. Par exemple, la fonction de renommage $G(f)$ effectue la transformation suivante :



$$\begin{aligned} f : 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto b \\ 3 &\mapsto c \\ 4 &\mapsto b \end{aligned}$$

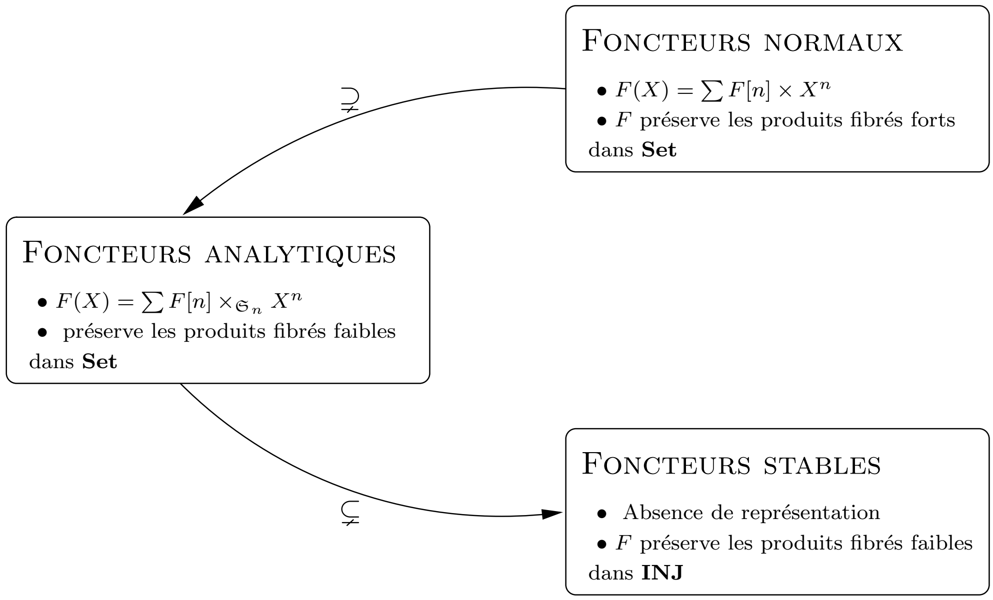
Ainsi, on décompose formellement :

$$G(X) = \sum G_n \times X^n$$

où G_n est l'ensemble des formes normales à n briques (plus précisément dont les briques sont dans $\{1, \ldots, n\}$).

Les foncteurs analytiques ressemblent, de par leurs propriétés, aux foncteurs utilisés en théorie des domaines :
Dans les années 80, A. Joyal [3] a établi une équivalence entre les foncteurs analytiques utilisés en combinatoire et les foncteurs de **Set** dans **Set** qui préservent les colimites filtrées et des produits fibrés faibles dans **Set**.
Dans un même temps, J.-Y. Girard [4], partant de la théorie des domaines, a montré que ses foncteurs normaux pouvaient s'écrire sous forme d'une série entière. Ce sont donc des cas particuliers des foncteurs analytiques. M. Fiore et N. Gambino travaillent à étendre le modèle de Girard aux foncteurs analytiques. Il s'agit ici de sémantique des termes : les foncteurs analytiques sont utilisés pour interpréter les termes du calcul.
Par ailleurs, les foncteurs stables de T. Ehrhard et A. Bac préservent les colimites filtrées et les produits fibrés faibles sur la catégorie **INJ**. Pour des raisons techniques (que nous n'aborderons pas dans ce rapport), les foncteurs stables doivent être étendus à la catégorie **Set**. Ils ressemblent donc fortement à des foncteurs analytiques. Il s'agit ici de sémantique des types : les foncteurs stables sont utilisés pour interpréter les types d'un calcul polymorphe.

Les ponts qui existent entre la combinatoire et la sémantique ne sont pas étonnants. En effet, ces deux domaines modélisent les mêmes structures de données.



Notre contribution

C'est dans ce contexte que ce stage s'est déroulé :
La première question a été de clarifier la relation entre foncteurs *stables*, foncteurs *normaux* et foncteurs *analytiques*. Nous avons montré que les foncteurs normaux sont des cas particuliers des foncteurs analytiques et que ces derniers sont des cas particuliers des foncteurs stables. Cependant, nous avons exhibé des contre-exemples montrant que ces inclusions sont strictes. Nous avons, par ailleurs, montré que la théorie développée par A. Bac et T. Ehrhard peut s'adapter au cadre des foncteurs analytiques. Dans un deuxième temps, on a étudié les formes normales qui apparaissent dans la théorie de A. Joyal. On s'est attaché à comprendre leurs propriétés dans le modèle de la logique linéaire avec second ordre.
Finalement, en utilisant les foncteurs analytiques pour modéliser la logique linéaire du second ordre, on espère pouvoir utiliser les outils développés par les mathématiciens sur les séries entières pour mieux comprendre les modèles de l'informatique.

Le rapport

Ce rapport commence (cf. chapitre 1) par une étude détaillée des foncteurs analytiques tels qu'ils apparaissent dans la théorie de A. Joyal [3]. Dans ce chapitre, on introduit des outils fondamentaux comme les *formes normales faibles* et les *éléments génériques* qui serviront dans le chapitre suivant. On s'attache aussi à mieux comprendre ces notions au travers d'exemples (comme les foncteurs couple et multiensemble).
Dans le chaptitre 2, on démontre la caractérisation des foncteurs analytiques en terme de préservation de colimites filtrées et de produits fibrés faibles. Puis on utilise ce théorème pour montrer que les coefficients des foncteurs analytiques sont uniques à isomorphisme près. Enfin, on étudie les différentes opérations que l'on peut effectuer sur les foncteurs analytiques, notamment celles qui apparaissent dans le modèle de la logique linéaire du second ordre.
Le chapitre 3 compare les foncteurs analytiques et les foncteurs stables. On y trouve également la description du modèle décrit par A. Bac transposé au cadre des foncteurs analytiques.
Nous avons finalement (cf. chapitre 4) étudié une autre caractérisation des foncteurs stables qui permet de faire le lien avec les préfaisceaux.

Chapitre 1

Etude des foncteurs analytiques

Les foncteurs analytiques ont été introduits par André Joyal dans [3]. Ce sont des foncteurs qui peuvent s'écrire sous la forme d'une série entière dont les coefficients sont des espèces de structure. Une espèce de structure est un foncteur qui permet de décrire des objets comme des arbres, des listes, des graphes... (cf. [5]) et dont les morphismes sont des renommages bijectifs de ces objets. Dans un premier temps (1.1) nous donnons la définition de ces notions.
Les foncteurs analytiques se rapprochent des foncteurs stables de par leur caractérisation : ils préservent les colimites filtrées et les produits fibrés faibles respectivement dans **Set** (la catégorie des ensembles et des fonctions) et dans **INJ** (la catégorie des ensembles et des injections). Dans un deuxième temps (1.2), nous montrons que les foncteurs analytiques vérifient bien cette propriété. De plus, dans le chapitre 2, nous montrerons que ces deux propriétés caractérisent les foncteurs analytiques.
Nous consacrons la deuxième section à la description d'outils, qui nous serviront dans le chapitre 2. Certains d'entre eux sont définis dans un cadre catégorique général, pour d'autres on se placera dans le cadre de la catégorie des ensembles. Nous avons notamment besoin d'introduire la notion de *catégorie des éléments* qui permet de traduire mathématiquement le renommage des édifices. Puis nous faisons une hypothèse supplémentaire qui nous permet d'interpréter les notions de *minimaux* (interprétés par les *supports*) et de *formes normales faibles*-WNF (interprétées par les éléments *génériques*).

1.1 Définitions et premières propriétés

Pour définir les espèces de structure, qui sont les coefficients de la série de Taylor d'un foncteur analytique, nous avons besoin de considérer la catégorie des entiers et des bijections. Deux points de vue existent sur cette catégorie et nous les utilisons indifféremment :
La catégorie $\mathbf{\Sigma}(*)$[1] des entiers et des bijections est équivalente à la catégorie **B**

[1] C'est-à-dire le monoïde libre engendré par un élément $*$.

des ensembles finis et des bijections.
En effet, le foncteur $E : n \in \mathbf{\Sigma}(*) \to [n] = \{1, ..., n\} \in \mathbf{B}$ est plein et fidèle et pour tout $S \in \mathbf{B}$ il existe $n = card(S)$ tel que $S \cong E(n)$. Donc E est une équivalence de catégorie. [6]

1.1.1 Définitions

Pour définir les foncteurs analytiques, nous adoptons le point de vue de A. Joyal [3]. Cependant, il existe d'autres définitions que nous décrivons en annexe B.

Définition 1.1.1. Un foncteur $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ est dit analytique s'il existe un foncteur (appelé *espèce de structure*) $F[\;] : \mathbf{\Sigma}(*) \to \mathbf{Set}$ tel que F est isomorphe à

$$\sum_n \mathbf{Set}([n], -) \times F[n] \;/\mathfrak{S}_n$$

Pour un ensemble A, l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{Set}([n], A) \times F[n]$ est la suivante. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ p : [n] \to A,\ s \in F[n]$.

$$\sigma.(p, s) = (p \circ \sigma^{-1}, F[\sigma](s))$$

On peut donner une généralisation de cette définition aux foncteurs analytiques à plusieurs variables et plusieurs composantes.
Soit $\vec{F} : \mathbf{Set^d} \to \mathbf{Set^p}$ un foncteur. On note : $\forall \vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\forall \vec{A} = (A_1, \dots, A_d)$,

$$\vec{A}^{\vec{n}} = (A_1^{n_1}, \dots, A_d^{n_d}), \quad \mathfrak{S}_{\vec{n}} = \mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_d}.$$

Pout tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on note $F^{(j)} : \mathbf{Set^d} \to \mathbf{Set}$ la j-ème composante du foncteur $\vec{F}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on note $\vec{F_i} : X_i \mapsto \vec{F}(\mathcal{I}, \dots, X_i, \dots, \mathcal{I})$ le foncteur partiel en la $i^{\text{ème}}$ variable.

Définition 1.1.2 (Foncteurs analytiques à plusieurs variables)**.** On dit que $\vec{F}$ est analytique lorsque chacune de ses composantes $F^{(j)}$ est analytique. C'est-à-dire qu'il existe un foncteur $F^{(j)}[\;] : \mathbf{B}^d \to \mathbf{Set}$ tel que :

$$\forall \vec{A} \in \mathbf{Set^d}, \quad F^j(\vec{A}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbf{N}^d} F^j[\vec{n}] \times \vec{A}^{\vec{n}} / \mathfrak{S}_{\vec{n}}$$

Les propriétés qui suivent sont toutes énoncées dans le cas d'une variable et d'une composante, mais elles se généralisent sans difficulté au cas de plusieurs variables et de plusieurs composantes.

1.1.2 Propriétés de préservation

Ce paragraphe est consacré aux deux propriétés caractéristiques des foncteurs analytiques : la préservation des colimites filtrées et la préservation des produits fibrés faibles. Nous fournissons aussi un contre-exemple qui montre que tous les foncteurs analytiques ne préservent pas les produits fibrés forts. Ceci les différencie des foncteurs normaux (qui préservent les colimites filtrées et les produits fibrés forts) de J.-Y. Girard [4] qui sont en fait un cas particulier de foncteurs analytiques.
Les démonstrations du paragraphe suivant sont *catégoriques* et peuvent être passées lors d'une première lecture sans nuire à la compréhension de la suite.

Proposition 1.1.3. *Tout foncteur analytique préserve les colimites filtrées :*

$$\forall (A_i)_{i\in I}, \quad F(\underset{i\in I}{colim} A_i) \simeq \underset{i\in I}{colim} F(A_i)$$

Remarque 1.1. Dans la suite, le signe *égal* désignera souvent une équivalence.

Démonstration. Commençons par montrer que si la colimite est filtrée, alors $\mathbf{Set}(n, colim(A_i)) = colim(\mathbf{Set}(n, A_i))$. En appliquant le foncteur homset au cocône partant de la limite filtrée, on obtient :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}(n, A_i) \arrow[dr, "\tau_i"] \arrow[drr, bend left, "\mu_i \circ _"] & & \\
& colim(\mathbf{Set}(n, A_i)) \arrow[r, dashed, "u"] & \mathbf{Set}(n, colim(A_i)) \\
\mathbf{Set}(n, A_j) \arrow[ur, "\tau_j"] \arrow[urr, bend right, "\mu_j \circ _"'] & &
\end{tikzcd}$$

Montrons que u est injective : soient f et $g \in colim(\mathbf{Set}(n, A_i))$ telles que $u(f) = u(g)$. Comme la colimite est filtrée, il existe k et $f', g' \in \mathbf{Set}(n, A_k)$ tels que $\mu_k \circ f' = f$ et $\mu_k \circ g' = g$. Soit $x \in [n]$, $\mu_k \circ f'(x) = \mu_k \circ g'(x)$. Par définition de $colim(A_i)$, μ_k est injective, donc $f'(x) = g'(x)$. Comme cette égalité est vraie pour tout x, $f' = g'$ puis $f = g$.
Montrons que u est surjective : soit $f \in \mathbf{Set}(n, colim(A_i))$, alors pour tout $x \in [n]$, $f(x) \in colim(A_i)$. Comme la colimite est filtrée, et que $[n]$ est fini, il existe k et pour tout x, il existe $a_x \in A_k$ tels que $\forall x \in [n]$, $\mu_k(a_x) = f(x)$. Si on définit $g \in \mathbf{Set}(n, A_k)$ par : $g(x) = a_x$, alors $\tau_k g$ est un antécédent de f par u.

Comme le produit cartésien possède un adjoint à gauche, il préserve les colimites [6]. D'où :

$$\mathbf{Set}(n, colim A_i) \times F[n] = colim(\mathbf{Set}(n, A_i) \times F[n])$$

D'après le théorème de Fubini [6] la cofin commute à toute colimite. D'où :

$$\int^n \mathbf{Set}(n, colim A_i) \times F[n] = colim(\int^n \mathbf{Set}(n, A_i) \times F[n])$$

Ce qui nous permet de conclure grâce à la définition des foncteurs analytiques par les extensions de Kan donnée dans l'annexe B. $\square$

Proposition 1.1.4. *Tout foncteur analytique préserve les produits fibrés faibles larges.*

Remarque 1.2. On utilisera deux notions : les produits fibrés faibles (c'est-à-dire binaires) et les produits fibrés faibles larges (c'est-à-dire dénombrables).

Démonstration. Pour plus de clarté, la démonstration est rédigée pour des produits faibles binaires mais elle se généralise telle quelle aux produits faibles larges. Commençons par montrer que si W est un produit fibré faible de A et B,

alors $\mathbf{Set}(n,W)\times F[n]/\sigma_n$ est un produit fibré faible de $\mathbf{Set}(n,A)\times F[n]/\sigma_n$ et de $\mathbf{Set}(n,B)\times F[n]/\sigma_n$
Soit donc le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

On applique le foncteur $G(\_) = \mathbf{Set}(n,\_)\times F[n]/\sigma_n$, on factorise par le produit fibré fort P qui existe toujours dans $\mathbf{Set}$ pour obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
W^n \times F[n]/\sigma_n \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[drr, bend left, "G(\pi_1)"] \arrow[ddr, bend right, "G(\pi_2)"'] & & \\
& P \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\tau_2"] & A^n \times F[n]/\sigma_n \arrow[d, "G(f)"] \\
& B^n \times F[n]/\sigma_n \arrow[r, "G(g)"'] & C^n \times F[n]/\sigma_n
\end{tikzcd}$$

P est formé des couples : $([p,x],[q,y])$ tels que $[f\circ p,x] = [g\circ q,y]$ avec $p : n \to A$, $q : n \to B$, et $x, y \in F[n]$.
Pour montrer que $G(W)$ est un produit fibré faible, il suffit de montrer que s est surjective.
Soit donc un élément $([p,x],[q,y])$ de P. Comme $[f\circ p,x] = [g\circ q,y]$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}$ telle que : $f\circ p\circ\sigma^{-1} = g\circ q$ et $\sigma(x) = y$.
On obtient un wedge qui s'appuie sur le produit fibré faible, d'où l'existence de k :

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "p\circ\sigma"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& W \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

On a donc construit $[k,y] \in \mathbf{Set}(n,W)\times F[n]/\mathfrak{S}_n$ tel que

$$G(\pi_1)([k,y]) = [\pi_1\circ k,y] = [p\circ\sigma,y] = [p,\sigma^{-1}(y)] = [p,x]$$

$$G(\pi_2)([k,y]) = [\pi_2\circ k,y] = [q,y]$$

Donc par définition de P,

$$s([k,y]) = ([p,x],[q,y])$$

Comme dans $\mathbf{Set}$, les coproduits commutent aux produits fibrés forts, ils commutent aussi aux produits fibrés faibles. D'où :

$$\sum_n \mathbf{Set}(n,\prod_C A_i)\times F[n]/\mathfrak{S}_n = \prod_{G(C)}\sum_n \mathbf{Set}(n,A_i)\times F[n]/\mathfrak{S}_n$$

□

Le contre-exemple ci-dessous montre le rôle du quotient par les groupes de permutation $\mathfrak{S}_n$ dans la définition des foncteurs analytiques. Dans sa définition des foncteurs normaux comme séries entières [4], J.-Y. Girard ne tenait pas compte de ce quotient. Il a aboutit à des foncteurs caractérisés par la préservation des colimites filtrées et des produits fibrés forts : les foncteurs normaux. Ces foncteurs sont donc un cas particulier des foncteurs analytiques.

Contre-Exemple 1.1.1. Les foncteurs analytiques ne préservent pas (en général) les produits fibrés.

Démonstration. On considère le foncteur analytique : $F(\_) = \mathbf{Set}(2, \_)/\mathfrak{S}_2$
Soient $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ et $C = \{c\}$ où tous ces éléments sont distincts deux à deux. On va montrer que $F(A\times B) = (A\times B)^2/\mathfrak{S}_2$ et $F(A)\times F(B) = A^2/\mathfrak{S}_2 \times B^2/\mathfrak{S}_2$ ne sont pas isomorphes. Comme F est un foncteur, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F(A\times B) \arrow[drr, bend left, "F(\pi_1)"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, bend right, "F(\pi_2)"'] & & \\
& F(A)\times F(B) \arrow[r, "\pi'_1"] \arrow[d, "\pi'_2"'] & A^2/\mathfrak{S}_2 \arrow[d, "c"] \\
& B^2/\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "c"'] & C^2/\mathfrak{S}_2
\end{tikzcd}$$

Comme F est analytique, $F(A \times B)$ est un produit fibré faible et h est donc surjective. Il suffit alors de montrer que h n'est pas injective.
On considère le couple $([1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2], [1 \mapsto b_1, 2 \mapsto b_2])$ dans $A^2/\mathfrak{S}_2\times B^2/\mathfrak{S}_2$.
On va exhiber deux antécédents distincts de ce couple par h.
Les classes de fonctions :

$$k_1 = [1 \mapsto (a_1, b_1), 2 \mapsto (a_2, b_2)]$$

$$k_2 = [1 \mapsto (a_1, b_2), 2 \mapsto (a_2, b_1)]$$

vérifient :

$$h(k_1) = h(k_2) = ([1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2], [1 \mapsto b_1, 2 \mapsto b_2])$$

$$k_1 \neq k_2$$

□

1.2 Quelques outils

Afin de montrer que les deux propriétés de préservation des colimites filtrées et de préservation des produits fibrés faibles caractérisent les foncteurs analytiques, nous avons besoin de nouveaux outils. Tout d'abord, nous introduisons la catégorie des éléments d'un foncteur qui permet de modéliser les édifices (appelés

éléments) associés à un foncteur. Ensuite, nous verrons les notions de minimaux et de *forme normale faible*. Cette dernière nous permettra au chapitre suivant de construire les coefficients (l'espèce de structure) de la série du foncteur analytique.
De plus, au fur et à mesure que les notions sont définies, nous donnons des interprétations et des exemples pour mieux comprendre la structure des foncteurs analytiques.

1.2.1 Catégorie des éléments

Soit $\mathbf{C}$ une petite catégorie.

Définition 1.2.1. Soit un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$. La catégorie $\mathbf{el(F)}$ est la catégorie formée des

- Objets : (A, a) tels que $a \in F(A)$
- Morphismes : $f : (A, a) \to (B, b)$ où $f \in \mathbf{C}(A, B)$ est un morphisme de $\mathbf{C}$ tel que $b = F(f)(a)$

Remarque 1.3. Le nom de catégorie des éléments vient du fait que l'on considère un élément (i.e. un édifice de $F(A)$) dont on observe le renommage par les morphismes. Si ce renommage est bijectif, on dit que les deux édifices sont isomorphes dans $\mathbf{el(F)}$.

Proposition 1.2.2. *Si F préserve les produits fibrés faibles dénombrables dans $\mathbf{C}$, alors $\mathbf{el(F)}$ possède les produits fibrés faibles dénombrables. De plus, si*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "g_i"] & B_j \arrow[d, "f_j"] \\ B_i \arrow[r, "f_i"'] & A \end{tikzcd}$$

est un produit fibré faible et si $(B_i, b_i) \xrightarrow{f_i} (A, a)$, alors il existe $c \in F(C)$ tel que :

$$\begin{tikzcd} (C, c) \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "g_i"] & (B_j, b_j) \arrow[d, "f_j"] \\ (B_i, b_i) \arrow[r, "f_i"'] & (A, a) \end{tikzcd}$$

est un produit fibré faible.

Démonstration. On prend un produit fibré faible (g_i) de (f_i). Comme F préserve les produits fibrés faibles, $F(C)$ est un produit fibré faible de $F(B_i) \to F(A)$, et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, dotted, "\exists c"] \arrow[drr, bend left, "b_j"] \arrow[ddrr, bend left, "a"] \arrow[ddr, bend right, "b_i"'] & & \\ & F(C) \arrow[r, "F(g_j)"] \arrow[d, "F(g_i)"] & F(B_j) \arrow[d, "F(f_j)"] \\ & F(B_i) \arrow[r, "F(f_i)"'] & F(A) \end{tikzcd}$$

□

1.2.2 Hypothèse supplémentaire

Dans cette partie, nous supposons que "tous les foncteurs considérés préservent les inclusions".
Cette hypothèse est naturelle car si on considère deux ensembles d'étiquettes $X \subseteq Y$, l'ensemble des édifices construits à partir de X est inclus dans l'ensemble des édifices construits à partir de Y, c'est-à-dire en termes de foncteurs : $F(X) \subseteq F(Y)$ (où F est un foncteur analytique).
De plus, cette hypothèse n'est pas restrictive car tout foncteur analytique est isomorphe à son développement en série de Taylor. Or, ce dernier préserve les inclusions. Via un isomorphisme, on peut donc toujours travailler dans le cadre de cette hypothèse.
Etudions les caractéristiques d'un tel foncteur.

Proposition 1.2.3. *Soit* F : **Set** $\to$ **Set** *un foncteur analytique qui préserve les inclusions. Alors,*

$$\begin{array}{lcl} f : A \to B,\ B \subseteq C, & \Rightarrow & F(A \xrightarrow{f} B) = F(A \xrightarrow{f} C) \\ f : A \to B,\ S \subseteq A, & \Rightarrow & \forall s \in F(S),\ F(f)(s) = F(f_{|S})(s) \end{array}$$

Dans ce rapport, nous travaillons à *isomorphisme près*. C'est-à-dire que nous ne considérons que la structure de nos édifices. Plus particulièrement, nous identifions un édifice et son renommage bijectif. Cependant, pour pouvoir interpréter les notions de minimaux et WNF, nous avons besoin de donner un représentant universel de nos édifices.
Grâce à la propriété de préservation des inclusions, on peut considérer un ensemble *référent* d'étiquettes noté $\mathcal{I}$ (supposé dénombrable). En effet, pour tout ensemble X, on peut trouver une injection f qui renomme les édifices avec des étiquettes de $\mathcal{I}$ et qui, si $X \subseteq Y$, préserve l'inclusion des structures :

$$F(f)(X) \subseteq F(f)(Y).$$

1.2.3 Minimaux et supports

Plaçons-nous à présent dans la catégorie **Set**. Soit F : **Set** $\to$ **Set** un foncteur. Nous introduisons dans ce paragraphe la notion de minimal. Elle se rapproche de la notion de support (ensemble des noms qui apparaissent dans un objet) décrite au paragraphe suivant.

Minimaux

Définition 1.2.4. Un objet (S, s) de $\mathbf{el(F)}$ est dit *minimal* lorsque S est fini et que tout morphisme $(A, a) \to (S, s)$ est une surjection.

Proposition 1.2.5. *Soient* $\vec{n} \subseteq \vec{\mathcal{I}}$ *et* $a \in F(\vec{n})$. $(n_1, \ldots, n_d, a)$ *est minimal dans* $\mathbf{el(F)}$ *si et seulement si pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$, (n_i, a) *est minimal dans* $el(F_i)$.

Démonstration. Soient $(\vec{m}, b)$ et $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_d) : (\vec{m}, b) \to (\vec{n}, a)$ dans $\mathbf{el(F)}$. $(\vec{n}, a)$ est minimal si et seulement si chacune de ses composantes s_i est surjective. □

Proposition 1.2.6. *Soient (A,a) minimal dans* $\mathbf{el(F)}$ *et $(A,a) \xrightarrow{u} (B,b)$. Si u est surjective, alors (B,b) est minimal dans* $\mathbf{el(F)}$*.*

Démonstration. Soit $(C,c) \xrightarrow{s} (B,b)$ dans $\mathbf{el(F)}$. Comme u est surjective, s se relève en une fonction s' telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (A,a) \arrow[r, two heads, "u"] & (B,b) \\ & (C,c) \arrow[u, "s"'] \arrow[ul, dashed, "s'"] \end{tikzcd}$$

Comme (A,a) est minimal, s' est surjective et donc s aussi. □

Proposition 1.2.7. *Si F préserve les colimites filtrées dans* **Set***, alors pour tout $(A,a) \in$* $\mathbf{el(F)}$ *il existe un $S_a \subseteq A$ fini et $s_a \in F(S_a)$ tels que (S_a, s_a) est minimal et $a = F(\subseteq)(s_a)$.*

Démonstration. $A = \bigcup\limits_{\substack{S \subseteq A \\ fini}} S$

Comme F préserve les colimites filtrées, $F(A) = \underset{\substack{S \subseteq A \\ fini}}{colim} F(S)$

Soit $a \in \underset{\substack{S \subseteq A \\ fini}}{colim} F(S)$. Il existe $S \subseteq A$ fini et $s \in F(S)$ tels que $a = F(\subseteq)(s)$.

On choisit S_a de cardinalité minimale.

Soit $g : (T,t) \to (S_a, s_a)$, on suppose que g n'est pas surjective.

Soient $S' = g(T) \subsetneq S_a$ et $s' = F(g)(t)$, alors $card(S') < card(S_a)$ et $a = F(\subseteq)(s')$ et $s' \in F(S')$.

Ce qui contredit la minimalité de S_a.

Donc g est surjective et (S_a, s_a) minimal. □

Interprétation des minimaux : les supports

Intuitivement, le support d'un édifice est l'ensemble des noms qui apparaissent effectivement sur les briques de cet édifice.

Proposition 1.2.8. *Soit $a \in F(\mathcal{I})$. Il existe $|a|_F \subseteq \mathcal{I}$ fini tel que $(|a|_F, a)$ est minimal dans* $\mathbf{el(F)}$*. De plus, pour $S \subseteq \mathcal{I}$, (S,a) est minimal si et seulement si $S = |a|_F$. On appelle $|a|_F$ le* support *de a.*

Démonstration. D'après la proposition 1.2.7, il existe (S_a, s_a) tel que $a = F(\subseteq)(s_a)$. Comme F préserve les inclusions, on a $s_a = a$. On pose $|\,a\,|_F = S_a$

Remarquons que d'après la preuve de la proposition 1.2.7, pour tout S tel que $a \in F(S)$, on a $|a|_F \subseteq S$. Si (S,a) est minimal, alors $(|a|_F, a) \xrightarrow{\subseteq} (S,a)$ dans $\mathbf{el(F)}$ et de plus ce morphisme est surjectif par minimalité de (S,a) donc $S = |a|_F$. □

Proposition 1.2.9 (Foncteurs de plusieurs variables)**.** *Soit $F : \mathbf{Set}^d \to \mathbf{Set}$ un foncteur analytique de plusieurs variables qui préserve les inclusions. Soit $a \in F(\vec{X})$, alors $\overrightarrow{|a|} = (|a|_{F_1}, \ldots, |a|_{F_d})$*

Exemple 1.2.1. On considère le foncteur $C : X \mapsto X^2$ qui permet de construire les couples d'éléments de X.
C est bien analytique et on vérifie qu'il préserve l'inclusion.
Soit $a \in \mathcal{I}^2$ alors il existe $(a_1, a_2) \in \mathcal{I}^2$ tel que $a = (a_1, a_2)$. Le support de a est l'ensemble $\{a_1, a_2\}$.

Exemple 1.2.2. On considère le foncteur exponentiel $EXP : X \mapsto \sum_n X^n/\mathfrak{S}_n$ qui permet de construire les multiensembles. De par sa forme, EXP est analytique et préserve les inclusions.
Si m est un multiensemble dont les noms sont dans $\mathcal{I}$, c'est-à-dire que $m \in EXP(\mathcal{I})$, alors le support $|m|_{EXP}$ de m est l'ensemble des noms qui apparaissent effectivement dans m.

La proposition suivante exprime qu'un renommage transforme le support d'une structure en le support de son image.

Proposition 1.2.10. *Soit* $(X, a) \xrightarrow{f} (Y, b)$ *dans* $\mathbf{el(F)}$*. On note* f_a *la restriction de* f *à* $|a|_F$ *et* $|b|_F = f_a(|a|_F)$*.*
Si $(|a|_F, a)$ *est minimal dans* $\mathbf{el(F)}$*, alors* $(|a|_F, a) \xrightarrow{f_a} (|b|_F, b)$ *où* $(|b|_F, b)$ *est minimal.*

Démonstration. $a \in F(|a|_F)$ et $b = F(f)(a)$ donc $b \in F(f)(|a|_F) = |b|_F$ et $(|a|_F, a) \xrightarrow{f_a} (|b|_F, b)$ est bien définie et surjective. Comme f_a est surjective et d'après 1.2.6, $(|b|_F, b)$ est minimal. □

1.2.4 Weak Normal Form (WNF) et génériques

Dans son papier, A. Joyal a introduit la notion d'éléments génériques pour démontrer la caractérisation des foncteurs analytiques en termes de préservation de colimites filtrées et de produits fibrés faibles. Cependant, cette notion n'était pas *catégorique*. C'est pourquoi, Ryu Hasegawa a reformulé cette notion en les WNF. De plus, dans la description des foncteurs normaux, J.-Y. Girard utilise des formes normales pour démontrer une caractérisation de ces foncteurs en termes de préservation de colimites filtrées et de produits fibrés forts. Ainsi, les WNF permettent de faire un lien entre les éléments génériques et les formes normales.
Dans ce paragraphe, nous donnons la définition et les propriétés catégoriques des WNF. Dans le paragraphe suivant, nous particularisons cette notion à la catégorie **Set**, ensuite nous montrons une caractérisation des WNF que nous utiliserons par la suite, et enfin, nous établissons les liens avec la notion de générique qui reste l'approche la plus simple de ces objets.

Definitions

Définition 1.2.11 (WNF)**.** Soit A un objet de $\mathbf{C}$. Une WNF de A est un couple formé d'un objet X et d'un morphisme $p : X \to A$ tels que :
$\forall Y,\ \forall q : Y \to A,$

(i) $\exists h \in \mathbf{C}{\downarrow}A(X,Y)$ i.e : $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & A & \end{tikzcd}$ commute

(ii) $\forall f, g \in \mathbf{C}{\downarrow}A(X,Y)$, tq $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & A & \end{tikzcd}$ commute

$\exists u :$ $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & A & \end{tikzcd}$, tq. $f = g \circ u$

Remarque 1.4. Les WNF existent dans un cadre catégorique général. Leur définition se rapproche de celle des objets initiaux dans la catégorie *slice* (cf. A.1.2). La différence réside dans l'unicité de h qui est ici à isomorphisme près. Ryu [1] appelle les WNF des objets transitifs.

Définition 1.2.12. On dit qu'un objet X de $\mathbf{C}$ est une WNF lorsque (X, id_X) est une WNF de X.

Nous verrons par la suite que lorsqu'on se place dans la catégorie $\mathbf{el(F)}$ avec F analytique (X, f) est une WNF de A si et seulement si X est une WNF.

Définition 1.2.13 (Propriété de WNF)**.** On dit que la catégorie $\mathbf{C}$ possède la propriété de WNF lorsque chacun de ses objets possède une WNF.

Propriétés

Proposition 1.2.14 (unicité à isomorphisme près)**.** *Soient f et g deux WNF de A. Alors il existe un isomorphisme u tel que :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sim", "u"'] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme f et g sont des WNF de A, il existe u et v qui font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"'] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "g"] & X \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Comme f est une WNF de A, il existe un isomorphisme w de X tel que si

$u^* = u \circ w$, alors $id_X = v \circ u^*$. On obtient :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u^*"'] \arrow[rr, bend left, "id"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "g"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Comme g est une WNF de A, il existe un isomorphisme w' de Y tel que si $v^* = v \circ w'$, alors $id_Y = u^* \circ v^*$. Donc u^* est un isomorphisme. $\square$

Proposition 1.2.15 (Réciproque)**.** *Soit $X \xrightarrow{f} A$ une WNF de A. Soit $u : X \xrightarrow{\sim} Y$ un isomorphisme, alors $Y \xrightarrow{f \circ u^{-1}} A$ est une WNF de A.*

Démonstration. Soit $Z \xrightarrow{h} A$. Comme f est une WNF, il existe k tel que :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "u^{-1}"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[dl, "h"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Soient k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[r, shift left, "k_1"] \arrow[r, shift right, "k_2"'] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[dl, "h"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Il existe v isomorphisme de $X\vec{f}A$ tel que $(k_1 \circ u) = (k_2 \circ u) \circ v$ donc $w = u \circ v \circ u^{-1}$ vérifie $k_1 = k_2 \circ w$. $\square$

Proposition 1.2.16. *Soient X, Y deux WNF et $X \xrightarrow{u} Y$, alors u est un isomorphisme.*

Démonstration. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[r, "id_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

puis le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "id_X"] \\
X \arrow[ur, shift left, "v \circ u"] \arrow[ur, shift right, "id_X"'] \arrow[r, "id_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

Comme X est une WNF, il existe v' un isomorphimse de x tel que $v'^{-1} \circ v \circ u' = id_Y$ donc u est un isomorphisme. $\square$

Caractérisation des WNF dans $\mathbf{el}(\mathbf{F})$

Plaçons-nous à présent dans la catégorie **Set**. Soit $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ un foncteur. Un résultat important de cette partie est la caractérisation des WNF grâce à l'utilisation des minimaux (sous l'hypothèse que notre foncteur préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles). Ce résultat permettra de donner une intuition sur les WNF : ce sont les couples (n, x) tels que n est le support de x et les noms qui apparaissent dans x n'apparaissent qu'une seule fois.

Théorème 1.2.17. *Soit F un foncteur préservant les colimites filtrées et les produits fibrés faibles. Soit (X, x) un objet de $\mathbf{el}(\mathbf{F})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) (X, x) est une WNF.
(ii) $\forall$ (S, s) minimal, tout morphisme $(S, s) \to (X, x)$ est un isomorphisme.
(iii) $\forall (A, a)$, tout morphisme $(X, x) \to (A, a)$ est une WNF de (A, a) dans $\mathbf{el}(\mathbf{F})$.

Démonstration. Soit F un tel foncteur.
$(i) \Rightarrow (ii)$ On suppose que $(X, x) \xrightarrow{id} (X, x)$ est une WNF dans $\mathbf{el}(\mathbf{F})$.
Soient (S, s) un objet minimal et $(S, s) \xrightarrow{f} (X, x)$. Comme id est une WNF de (X, x), il existe g tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \arrow[rr, dashed, "g"] \arrow[dr, "id_X"'] & & (S,s) \arrow[dl, "f"] \\
& (X,x) &
\end{tikzcd}$$

Comme $f \circ g = id$, g est injective. De plus, g est à valeurs dans le minimal (S, s), elle est donc surjective. Finalement, f est un isomorphisme en tant qu'inverse de g.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ On suppose que $\forall$ (S, s) minimal, tout morphisme $(S, s) \to (X, x)$ est un isomorphisme.
Soient $(A, a) \in \mathbf{el}(\mathbf{F})$ et $f : (X, x) \to (A, a)$ un morphisme. Pour montrer que f est une WNF de (A, a), il nous faut vérifier deux propriétés :

- Soient $(Y, y) \in \mathbf{el}(\mathbf{F})$ et $g : (Y, y) \to (A, a)$ un morphisme.
  Comme F préserve les produits fibrés faibles (par 1.1.4), il existe (D, d) produit fibré faible de f et g dans $\mathbf{el}(\mathbf{F})$. Comme F préserve les colimites filtrées, il existe (S, s) minimal et un morphisme $(S, s) \to (D, d)$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(S,s) \arrow[r] \arrow[dr, bend left, "\sigma"'] & (D,d) \arrow[r] \arrow[d] & (Y,y) \arrow[d, "g"] \\
& (X,x) \arrow[r, "f"] & (A,a)
\end{tikzcd}$$

  Comme (S, s) est minimal, σ est un isomorphime. On a donc construit un morphisme $(X, x) \xrightarrow{h} (Y, y)$.

- On suppose à présent que l'on a deux morphismes
$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr] & & (Y,y) \arrow[dl] \\ & (A,a) & \end{tikzcd}$$
On construit (D,d) produit fibré faible de f et g, puis (S,s) minimal tel que :
$$\begin{tikzcd} (S,s) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\sigma'"] \arrow[dr, bend left, "\sigma"'] & (D,d) \arrow[r] \arrow[d] & (X,x) \arrow[d, "g"] \\ & (X,x) \arrow[r, "f"] & (Y,y) \end{tikzcd}$$
Alors, σ et σ' sont des isomorphismes et $u = \sigma' \circ \sigma^{-1}$ est un isomorphisme tel que $f = g \circ u$

Finalement, $(X,x) \to (A,a)$ est une WNF de (A,a).

$(iii) \Rightarrow (i)$ On choisit $(A,a) = (X,x)$ dans (iii), alors $id_X : (X,x) \to (X,x)$ est une WNF. Donc X est une WNF. □

Proposition 1.2.18. *Soit F un foncteur préservant les colimites filtrées et les produits fibrés faibles. Soit (X,x) une WNF de* $\mathbf{el(F)}$*, alors (X,x) est minimal.*

Réciproquement, on verra qu'un minimal n'est pas toujours une WNF (cf. 1.5). Ce stage nous a permis de mieux le comprendre.

Démonstration. On sait d'après 1.2.7 qu'il existe $(S,s) \overset{f}{\hookrightarrow} (X,x)$ telle que (S,s) est minimal. D'après la caractérisation 1.2.17, alors f est un isomorphisme. Donc (X,x) est minimal car isomorphe à un minimal (cf. 1.2.6). □

Génériques

Les élément génériques ont été définis par A. Joyal dans [3].
Après avoir introduit cette notion, nous la comparons avec la notion de WNF : les éléments génériques sont tous des WNF et si l'on suppose que le foncteur préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles alors il y a équivalence entre les deux notions.

Définition 1.2.19. Soit $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ un foncteur. On dit que (X,x) est un élément générique de $\mathbf{el(F)}$ lorsque pour tous f, g, il existe h tel que :
$$\begin{tikzcd} & (Y,y) \arrow[d, "f"] \\ (X,x) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & (Z,z) \end{tikzcd}$$
.

Proposition 1.2.20. *Soit $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ un foncteur. Tout élément générique de* $\mathbf{el(F)}$ *est une WNF.*

Démonstration. Soient (A, a), $(Y, y) \in \mathbf{el(F)}$, $f : (Y, y) \to (A, a)$ et $g : (X, x) \to (A, a)$.

- Comme (X, x) est un élément générique, il existe $h : (X, x) \to (Y, y)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & (Y,y) \arrow[d, "f"] \\ (X,x) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & (Z,z) \end{tikzcd}$$

- Soient $h, k : (X, x) \to (Y, y)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & (Y,y) \arrow[d, "f"] \\ (X,x) \arrow[ur, shift left, "k"] \arrow[ur, shift right, "h"'] \arrow[r, "g"'] & (Z,z) \end{tikzcd}$$

  On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & (X,x) \arrow[d, "h"] \\ (X,x) \arrow[ur, dashed, "p"] \arrow[r, "k"'] & (Y,y) \end{tikzcd}$$

  p existe car (X, x) est générique. On vérifie en utilisant le diagramme suivant que p est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} & (X,x) \arrow[d, "p"] \\ (X,x) \arrow[ur, dashed, "q"] \arrow[r, "id"'] & (X,x) \end{tikzcd}$$

  .

□

Proposition 1.2.21. *Soit F un foncteur préservant les colimites filtrées et les produits fibrés faibles. Toute WNF de* $\mathbf{el(F)}$ *est un élément générique.*

Démonstration. On suppose que (X, x) est une WNF, alors d'après le théorème 1.2.17, $\forall (A, a)$, tout morphisme $(X, x) \to (A, a)$ est une WNF de (A, a) dans $\mathbf{el(F)}$. D'où (X, x) est générique.
Réciproquement, On suppose (X, x) générique, on veut montrer que $(X, x) \to (X, x)$ est une WNF. Soit $f : (Y, y) \to (X, x)$. Comme (X, x) est générique, il existe h tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & (Y,y) \arrow[d, "f"] \\ (X,x) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "id"'] & (X,x) \end{tikzcd}$$

Pour la deuxième partie de la définition de WNF, on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & (Y,y) \arrow[d, "f"] \\
(X,x) \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[ur, shift right, "g"'] \arrow[r, "id"'] & (X,x)
\end{tikzcd}$$

puis le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x) \arrow[d, "h"] \\
(X,x) \arrow[ur, dashed, "k"] \arrow[r, "g"'] & (Y,y)
\end{tikzcd}$$

Montrons que k est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x) \arrow[d, "k"] \\
(X,x) \arrow[ur, dashed, "l"] \arrow[r, "id"'] & (X,x)
\end{tikzcd}$$

Par un stratagème similaire, on vérifie que l est l'inverse de k. $\square$

Interprétation des WNF

Proposition 1.2.22. *Si (X, x) est une WNF dans* $\mathbf{el}(\mathbf{F})$*, alors il existe $y \in F(\mathcal{I})$ et un isomorphisme $u : (X, x) \to (|y|_F, y)$.*

Démonstration. D'après 1.2.18, (X, x) est minimal donc fini. Comme $\mathcal{I}$ est infini, il existe une injection $u : X \hookrightarrow \mathcal{I}$. On pose $y = F(u)(x)$. $(u(X), y)$ est minimal car $u : (X, x) \to (u(X), y)$ est un isomorphisme. Par unicité du support, $u(X) = |y|_F$ (cf. 1.2.8). $\square$

Une WNF est une structure dans laquelle les noms n'apparaissent qu'une seule fois. La proposition suivante exprime le fait que toute substitution qui transforme un élément et son support en une WNF est en fait un renommage (injectif).

Proposition 1.2.23. *Soit $(|a|_F, a) \xrightarrow{s} (|x|_F, x)$. Si $(|x|_F, x)$ est une WNF dans* $\mathbf{el}(\mathbf{F})$*, alors s est bijective.*

Démonstration. cf. 1.2.8 et 1.2.17. $\square$

Exemples

Dans les exemples suivant, les WNF sont exactement les structures dont les noms sont distincts deux à deux.

Exemple 1.2.3. $(a, b) \in C(\{a, b\})$ est générique si et seulement si $a \neq b$.
$C[2] = \{(a, b) \mid a, b \in [2],\ a \neq b\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$.
$C[n] = \emptyset$, si $n \neq 2$.

Démonstration. On considère les diagrammes suivant :

$$\begin{tikzcd} & (\{c,d\},(c,d)) \arrow[d, "c=d"] \\ (\{a\},(a,a)) \arrow[r, "a=c"'] & (\{c\},(c,c)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\{x,y\},(x,y)) \arrow[d, "f"] \\ (\{a,b\},(a,b)) \arrow[r, "g"'] & (\{s,t\},(s,t)) \end{tikzcd}$$

Dans le premier cas, il est impossible de trouver une fonction $h : \{a\} \to \{c,d\}$ telle que $(c,d) = (h(a),h(a))$. Par contre dans le deuxième cas, la fonction $a \mapsto x$ et $b \mapsto y$ convient (il suffit de faire une étude de cas).
On remarque enfin que $(n,(a,b))$ ne peut être générique dans $el(C)$ que s'il est minimal. Or, si $n \geq 3$, $(n,(a,b))$ n'est pas minimal et n'est donc pas une WNF. □

Remarque 1.5. On remarque dans cet exemple que $(a,(a,a))$ est minimal mais n'est pas une WNF.

Exemple 1.2.4. Soit $M \in EXP(\{1,\ldots,n\})$.
(n,M) est générique si et seulement si $M = \{1,\ldots,n\}$: il n'y a pas de répétition dans M. $EXP[n] = \{\{1,\ldots,n\}\} \simeq \{*\}$.

Démonstration. C'est le même principe que pour C. □

Chapitre 2

Propriétés des foncteurs analytiques

Dans le chapitre 1, nous avons introduit de nombreux outils (notamment, les éléments génériques et les WNF). Nous allons nous en servir maintenant pour montrer un théorème fondamental : le théorème de caractérisation des foncteurs analytiques. Sa preuve repose sur une propriété de forme normale : tous les édifices associés à notre foncteur sont engendrés par une WNF (un édifice dont toutes les étiquettes sont différentes) via un renommage qui identifie certaines des étiquettes.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons une conséquence du théorème fondamental : à isomorphisme près, les coefficients de la série d'un foncteur analytique sont uniques. Ceci permet de faire l'analogie avec les séries génératrices. On parlera de série de Taylor.
Dans un troisième temps, nous étudions les opérations sur les foncteurs qui préservent l'analyticité. Les démonstrations de cette partie utilisent la caractérisation des foncteurs analytiques et l'unicité du développement en série de Taylor.

2.1 Caractérisation des foncteurs analytiques

2.1.1 Le théorème

Théorème 2.1.1. *Soit* $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) F *est analytique.*
(ii) F *préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles dénombrables.*
Dans ce cas, on a

$$(iii) \forall (A,a) \in el(F),\ \exists (X,x) \quad t.q.\ (X,x) \to (A,a),\ (X,x)\ \textit{WNF et } X \textit{ est fini.}$$

Démonstration. La première implication a été montrée dans le chapitre 1. Pour la réciproque, on va utiliser la propriété (iii) comme intermédiaire. Ensuite on va introduire l'espèce des structures des éléments génériques. Enfin on va construire une transformation naturelle ι entre la série entière engendrée par l'espèce de structure des génériques et notre foncteur analytique. Il nous restera à montrer que c'est un isomorphisme. C'est à cet endroit qu'interviendra la caractérisation des WNF (injectivité) et la propriété (iii) (surjectivité). Pour $(i) \Rightarrow (ii)$, cf. 1.1.3 et 1.1.4.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On raisonne par l'absurde :
On suppose que : $\exists (A, a) \in el(F)$ t.q. $\forall (X, x)$ avec X fini, si $\exists (X, x) \to (A, a)$, alors (X, x) n'est pas une WNF. $(*)$
Soit donc un tel (A, a). D'après 1.2.7 il existe (X_0, x_0) minimal tel que $(X_0, x_0) \xrightarrow{f} (A, a)$.

On effectue une construction par récurrence de :
(X_n, x_n) minimal non WNF et $p_{n+1} : (X_{n+1}, x_{n+1}) \to (X_n, x_n)$ surjective non injective.
On suppose ces objets construits jusqu'au rang n.
(X_n, x_n) n'est pas une WNF. Par 1.2.17(ii), il existe (X_{n+1}, x_{n+1}) minimal et $(X_{n+1}, x_{n+1}) \xrightarrow{p_n} (X_n, x_n)$ qui n'est pas un isomorphisme. p_n est surjective car (X_n, x_n) est minimal. En composant les p_n, on obtient un morphisme $(X_{n+1}, x_{n+1}) \to (A, a)$ où (X_{n+1}, x_{n+1}) n'est pas une WNF par $(*)$.
Ce qui termine la récurrence.
On remarque que $card(X_n)$ est une suite strictement croissante.

Soit (D, d) le produit fibré des morphismes $(X_n, x_n) \to (A, a)$ (cf. 1.2.2). Soit (S, s) un minimal (cf. 1.2.7) tel que :

$$\begin{tikzcd}
(S,s) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "s_m"] \arrow[dr, bend left, "s_n"'] & (D,d) \arrow[r] \arrow[d] & (X_m, x_m) \arrow[d] \\
 & (X_n, x_n) \arrow[r] & (A,a)
\end{tikzcd}$$

On choisit n tel que $card(S) < card(X_n)$. s_n est surjective car (X_n, x_n) est minimal. On arrive donc à une *contradiction*.

$(iii + ii) \Rightarrow (i)$
On construit une espèce de structure $F^\circ[\ ]$, puis un isomorphisme naturel[1] ι entre le foncteur analytique induit $F^\circ(\ )$ et F.

On définit l'espèce de structure $F^\circ[\quad] : \mathbf{\Sigma}(*) \to \mathbf{Set}$ par :

$$\begin{array}{rcl} F^\circ[n] & = & \{a \mid ([n], a)\ WNF\} \\ F^\circ[\sigma] & = & F(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \end{array}$$

[1]Cette transformation naturelle peut être construite pour n'importe quel foncteur sans supposer qu'il préserve les colimites filtrées et les produit fibrés faibles, on utilise ces hypothèses pour montrer que cette transformation est un isomorphisme.

On en déduit un foncteur analytique :

$$\begin{array}{rcl} F^\circ(A) & = & \Sigma A^n \times F^\circ[n]/\mathfrak{S}_n \\ F^\circ(f) & : & [p,x] \mapsto [f \circ p, x], \quad f : A \to B \end{array}$$

Soit A un ensemble, on définit $\iota_A : F^\circ(A) \to F(A)$ par : Pour tout $n \in \mathbf{\Sigma}(*)$,

$$\begin{array}{rcl} A^n \times F^\circ[n]/\mathfrak{S}_n & \to & F(A) \\ [p,x] & \mapsto & F(p)(x) \end{array}$$

ι_A est bien définie : Soit $(p \circ \sigma^{-1}, F(\sigma)(x))$ un autre représntant de (p,x) où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $F(p \circ \sigma^{-1})(F(\sigma)(x)) = F(\sigma)(x)$.
ι est une transformation naturelle : Pour tout $f : A \to B$ une fonction, on vérifie que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} F^\circ(A) \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "F^\circ(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F^\circ(B) \arrow[r, "\iota_B"] & F(B) \end{tikzcd}$$

Soit $[p,x] \in F^\circ(A)$, on a bien : $F(f \circ p)(x) = F(f)(F(p)(x))$.

Pour tout A, ι_A est *injective* :
Soient $(p,x) \in A^n \times F^\circ[n]$ et $(q,y) \in A^m \times F^\circ[m]$ tels que $F(p)(x) = F(q)(y)$. Par définition de $F^\circ[\,]$, $([n],x)$ et $([m],y)$ sont des WNF. Par (ii) on peut utiliser 1.2.17(iii), p et q sont donc des WNF de A. Par 1.2.14, il existe un isomorphisme u tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} & ([m],y) \arrow[d, "q"] \\ ([n],x) \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[r, "p"'] & (A,a) \end{tikzcd}$$

Donc (p,x) et (q,y) sont dans la même classe d'équivalence dans $A^n \times F^\circ[n]/\mathfrak{S}_n$, ce qui prouve l'injectivité de ι_A.

Pour tout A, ι_A est *surjective.*
Soit $a \in F(A)$. Par (iii) il existe (X,x) tel que $(X,x) \to (A,a)$ est une WNF avec X fini et (X,x) est une WNF. Soient $n = card(X)$ et $u : [n] \xrightarrow{\sim} X$. On pose $x' = F(u^{-1})(x)$. On sait d'après 1.2.15 que $([n],x')$ est une WNF et il existe $([n],x') \xrightarrow{f} (A,a)$. La classe de (f,x') est donc un antécédent de a. $\square$

2.1.2 Son interprétation

Le théorème 2.1.1 s'interprète de la façon suivante :

Proposition 2.1.2. *Pour tout $a \in F(X)$, il existe $w \in W$ tel que $(|w|_F, w)$ est une WNF de $el(F)$ et $(|w|_F, w) \xrightarrow{p} (|a|_F, a)$ est une surjection.*

Ceci signifie que pour toute structure $a \in F(X)$, il existe une autre structure $w \in F(W)$ telle que tous les noms $|w|_F$ n'apparaissent qu'une fois dans w et il existe une substitution p qui égalise certains noms dans w pour obtenir a.

Exemple 2.1.1. On retrouve les isomorphismes :

$$\begin{aligned} C(X) = X^2 &\simeq [2] \times_{\mathfrak{S}_2} X^2 \\ EXP(X) = \sum_n X^n/\mathfrak{S}_n &\simeq \sum_n \{*\} \times_{\mathfrak{S}_n} X^n \end{aligned}$$

2.2 Unicité du développement en série de Taylor

Théorème 2.2.1. *[3] Le développement en série de Taylor d'un foncteur analytique est unique à isomorphisme près. Plus précisément, soit F un foncteur analytique, il existe un isomorphisme entre l'espèce de strucuture $F^\circ[\ ]$ définie dans la preuve de 2.1.1 et l'espèce de structure $F[\ ]$.*

Démonstration. Cet isomorphisme est donné par ϕ :

$$\begin{aligned} F[n] &\mapsto F^\circ[n] \\ a &\mapsto [id_n, a] \end{aligned}$$

Montrons que cette fonction ϕ est bien définie :

Lemme 2.2.2. *Si $a \in F[n]$ alors $(n, [id, a])$ est une WNF.*
D'où $[id, a] \in F^\circ[n]$.

Démonstration du lemme. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (n, [id, a]) \arrow[rr, dashed, "?"] \arrow[dr, "id"'] & & (X, x) \arrow[dl, "f"] \\ & (n, [id, a]) & \end{tikzcd}$$

$x \in F(X) = \sum_n X^n \times F[n]/\mathfrak{S}_n$, il existe m, $p : m \to X$ et $b \in F[m]$ tels que $x = [p, b]$.
f est une fonction de (X, x) sur $(n, [id, a])$ donc

$$[id, a] = F(f)(x) = F(f)([p, b]) = [f \circ p, b].$$

On en déduit que $m = n$ et qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $id = f \circ p \circ \sigma$ et $a = F[\sigma](b)$.
Ainsi, $p \circ \sigma : n \to X$ et $F(p \circ \sigma)([id, a]) = [p \circ \sigma, a] = [p, F[\sigma^{-1}](a)] = [p, b]$.

$$\begin{tikzcd} (n, [id, a]) \arrow[rr, dashed, "g \circ \sigma"] \arrow[dr, "id"'] & & (X, [p, b]) \arrow[dl, "f"] \\ & (n, [id, a]) & \end{tikzcd}$$

On considère à présent le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(n,[id,a]) \arrow[rr, shift left, "k_1"] \arrow[rr, shift right, "k_2"'] \arrow[dr, "id"'] & & (X,[p,b]) \arrow[dl, "f"] \\
& (n,[id,a]) &
\end{tikzcd}$$

Pour $i \in \{1,2\}$, on a $F(k_i)([id,a]) = [k_i, a] = [p,b]$, il existe donc $\sigma_i \in \mathfrak{S}_n$ tel que $b = F[\sigma_i](a)$ et $p = k_i \circ \sigma_i^{-1}$.
Finalement, $k_1 = p \circ \sigma_1 = k_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma$. Ce qui termine la preuve. $\square$

Montrons que ϕ est injective : Soient a et b tels que $[id,a] = [id,b]$. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que : $id = \sigma$ et $b = F[\sigma](a) = a$.

Montrons que ϕ est surjective : Soit $(X,x) \in el(F)$ une WNF. Il existe n, $p : n \to X$ et $b \in F[n]$ tels que $x = [p,b]$. On va montrer que p est une bijection. On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(X,[p,b]) \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "id"'] & & (n,[id,b]) \arrow[dl, "p"] \\
& (X,[p,b]) &
\end{tikzcd}$$

f existe car (X,x) est une WNF.
D'après le lemme précedent, $(n,[id,b])$ est une WNF. Par 1.2.17 et parce que F est analytique, $(n,[id,b]) \xrightarrow{g} (X,[p,b])$ est une WNF de $(X,[p,b])$. Comme $id : (X,[p,b]) \to (X,[p,b])$ est aussi une WNF de $(X,[p,b])$ et par 1.2.14, il existe u un isomorphisme tel que $p \circ u = id$ donc p est lui-même une bijection.
Finalement, $[p,b] = [id, F[p^{-1}](b)]$. Ce qui prouve la surjectivité de ϕ. $\square$

2.3 Opérations classiques sur les foncteurs analytiques

Le but des deux parties qui suivent est d'étudier les opérations qui conservent l'analyticité. La première partie est tirée de [3] et s'appuie sur la caractérisation des foncteurs analytiques. Le théorème d'unicité du développement en série de Taylor permet de calculer l'effet de ces opérations sur les espèces de structure (c'est-à-dire les coefficients de la série). La deuxième partie est consacrée à l'étude de deux opérateurs plus originaux : l'opérateur de *quantification du second ordre* et l'opérateur de *point fixe*. Ces deux constructions servent dans l'élaboration du modèle relationnel du second ordre décrit dans la partie suivante.
Nous commençons par justifier que les opérations suivantes préservent l'analyticité, puis nous donnons les formules pour déduire les espèces de structure.
Ici encore les démonstrations peuvent être passées en première lecture sans que la compréhension en soit affectée.

2.3.1 Somme

Définition 2.3.1. Soient F et G deux foncteurs de **Set** dans **Set**. La somme de ces deux foncteurs est le foncteur :

$$(F+G)(X) = F(X) + G(X)$$

Où $+$ désigne le coproduit (l'union disjointe dans **Set**).

Proposition 2.3.2. *Si F et G sont analytiques, alors $F+G$ l'est aussi.*

Démonstration. • Le foncteur préserve les colimites filtrées. D'après le théorème de Fubini ([6] p.230), les coproduits commutent aux colimites :

$$\begin{aligned}
(F+G)(\operatorname*{colim}_i X_i) &= F(\operatorname*{colim}_i X_i) + G(\operatorname*{colim}_j X_j) \\
&= (\operatorname*{colim}_i F(X_i)) + (\operatorname*{colim}_j G(X_j)) \\
&= \operatorname*{colim}_i \operatorname*{colim}_j (F(X_i) + G(X_j)) \\
&= \operatorname*{colim}_k (F(X_k) + G(X_k))
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que la colimite est filtrée.

• Le foncteur préserve les produits fibrés faibles.
Soit le produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

Comme F et G sont analytiques, $F(W)$ et $G(W)$ sont les produits fibrés faibles respectifs :

$$\begin{tikzcd}
FW \arrow[r] \arrow[d] & FA \arrow[d, "p_F"] \\
FB \arrow[r, "q_F"'] & FC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GW \arrow[r] \arrow[d] & GA \arrow[d, "p_G"] \\
GB \arrow[r, "q_G"'] & GC
\end{tikzcd}$$

On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& FW+GW \arrow[r] \arrow[d] & FA+GA \arrow[d, "p_F+p_G"] \\
& FB+GB \arrow[r, "q_F+q_G"'] & FC+GC
\end{tikzcd}$$

On pose

$$X_F = ((p_F+p_G)\circ f)^{-1}(FC) = f^{-1}(FA)$$
$$X_G = ((p_F+p_G)\circ f)^{-1}(GC) = f^{-1}(GA)$$

On pose de même

$$Y_F = ((q_F + q_G) \circ g)^{-1}(FC) = g^{-1}(FA)$$

$$Y_G = ((q_F + q_G) \circ g)^{-1}(GC) = g^{-1}(GA)$$

Comme $(p_F + p_G) \circ f = (q_F + q_G) \circ g$, on a les égalités $X_F = Y_F$ et $X_G = Y_G$, X_F et X_G forment une partition de X. On obtient les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
X_F \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f_{|X_F}"] \arrow[ddr, bend right, "g_{|X_G}"'] & & \\
& FW \arrow[r] \arrow[d] & FA \arrow[d] \\
& FB \arrow[r] & FC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_G \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "f_{|X_G}"] \arrow[ddr, bend right, "g_{|X_G}"'] & & \\
& GW \arrow[r] \arrow[d] & GA \arrow[d] \\
& GB \arrow[r] & GC
\end{tikzcd}$$

La fonction $h + k : X_F + X_G \to F(W) + G(W)$ permet de montrer que $F(W) + G(W)$ est un produit fibré faible.

□

Proposition 2.3.3. *L'espèce de structure de $F + G$ est donnée par la formule :*

$$(F + G)[n] = F[n] + G[n]$$

Démonstration. On utilise le théorème d'unicité des coefficients du développement en série de Taylor (cf. 2.2.1).

$$\begin{array}{rcll}
(F+G)(X) & = & F(X) + G(X) & \text{par définition} \\
& = & \sum_n F[n] \times X^n/\mathfrak{S}_n) + \sum_n G[n] \times X^n/\mathfrak{S}_n) & F,G \text{ analytiques} \\
& = & \sum_n ((F[n] \times X^n/\mathfrak{S}_n) + (G[n] \times X^n/\mathfrak{S}_n) & \text{Fubini} \\
& = & \sum_n (F+G)[n] \times X^n/\sigma_n & F{+}G \text{ analytique}
\end{array}$$

□

2.3.2 Produit fini

Définition 2.3.4. Soient F et G deux foncteurs de **Set** dans **Set**. Le produit cartésien de ces deux foncteurs est le foncteur :

$$(F \cdot G)(X) = F(X) \times G(X)$$

Proposition 2.3.5. *Si F et G sont analytiques, alors $F \cdot G$ l'est aussi.*

Démonstration. On utilise 2.1.1.

- Le foncteur préserve les colimites filtrées. Comme le produit cartésien admet un adjoint à droite, il commute aux colimites ([6] p.118).

$$\begin{array}{rcl} (F \cdot G)(\underset{i}{colim}\ X_i) & = & F(\underset{i}{colim}\ X_i) \times (\underset{j}{colim}\ X_j) \\ & = & (\underset{i}{colim}\ F(X_i)) \times (\underset{j}{colim}\ G(X_j)) \\ & = & \underset{i}{colim}\ \underset{j}{colim}\ (F(X_i) \times G(X_j)) \\ & = & \underset{k}{colim}\ F(X_k) \times G(X_k) \end{array}$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que la colimite est filtrée.

- Le foncteur préserve les produits fibrés faibles. Soit le produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Comme F et G sont analytiques, $F(W)$ et $G(W)$ sont les produits fibrés faibles respectifs :

$$\begin{tikzcd} FW \arrow[r] \arrow[d] & FA \arrow[d] \\ FB \arrow[r] & FC \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GW \arrow[r] \arrow[d] & GA \arrow[d] \\ GB \arrow[r] & GC \end{tikzcd}$$

On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & & \\ & FW \times GW \arrow[r] \arrow[d] & FA \times GA \arrow[d] \\ & FB \times GB \arrow[r] & FC \times GC \end{tikzcd}$$

Par définition du produit cartésien, si on note f_1 et f_2 les composantes de f, on obtient les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] \arrow[dr, dashed, "h_1"] & & \\ & FW \arrow[r] \arrow[d] & FA \arrow[d] \\ & FB \arrow[r] & FC \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_2"'] \arrow[dr, dashed, "h_2"] & & \\ & GW \arrow[r] \arrow[d] & GA \arrow[d] \\ & GB \arrow[r] & GC \end{tikzcd}$$

La fonction $(h_1, h_2) : X \to F(W) \times G(W)$ permet de montrer que $F(W) \times G(W)$ est un produit fibré faible.

□

Proposition 2.3.6. *L'espèce de structure de $F \cdot G$ est donnée par la formule :*

$$(F \cdot G)[n] = \sum_{p+q=n} F[p] \times G[q]$$

Démonstration. On utilise le théorème d'unicité du développement en série de Taylor 2.2.1.

$$\begin{array}{rcll}
F \cdot G(X) & = & \sum_n F \cdot G[n] \times_{\mathfrak{S}_n} X^n & \\
& = & (\sum_p F[p] \times X^p/\mathfrak{S}_p) \times (\sum_q G[q] \times X^q/\mathfrak{S}_q) & \\
& = & \sum_p \sum_q F[p] \times G[q] \times X^p \times X^q/\mathfrak{S}_p/\mathfrak{S}_q) & \text{Fubini} \\
& = & \sum_n \sum_{p+q=n} F[p] \times G[q] \times X^p \times X^q/\mathfrak{S}_n & (*) \\
& = & \sum_n (\sum_{p+q=n} F[p] \times G[q]) \times X^n/\mathfrak{S}_n &
\end{array}$$

$(*)$ l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $F[p] \times G[q] \times X^p \times X^q$ est la suivante : soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(x, y, f, g) \in F[p] \times G[q] \times X^p \times X^q$, alors $\sigma \cdot (x, y, f, g) = (F[\sigma_{|p}](x), F[\sigma_{|q}](y), f \circ \sigma_{|p}, g \circ \sigma_{|q}$ □

Définition 2.3.7. Soit F un foncteur de **Set** dans **Set**, soit I un ensemble dénombrable. On pose

$$F^I(X) = \mathbf{Set}(I, F(X))$$

Proposition 2.3.8. *Si F est analytique, et I est fini, alors F^I est analytique et son espèce de structure est donnée par la formule :*

$$F^I[n] = \sum_{f \in I^n} \prod_{i \in I} F[f^{-1}(i)]$$

Démonstration. On prouve que F^I est analytique par récurrence sur le cardinal de I. □

2.3.3 Quotient

Définition 2.3.9. On dit qu'un groupe G agit de façon *naturelle* sur un foncteur si l'action $\rho_X : G \times F[X] \to F[X]$ (de G sur $F(X)$) est naturelle en X c'est-à-dire que pour tout $f : X \to Y$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
G \times F(X) \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "1_G \times F(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
G \times F(Y) \arrow[r, "\rho_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.1. Il revient au même de supposer que F est un foncteur de **Set** dans $\mathbf{G} - \mathbf{Set}$, où $\mathbf{G} - \mathbf{Set}$ est la catégorie des ensembles munis d'une action du groupe G et des fonctions qui respectent cette action de groupe.

On peut alors définir le foncteur quotient :

Définition 2.3.10. Soit $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ un foncteur, soit G un groupe qui agit sur chacun des $F(X)$ de façon naturelle pour $X \in \mathbf{Set}$. On définit le foncteur $F/G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ par :

$$F/G(X) = F(X)/G$$
$$\forall x \in X,\ F/G(f)(x) = F(f)(x)/G$$

Démonstration. On vérifie que $F/G(f)$ est bien définie :
Soient $g \in G$, $x \in F(X)$ et $f : X \to Y$, le diagramme de naturalité de l'action de groupe assure : $F(f)(g \cdot x) = g \cdot F(f)(x)$. Ainsi, deux éléments d'une même orbite sont envoyés sur la même orbite par $F(f)$. ☐

Proposition 2.3.11. *Si F est analytique et si l'action de G sur F est naturelle, alors F/G est analytique.*

Démonstration. • Le foncteur préserve les colimites filtrées.
Il nous suffit de montrer que $(colim\ F(X_i))/G$ est solution du même problème universel que $colim(F(X_i)/G)$:

$$\begin{tikzcd}
F(X_i)/G \arrow[dd, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\iota_i"] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
& (colim\ F(X_i))/G \arrow[r, dashed, "g"] & Y \\
F(X_j)/G \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si g existe, elle doit vérifier : $\forall i \in \mathcal{I},\ \forall \alpha \in F(X_i)/G,\ g(\iota_i \alpha) = f_i(\alpha)$.
On montre maintenant qu'une telle fonction existe. Soient une orbite $\omega \in (colim\ F(X_i))/G$ et $x \in colim\ F(X_i)$ un représentant de ω. Alors, il existe i et $a \in F(X_i)$ tels que si on note α l'orbite de a par l'action de G alors $\omega = \iota_i(\alpha)$.
De plus, si $\beta \in F(X_j)$ est tel que $\omega = \iota_i(\beta)$, alors comme la colimite est filtrée, il existe k tel que $\gamma = \phi_{ik}(\alpha) = \phi_{jk}(\beta)$. Donc $f_i(\alpha) = f_k(\gamma) = f_j(\beta)$.
On a donc montré l'existence et l'unicité de g.

• Le foncteur préserve les produits fibrés faibles.
On considère le produit fibré faible W :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Comme F est analytique, FW est un produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd}
FW \arrow[r, "F\psi"] \arrow[d, "F\phi"'] & FA \arrow[d, "F(f)"] \\
FB \arrow[r, "F(g)"'] & FC
\end{tikzcd}$$

Comme l'action de G sur F est naturelle, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
FW/G \arrow[r, "F/G(\psi)"] \arrow[d, "F/G(\phi)"'] & FA/G \arrow[d, "F/G(f)"] \\
FB/G \arrow[r, "F/G(g)"'] & FC/G
\end{tikzcd}$$

On veut vérifier que FW/G est un produit fibré faible. Dans le diagramme commutatif suivant, montrons l'existence de h tel que :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrd, bend left, "p"] \arrow[rd, dashed, "h"] \arrow[rdd, bend right, "q"'] & & \\
& FW/G \arrow[r, "F/G(\psi)"'] \arrow[d, "F/G(\phi)"] & FA/G \arrow[d, "F/G(f)"] \\
& FB/G \arrow[r, "F/G(g)"'] & FC/G
\end{tikzcd}$$

Soit $\omega \in X$. On pose $\alpha = p(\omega)$ et $\beta = q(\omega)$ et $\gamma = F/G(f)(\alpha) = F/G(g)(\beta)$. Soit $c \in \gamma$. Il existe $b \in \beta$ et $a \in \alpha$ tels que $c = F(f)(a) = F(g)(b)$. Comme FW est un produit fibré faible, il existe $y \in FW$ tel que si μ est l'orbite de y sous l'action de G, alors $\alpha = F/G(\pi)(\mu)$ et $\beta = F/G(\psi)(\mu)$. On remarque que μ ne dépend pas du choix de a et b. On définit $h(\omega) = \mu$.

$\square$

Proposition 2.3.12. *Si F est analytique et si G agit naturellement sur F, alors l'espèce de structure qui détermine F/G est donnée par la formule :*

$$F/G[n] = F[n]/G$$

Démonstration. On va utiliser le théorème fondamental 2.1.1 et montrer que : $F[n]/G$ est l'ensemble $\{\omega \in F/G(n) \mid (n,\omega)WNF\}$. Pour cela on va montrer : (n,x) est une WNF de F si et seulement si (n,ω) est une WNF de F/G où ω est l'orbite de x pour l'action de groupe de G.
On utilise l'équivalence WNF-générique. On suppose (n,x) générique. On considère $(n,\omega) \xrightarrow{f} (m,\alpha)$ et $(o,\beta) \xrightarrow{g} (m,\alpha)$ dans $el(F/G)$.
On remarque qu'il existe a et b tels que dans $el(F)$:

$$\begin{tikzcd}
& (o,b) \arrow[d, "g"] \\
(n,x) \arrow[ru, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & (m,a)
\end{tikzcd}$$

et α et β sont les orbites respectives de a et b.
On vérifie que $(n,\omega) \xrightarrow{h} (o,\beta)$ dans $el(F/G)$.

Réciproquement, on suppose que (n,ω) est une WNF. Soient $x \in \omega$ et $(n,x) \xrightarrow{f} (m,a)$ et $(o,b) \xrightarrow{g} (m,a)$. Comme l'action de G est naturelle, on peut passer ces fonctions au quotient :

$$\begin{tikzcd} & (o,\beta) \arrow[d, "g"] \\ (n,\omega) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & (m,\alpha) \end{tikzcd}$$

où α et β sont les orbites respectives de a et b. Il existe $g \in G$ tel que $b = g \cdot F(h)(x)$. On pose $h' = g \cdot h$, alors h' fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & (o,b) \arrow[d, "g"] \\ (n,x) \arrow[ur, dashed, "h'"] \arrow[r, "f"'] & (m,a) \end{tikzcd}$$

□

2.3.4 Colimite filtrée

Proposition 2.3.13. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille filtrée de foncteurs analytiques (i.e : I est un ensemble filtré : $\forall i, i' \in J,\ \exists k \in I\ \exists i \to k,\ i' \to k$ et $\forall i, j,\ i \rightrightarrows j,\ \exists k\ \exists i \rightrightarrows j \to k$). Alors, colim$(F_i)$ est analytique.*

Démonstration. • Le foncteur préserve les colimites filtrées.
Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille filtrée de foncteurs analytiques et $(X_k)_{k\in K}$ une famille filtrée d'ensembles.

$$\begin{aligned} \underset{i\in I}{colim}\ F_i(\underset{k\in K}{colim}\ X_k) &= \underset{\substack{F_i \text{ analytique.}}}{\underset{i\in I}{colim}\ \underset{k\in K}{colim}\ F_i(X_k)} \\ &= \underset{\text{Fubini}}{\underset{k\in K}{colim}\ \underset{i\in I}{colim}\ F_i(X_k)} \end{aligned}$$

• Le foncteur préserve les produits fibrés faibles.
Soit le produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Comme chacun des F_i est analytique, F_iW est un produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd} F_iW \arrow[r] \arrow[d] & F_iA \arrow[d] \\ F_iB \arrow[r] & F_iC \end{tikzcd}$$

Soit P_i le produit fibré fort dans **Set**. Il existe pour chaque i une fonction h_i surjective qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F_iW \arrow[dr, "h_i"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P_i \arrow[r] \arrow[d] & F_iA \arrow[d] \\
& F_iB \arrow[r] & F_iC
\end{tikzcd}$$

On sait d'après [6] que dans **Set**, les colimites et produits fibrés forts commutent, ainsi $\underset{i}{colim}\ P_i$ est le produit fibré de :

$$\begin{tikzcd}
\underset{i}{colim}\ P_i \arrow[r] \arrow[d] & \underset{i}{colim}\ F_iA \arrow[d] \\
\underset{i}{colim}\ F_iB \arrow[r] & \underset{i}{colim}\ F_iC
\end{tikzcd}$$

De plus, pour tout i, h_i est surjective donc la fonction $\underset{i}{colim}\ (h_i) : \underset{i}{colim}\ F_iW \rightarrow \underset{i}{colim}\ P_i$ est surjective et fait commuter le diagramme suivant. Donc $colim\ F_iW$ est un produit fibré faible.

$$\begin{tikzcd}
\underset{i}{colim}\ F_iW \arrow[dr, "\underset{i}{colim}\ h_i"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \underset{i}{colim}\ P_i \arrow[r] \arrow[d] & \underset{i}{colim}\ F_iA \arrow[d] \\
& \underset{i}{colim}\ F_iB \arrow[r] & \underset{i}{colim}\ F_iC
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposition 2.3.14. *L'espèce de structure du foncteur colimite est donnée par la formule :*

$$(\underset{i\in I}{colim} F_i)[n] = \underset{i\in I}{colim}(F_i[n])$$

Démonstration. On utilise le théorème d'unicité du développement en série de

Taylor :

$$\begin{aligned}
colim(F_i(X)) &= \sum_n (colim\ F_i)[n] \times_{\mathfrak{S}_n} X^n \\
&= colim\ \sum_n F_i[n] \times X^n/\mathfrak{S}_n \\
&= \sum_n colim\ (F_i[n] \times X^n/\mathfrak{S}_n) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_n (colim\ F_i[n] \times X^n)/\mathfrak{S}_n \\
&\overset{\text{cf. 2.3.3}}{=} \sum_n (colim\ F_i[n]) \times X^n/\mathfrak{S}_n
\end{aligned}$$

□

2.3.5 La composition

Définition 2.3.15. Soient F et G deux foncteurs de **Set** dans **Set**. Le foncteur composé est défini par : $F \circ G(X) = F(G(X))$.

Proposition 2.3.16. *Si F et G sont analytiques, alors $F \circ G$ est aussi analytique.*

Démonstration. • Le foncteur préserve les colimites filtrées.

Comme F et G sont analytiques, ils préservent les colimites filtrées :

$$\begin{aligned}
F \circ G(\underset{i}{colim}\ X_i) &= F(G(\underset{i}{colim}\ X_i)) \\
&= F(\underset{i}{colim}\ G(X_i)) \\
&= \underset{i}{colim}\ F(G(X_i)) \\
&= \underset{i}{colim}\ F \circ G(X_i)
\end{aligned}$$

• Le foncteur préserve les produits fibrés faibles.

Soit le produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

Comme G est analytique, $G(W)$ est un produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd}
GW \arrow[r] \arrow[d] & GA \arrow[d] \\
GB \arrow[r] & GC
\end{tikzcd}$$

Comme F est analytique, $F \circ G(W)$ est un produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd}
F \circ G\ W \arrow[r] \arrow[d] & F \circ G\ A \arrow[d] \\
F \circ G\ B \arrow[r] & F \circ G\ C
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposition 2.3.17. *L'espèce de structure de $F \circ G$ est donnée par la formule :*

$$F \circ G[n] = \sum_p F[p] \times_{\mathfrak{S}_p} \sum_{f:n \to p} \prod_{i=1}^{p} G[f^{-1}(i)]$$

Démonstration. On utilise le théorème d'uncité du développement en série de Taylor (cf. proposition2.2.1).

$$\begin{array}{rcl} F \circ G(X) & = & \sum_n F \circ G[n] \times_{\mathfrak{S}_n} X^n \\ & = & F(G(X)) \\ & = & \sum_p F[p] \times G(X)^p / \mathfrak{S}_p \text{ proposition 2.3.8} \\ & = & \sum_p F[p] \times \sum_n G^p[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n \\ & = & \sum_n (\sum_p F[p] \times_{\mathfrak{S}_p} G^p[n]) \times_{\mathfrak{S}_n} X^n \end{array}$$

Pour conclure, on rappelle que $G^p[n] = \sum_{f \in \{1,\dots,p\}^n} \prod_{i \in \{1,\dots,p\}} F[f^{-1}(i)]$ $\square$

2.4 Opérations spécifiques à notre étude

2.4.1 Le second ordre

L'opération que l'on va construire dans ce chapitre est un cas particulier de l'opération de quotientage définie dans la section précédente. On se donne un foncteur $F : \mathbf{Set}^{d+1} \to \mathbf{Set}$ analytique et qui préserve les inclusions. La quantification du second ordre par rapport à la dernière variable agit comme un lieur. Pour exprimer cette liaison, on va utiliser un ensemble infini dénombrable (par exemple $\mathbf{I}$) dans lequel évoluera le nom de cette variable liée et on va faire agir le groupe des permutations via le foncteur sur la structure des éléments. On obtient alors la classe des représentants d'un élément modulo α-conversion.

Définitions du foncteur second ordre $\mathcal{T}F$

On se donne $\mathcal{I}$ un ensemble infini dénombrable.

Définition 2.4.1. Soit un foncteur $F : \mathbf{Set}^{d+1} \to \mathbf{Set}$. $\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ agit sur $F(\vec{X}, \mathcal{I})$ de façon naturelle : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}},\ \sigma \cdot a = F(\vec{X}, \sigma)(a)$.
On appelle foncteur second ordre de F et on note $\mathcal{T}F : \mathbf{Set}^d \to \mathbf{Set}$ le foncteur :

$$\forall \vec{X} \in ob(\mathbf{C}),\ \mathcal{T}F(X_1, \dots, X_d) = \ F(\vec{X}, \mathcal{I})/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathcal{T}F(\vec{X})$ et $\vec{f} : \vec{X} \to \vec{Y}$, alors $\forall a \in \alpha$,

$$\alpha = (a)^F_{\mathcal{I}} = \{F(\vec{X}, \sigma)(a) \ \mid \ \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}\}$$

On définit alors l'action de $\mathcal{T}(F)$ sur les morphismes comme suit :

$$\forall \vec{f} \in \mathbf{Set}^d(\vec{X}, \vec{Y}),\ \mathcal{T}F(\vec{f})(\alpha) = (F(\vec{f}, a))^F_{\mathcal{I}} = \{F(\vec{f}, \sigma)(a) \ \mid \ \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}\}$$

Remarque 2.2. Si $(a)^F_{\vec{\mathcal{I}}} = F(\vec{f}, \mathcal{I})(\beta)$, alors il existe $b \in \beta$ tel que $F(\vec{f}, \mathcal{I})(b) = a$.

Proposition 2.4.2. *Soit F un foncteur analytique sur* $\mathbf{Set}^{d+1}$ *qui préserve les inclusion, alors $\mathcal{T}F$ est analytique et préserve les inclusions.*

Démonstration. F est analytique, on peut donc écrire :

$$\mathcal{T}F(X) = \langle \sum_n \sum_k [F[n,k] \times \mathcal{I}^k \times X^n]/\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \rangle / \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

$\mathfrak{S}_I$ commute aux coproduits $\sum_n \sum_k$, en effet $\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ préserve les classes pour k et n donnés.

$$\mathcal{T}F(X) = \sum_n \sum_k \langle [F[n,k] \times \mathcal{I}^k \times X^n]/\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \rangle / \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

Les actions respectives des deux groupes $\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ et $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k$ sont indépendantes. On peut donc interchanger les quotients.

$$\mathcal{T}F(X) = \sum_n \sum_k [F[n,k] \times \mathcal{I}^k \times X^n]/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}/\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k$$

Comme $\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ et $\mathfrak{S}_k$ n'agissent que sur certaines des composantes du produit cartésien, on a :

$$\mathcal{T}F(X) = \sum_n [\sum_k F[n,k] \times \langle \mathcal{I}^k/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}} \rangle / \mathfrak{S}_k] \times X^n/\mathfrak{S}_n$$

Donc $\mathcal{T}F$ est analytique.
On doit maintenant vérifier que ce foncteur préserve les inclusions : Soit $A \subset B$, $\forall \alpha \in \mathcal{T}F(A),\ \forall a \in \alpha,\ a \in F(A, \mathcal{I}) \subset F(B, \mathcal{I})$, donc $\alpha = (a)^F_{\vec{\mathcal{I}}} \in \mathcal{T}F(B)$. □

Remarque 2.3. D'après l'unicité du développement en série de Taylor, on sait que l'espèce de structure des WNF de $\mathcal{T}F$ est isomorphe à $F[n,k] \times \langle \mathcal{I}^k/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}} \rangle / \mathfrak{S}_k$. Dans les paragraphes suivants, on va essayer de retrouver ce résultat à la main pour expliciter cette bijection.

Les supports dans $el(\mathcal{T}F)$

On cherche à présent l'expression du support de $\alpha \in \mathcal{T}F(X)$ en fonction du support d'un de ses représentants.

Proposition 2.4.3. $\forall \vec{X} \in ob(\mathbf{C}),\ \forall \alpha \in \mathcal{T}F(\vec{X}),\ \forall a \in \alpha,\ a \in F(\vec{X}, \mathcal{I}),$

$$|\alpha|_{\mathcal{T}F} = (|a|_{F_1}, \ldots, |a|_{F_d})$$

Démonstration.

Lemme 2.4.4. *Soit $(\vec{n}, k)$ le support de a dans $el(F)$. Alors $\vec{n}$ est le support de $(a)^F_{\vec{\mathcal{I}}}$ dans $el(\mathcal{T}F)$.*

Démonstration. D'après 1.2.8, il suffit de montrer que $(\vec{n}, (a)^F_{\vec{\mathcal{I}}})$ est minimal.

Soit $(\vec{m}, \beta) \xrightarrow{\vec{s}} (\vec{n}, (a)^F_{\vec{\mathcal{I}}})$. Montrons que $\vec{s}$ est surjective.

Soit $b \in \beta$ tel que $a = F(\vec{s}, id_{\mathcal{I}})(b) : (\vec{m}, \mathcal{I}, b) \xrightarrow{(\vec{s}, id_{\mathcal{I}})} (\vec{n}, \mathcal{I}, a)$.
D'après le lemme 1.2.10, si $(\vec{m}_b, k_b)$ est le support de b, si on note $\vec{n}_a = \vec{s}(\vec{m}_b)$ et $k_a = id_b(k_b) = k_b$, alors $(\vec{m}_b, k_b, b) \xrightarrow{\vec{s}_b, id_b} (\vec{n}_a, k_a, a)$ et $(\vec{n}_a, k_a)$ est le support de a. On en déduit que $\vec{n}_a = \vec{n}$. □

□

Proposition 2.4.5. *Réciproquement, soit $\vec{n}$ le support de α, alors pour tout $a \in \alpha$, il existe $k_a \subseteq \mathcal{I}$ tel que $(\vec{n}, k_a)$ est le support de a. De plus, k_a est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit $a \in \alpha$, alors $(a)^F_{\vec{\mathcal{I}}} = \alpha$. $a \in F(\vec{n}, \mathcal{I})$. Soit $(\vec{n}_a, k_a) \subseteq (\vec{n}, \mathcal{I})$ le support de a dans $el(F)$. D'après le lemme 2.4.4, $\vec{n}_a$ est le support de α, donc $\vec{n} = \vec{n}_a$ et $(\vec{n}, k_a)$ est le support de a. Soit $a' \in \alpha$. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ telle que $(\vec{n}, \mathcal{I}, a') \xrightarrow{(id,\sigma)} (\vec{n}, \mathcal{I}, a)$ dans $el(F)$.
On vient de montrer l'existence de $k_{a'}$ tel que $(\vec{n}, k_{a'}, a')$ est minimal. On note $k' = \sigma(k_{a'})$, on remarque que k' et $k_{a'}$ sont en bijection. D'après le lemme 1.2.10 $(\vec{n}, k_{a'}, a') \xrightarrow{\sigma_{k_{a'}}} (\vec{n}, k', a)$ où $(\vec{n}, k', a)$ est minimal. D'après la proposition 1.2.8, $k' = k_a$. Finalement, il existe une bijection entre k_a et $k_{a'}$. □

Les WNF dans $el(\mathcal{T}F)$

On a déjà vu que l'opérateur $\mathcal{T}$ préserve l'analyticité. On va maintenant exprimer l'isomorphisme entre WNF et la formule trouvée précédemment en 2.4.2.

Proposition 2.4.6. *Soit F un foncteur analytique sur $\mathbf{Set}^{d+1}$. Alors $\mathcal{T}F$ est analytique et l'espèce de structure associée des WNF $\mathcal{T}F[\vec{n}]$ est isomorphe à :*

$$\sum_k F[\vec{n}, k] \times_{\mathfrak{S}_k} (\mathcal{I}^k/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}) = \sum_k F[\vec{n}, k] \times_{\mathfrak{S}_k} Part(1, \ldots, k)$$

où $Part(1, \ldots, k)$ est l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$.

Dans le lemme suivant, on identifie une partition à un renommage qui égalise les noms dans chacun des ensembles qui forment cette partition.

Lemme 2.4.7.

$$Part(1, \ldots, k) \simeq \mathcal{I}^k/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

Démonstration. On considère la fonction $\phi : \mathcal{I}^k \to Part\{1, \ldots, k\}$ qui à toute fonction $p : k \to \mathcal{I}$ associe la partition de $\{1, \ldots, k\}$ formée par les orbites de la relation d'équivalence : $x \sim_p y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$.
ϕ est surjective. Soit $w = \{w_1, \ldots, w_j\}$ une partition de $\{1, \ldots, k\}$. On pose $\forall x \in \{1, \ldots, k\},\ p(x) = l$ tel que $x \in w_l$ alors $\phi(p) = w$. Soient $p \in \mathcal{I}^k$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$. Alors $\phi(p) = \phi(\sigma \circ p)$. En effet, σ est une bijection donc $\forall x, y \in \{1, \ldots, k\}$, $p(x) = p(y) \Leftrightarrow \sigma \circ p(x) = \sigma \circ p(y)$, ainsi les partitions déterminées par $\sim_p$ et $\sim_{\sigma \circ p}$ sont identiques. La fonction mbox$\phi_{\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}} : \mathcal{I}^k/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}} \to Part\{1, \ldots, k\}$ est donc bien définie.

$\phi_{\mathfrak{S}_\mathcal{I}}$ est surjective car ϕ l'est.
$\phi_{\mathfrak{S}_\mathcal{I}}$ est injective. En effet, soient $p, q \in \mathcal{I}^k$ telles que $\phi(p) = \phi(q)$. Alors $\forall x, y \in \{1, \dots, k\},\ p(x) = p(y) \Leftrightarrow q(x) = q(y)$. On définit $\sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ par $\forall x \in \{1, \dots, k\},\ \sigma(p(x)) = q(x)$ et $\forall y \notin p(\{1, \dots, k\}),\ \sigma(y) = y$. □

Il nous faut expliciter le lien entre les WNF de F, les partitions des ensembles finis et les WNF de $\mathcal{T}F$.
Le lemme suivant exprime le fait que si l'on prend une WNF de $el(F)$ et si on égalise (par p) des noms dans la dernière variable, on obtient une WNF dans $el(\mathcal{T}F)$.

Lemme 2.4.8. *Soient $(\vec{n}, k', a') \in el(F)$ une WNF de F et $p : k' \in k$. On pose $a = F(id, p)(a')$ et $k = p(k')$ (alors $(\vec{n}, k)$ est le support de a cf. lemme 1.2.10). Si $\alpha = (a)^F_{\mathcal{I}}$, alors $(\vec{n}, \alpha)$ est une WNF de $\mathcal{T}F$.*

Démonstration. Pour montrer que $(\vec{n}, \alpha)$ est une WNF, on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & (\vec{o}, \gamma) \arrow[d, "\vec{g}"] \\ (\vec{n}, \alpha) \arrow[r, "\vec{f}"'] & (\vec{m}, \beta) \end{tikzcd}$$

On choisit $b \in \beta$ puis $c \in \gamma$ tels que l'on ait le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & (\vec{o}, \mathcal{I}, c) \arrow[d, "(\vec{g}, id)"] \\ (\vec{n}, \mathcal{I}, a) \arrow[r, "(\vec{f}, id)"'] & (\vec{m}, \mathcal{I}, b) \end{tikzcd}$$

D'après 1.2.10 on a le diagramme suivant dans $el(F)$:

$$\begin{tikzcd} & (\overrightarrow{|c|}_F, c) \arrow[d, "(\vec{g}, id)"] \\ (\vec{n}, k, a) \arrow[r, "(\vec{f}, id)"'] & (\overrightarrow{|b|}_F, b) \end{tikzcd}$$

Comme $(\vec{n}, k', a')$ est une WNF, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & (\overrightarrow{|c|}_F, c) \arrow[d, "(\vec{g}, id)"] \\ (\vec{n}, k', a') \arrow[r, "(\vec{id}, p)"'] \arrow[rru, dashed, "(\vec{h}, q)"] & (\vec{n}, k, a) \arrow[r, "(\vec{f}, id)"'] & (\overrightarrow{|b|}_F, b) \end{tikzcd}$$

avec $\vec{f} = \vec{g} \circ \vec{h}$ et $q = p$. Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & (\overrightarrow{|c|}_F, c) \arrow[d, "(\vec{g},id)"] \\ (\vec{n}, k, a) \arrow[ur, dashed, "(\vec{h},id)"] \arrow[r, "(\vec{f},id)"'] & (\overrightarrow{|b|}_F, b) \end{tikzcd}$$

En passant au quotient, on obtient :

$$\begin{tikzcd} & (\vec{o}, \gamma) \arrow[d, "\vec{g}"] \\ (\vec{n}, \alpha) \arrow[ur, dashed, "\vec{h}"] \arrow[r, "\vec{f}"'] & (\vec{m}, \beta) \end{tikzcd}$$

D'après 1.2.21, $(\vec{n}, \alpha)$ est une WNF de $el(\mathcal{T}F)$. $\square$

Lemme 2.4.9. *Réciproquement, si $(\vec{n}, \alpha)$ est une WNF de $\mathcal{T}F$, pour tout $a \in \alpha$, pour tout $(\vec{n'}, k', w) \overset{(\vec{f},p)}{\to} (\vec{n}, k, a)$ WNF dans $el(F)$ (avec $k = p(k')$) et si $a_0 = F(\vec{f}, id)(w)$, alors*

$$\alpha = (F(\overrightarrow{id}, p)(a_0))^F_{\mathcal{I}} \quad \textit{et} \quad (\vec{n}, k', a_0) \textit{ est une WNF de } el(F)$$

Démonstration. $\alpha = (a)^F_{\mathcal{I}} = (F(\vec{f}, p)(w))^F_{\mathcal{I}} = (F(\overrightarrow{id}, p)(F(\vec{f}, id)(a)))^F_{\mathcal{I}} = (F(\overrightarrow{id}, p))^F_{\mathcal{I}}$.
On pose $a' = F(id, p)(w)$. D'après le lemme 2.4.8, $(\vec{n'}, (a')^F_{\mathcal{I}})$ est une WNF. De plus, en passant au quotient $(\vec{n'}, k, a') \overset{(\vec{f},id)}{\to} (\vec{n}, k, a)$ dans $el(F)$, on obtient une application entre deux WNF : $(\vec{n'}, (a')^F_{\mathcal{I}}) \overset{\vec{f}}{\to} (\vec{n}, \alpha)$ dans $el(\mathcal{T}F)$. $\vec{f}$ est un isomorphisme d'après 1.2.16. On en déduit que l'isomorphime $(\vec{f}, id)$ transforme la WNF $(\vec{n'}, k', w)$ en la WNF $(\vec{n}, k', a_0)$. $\square$

Lemme 2.4.10. *Soient $(\vec{n}, k, a) \in el(\mathcal{T}F)$, $p : k \to \mathcal{I}$, $\tau \in \mathfrak{S}_k$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$.*

$$(F(\overrightarrow{id}, p)(a))^F_{\mathcal{I}} = (F(\overrightarrow{id}F, p \circ \tau{-}1)(F(\overrightarrow{id}, \tau)(a)))^F_{\mathcal{I}} (F(\overrightarrow{id}, \sigma \circ p)(a))^F_{\mathcal{I}}.$$

Démonstration.

$$(F(\overrightarrow{id}, p)(a))^F_{\mathcal{I}} = \{F(\overrightarrow{id}, \sigma' \circ p)(a) \mid \sigma' \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}\} = (F(\overrightarrow{id}, \sigma \circ p)(a))^F_{\mathcal{I}}$$

$$(F(\overrightarrow{id}, p)(a))^F_{\mathcal{I}} = (F(\overrightarrow{id}, p \circ \tau \circ \tau^{-1})(a))^F_{\mathcal{I}} = (F(\overrightarrow{id}, p \circ \tau^{-1})(F(\overrightarrow{id}, \tau)(a)))^F_{\mathcal{I}}$$

$\square$

Lemme 2.4.11. *Soient (n, k, a), (n', k', a') des WNF de $el(F)$ et $p : k \to \mathcal{I}$, $p' : k' \to \mathcal{I}$ tels que*

$$(F(id, p)(a))^F_{\mathcal{I}} = (F(id, p')(a'))^F_{\mathcal{I}}.$$

Alors, il existe un isomorphisme $u : (|a|_F, a) \to (|a'|_F, a')$ dans $el(F)$ et $\sigma \in \mathcal{I}$ tels que $p = \sigma \circ p' \circ u$.
Ainsi, on a l'égalité entre les partitions $w_p = w_{p' \circ u}$ (cf. lemme 2.4.7).

Démonstration. Comme $(F(id,p)(a))^F_{\vec{\mathcal{I}}} = (F(id,p')(a'))^F_{\vec{\mathcal{I}}}$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ telle que $F(id,p)(a) = F(id, \sigma \circ p')(a')$. On note c cette valeur commune. D'après 1.2.22 et 1.2.10, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\vec{n}, k, a) \arrow[r, "(\vec{id},p)"] \arrow[dr, dashed, "u"'] & (|c|_F, c) \\
& (\vec{n'}, k', a') \arrow[u, "(\vec{id},\sigma\circ p')"']
\end{tikzcd}$$

L'existence de l'isomorphisme u est justifiée par la définition 1.2.11 et 1.2.16, ainsi
$$p = \sigma \circ p' \circ u.$$
□

Démonstration de la proposition 2.4.6. On définit l'application :

$$\begin{array}{rcccccc}
\phi : & \sum_k F[\vec{n}, k] & \times_{\mathfrak{S}_k} & (\mathcal{I}^k / \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}) & \to & \mathcal{T}F(\vec{n}) \\
& [a & , & w_p] & \mapsto & (F(id,p)(a))^F_{\vec{\mathcal{I}}}
\end{array}$$

Elle est bien définie (cf. 2.4.10).
Elle est bien à valeurs dans $\mathcal{T}F[\vec{n}]$ (cf. 2.4.8). Elle est surjective par 2.4.9 et la caractérisation 3. des foncteurs analytiques 2.1.1. Elle est injective (cf. 2.4.11).
□

Exemples

Les deux premiers exemples n'ont qu'une seule variable, l'opérateur $\mathcal{T}$ les transforme en foncteur constant.

Exemple 2.4.1. Comme seule l'espèce de structure d'ordre 2 est non vide, on a :
$$\mathcal{T}C = C[2] \times_{\mathfrak{S}_2} Part\{1,2\}$$
$$C[2] = \{(a,b) \in [2]^2 | (2,a,b) \text{ WNF}\} = \{(1,2),(2,1)\}$$
$$Part\{1,2\} = \{[\{1\},\{2\}],[\{1,2\}]\}$$

Soient $a \neq b \in \mathcal{I}$

$$\begin{array}{rccc}
p_{a,b} : & [2] & \to & \mathcal{I} \\
& 1 & \mapsto & a \\
& 2 & \mapsto & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
p_{a,a} : & [2] & \to & \mathcal{I} \\
& 1 & \mapsto & a \\
& 2 & \mapsto & a
\end{array}$$

Les partitions qui correspondent à ces deux fonctions sont : $w_{p_{a,b}} = \{[\{1\},\{2\}]\}$ et $w_{p_a} = [\{1,2\}]$. En effet cette première fonction correspond à l'identité, alors

que cette deuxième fonction identifie les deux éléments (elle les met dans le même paquet). $\mathfrak{S}_2$ égalise les deux éléments de C mais laisse inchangées les deux partitions dans $Part\{1,2\}$.
Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}C & = & C[2] \times_{\mathfrak{S}_2} \mathcal{I}^2/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}} \\ & = & \{(1,2),(2,1)\} \times_{\mathfrak{S}_2} \{\bar{p}_{a,b}, \bar{p}_a\} \\ & = & \{\bar{p}_{a,b}, \bar{p}_a\}/\mathfrak{S}_2 \\ & \sim & \{\{(a,b)|\ a,b \in \mathcal{I},\ a \neq b\},\ \{(a,a)|a \in \mathcal{I}\}\} \end{array}$$

On retrouve l'isomorphisme avec

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}C & = & \{\{\sigma \cdot (a,b)|\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}\}|(a,b) \in \mathcal{I}^2\} \\ & = & \{\{(a,b)|\ a,b \in \mathcal{I},\ a \neq b\},\ \{(a,a)|a \in \mathcal{I}\}\} \end{array}$$

Exemple 2.4.2.

$$\mathcal{T}EXP = \sum_n EXP[n] \times Part\{1,\ldots,n\}/\mathfrak{S}_n$$

$EXP[n] = \{\{1,\ldots,n\}\} \simeq \{*\}$. D'où

$$\mathcal{T}EXP = \sum_n Part\{1,\ldots,n\}/\mathfrak{S}_n$$

2.4.2 Le point fixe

L'opérateur de point fixe va nous permettre de construire des structures récursives comme les listes ou les arbres. On construit celui-ci en appliquant les opérations de composition et de colimite filtrée.

Définition 2.4.12. Soit F un foncteur analytique de deux variables. On note $\mathcal{F}F$ le plus petit point fixe de F. Pour le définir, on pose :

$$\forall X,\ \forall f \in \mathbf{Set}(X,Y),\quad \begin{array}{rcl} F_0(X) & = & \emptyset \\ F_{n+1}(X) & = & F(X, F_n(X)) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_0(f) & = & \emptyset \\ F_{n+1}(f) & = & F(f, F_n(f)) \end{array}$$

Comme pour tout X, on a l'inclusion $\iota_0 : \emptyset \xrightarrow{\subset} F_1(X)$
et pour tout n, l'injection $\iota_n : F_n(X) \xrightarrow{F(X,\iota_{n-1})} F_{n+1}(X)$,
la famille $F_n(X)$ est une famille filtrée.
On définit alors :

$$\mathcal{F}F(X) = colim\ F_n(X) = \cup F_n(X)$$

$$\mathcal{F}F(f) = colim\ F_n(f) = \cup F_n(f)$$

où la colimite d'une telle famille de fonctions est définie par l'unique fonction faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F_n(X) \arrow[r] \arrow[dr, "F_n(f)"] & F_n(Y) \arrow[dr, bend left] & \\
& colim\ F_n(X) \arrow[r, dashed, "colim\ F_n(f)"] & colim\ F_n(Y) \\
F_m(X) \arrow[r] \arrow[ur, "F_m(f)"] & F_m(Y) \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.4.13. *Si F est un foncteur analytique de deux variables, alors $\mathcal{F}F$ est aussi un foncteur analytique.*

Démonstration. On applique les opérations de colimite 1.1.3 et de composition 2.3.5. $\square$

Exemple 2.4.3. On definit le foncteur : $F_l(X, Y) = 1 + X \times Y$. Il est bien analytique (cf. 2.3.1 et 2.3.2).
On peut alors prendre son point fixe pour définir le foncteur liste :

$$LIST = \mathcal{F}F_l$$

En effet,

$$\begin{array}{rcll}
F_{l,0}(X) & = & \emptyset & \text{liste vide} \\
F_{l,1}(X) & = & 1 + X & \text{Ensemble de la liste vide et des listes à un élément} \\
F_{l,2}(X) & = & 1 + X + X^2 & \text{Ensemble des listes d'au plus deux éléments} \\
F_{l,n}(X) & = & 1 + X + \cdots + X^n & \text{Ensemble des listes d'au plus n éléments} \\
\mathcal{T}F_l & = & \sum_n X^n & \text{Ensembles des listes d'éléments de } X
\end{array}$$

Les WNF dans $el(\mathcal{F}F)$

On cherche à exprimer les WNF de $\mathcal{F}F$ en fonction de celles de F.

Proposition 2.4.14. *Soit $F : \mathbf{Set^2} \to \mathbf{Set}$ un foncteur analytique. L'espèce de structure associée au foncteur analytique $\mathcal{F}F$ est donnée par les formules :*

$$\forall r,\ \mathcal{F}F[r] = \bigcup_p F_p[r]$$

$$\forall r,\ F_{p+1}[r] = \sum_k \sum_{n+\sum\limits_i l_i = r} F[n,k] \times_{\mathfrak{S}_I} \prod_{i=1}^{k} F_p[l_i]$$

Démonstration. On va utiliser la formule des espèces de structure des colimites : $\mathcal{F}F(X) = colim F_p(X)$ et $F_{p+1}(X) = F(X,Y) \circ (id_X, F_p(X))$.

$$\begin{array}{rcl}
F[r] & = & colim F_p[r] \\
 & = & \cup F_p[r]
\end{array}$$

Puis, on utilise le théorème d'unicité du développement en série de Taylor.

$$\begin{aligned}
F_{p+1}(X) &= \sum F_{p+1}[r] \times_{\mathfrak{S}_r} X^r \\
&= F(X, F_p(X)) \\
&= \sum_{n,k} F[n,k] \times X^n \times F_p(X)^k / \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \\
&= \sum_{n,k} F[n,k] \times X^n \times (\sum_l F_p^k[l] \times_{\mathfrak{S}_l} X^l) / \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \\
&= \sum_r \sum_{n+l=r} \sum_k F[n,k] \times F_p^k[l] \times X^r / \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_r \\
&= \sum_r \langle \sum_k \sum_{n+\sum_{i=1}^{k} l_i = r} F[n,k] \times_{\mathfrak{S}_k} \prod_{i=1}^{k} F_p[l_i] \rangle \times_{\mathfrak{S}_r} X^r
\end{aligned}$$

□

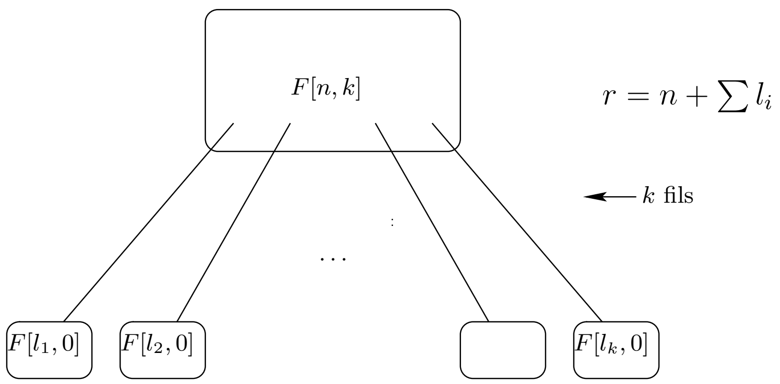
Pour mieux comprendre cette formule, on peut regarder les premiers termes :

$$F_0[r] = \emptyset$$

$$F_1[r] = F[r, 0]$$

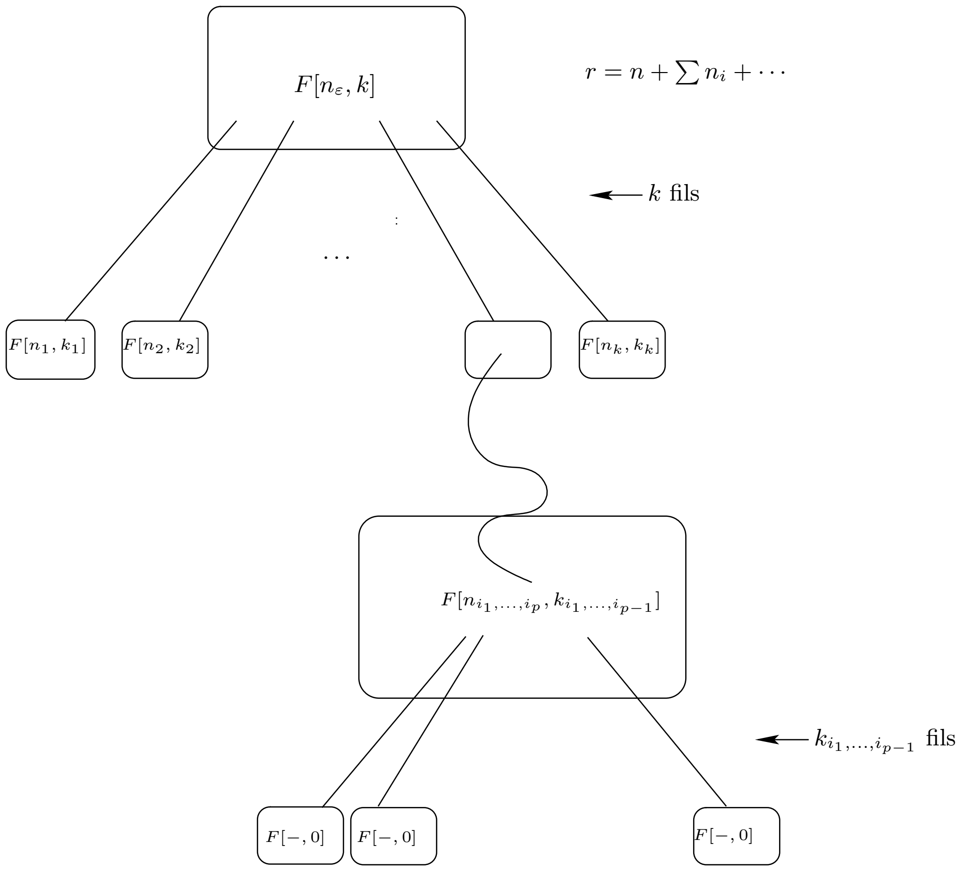
$$F_2[r] = \sum_k \sum_{n+\sum l_i = r} F[n,k] \times_{\mathfrak{S}_k} (F[l_1, 0] \times \cdots \times F[l_k, 0])$$

Soit $r \in \mathbb{N}$ donné. on cherche à décrire les WNF de $F_2[r]$, on se donne $k \leq r-1$ et une partition $n + \sum_{i=1}^{k} l_i = r$.
On utilise une description sous forme d'arbre :



Chaque arête représente l'opération produit cartésien.

On reprend cette description pour les WNF de F_p :



Chaque arête représente l'opération produit cartésien et la hauteur de l'arbre est p.

Chapitre 3

Le modèle relationnel du second ordre.

Cette partie est consacrée à la description d'un modèle de la logique linéaire du second ordre, décrit par A. Bac dans sa thèse [7], puis il repris et simplifié par T. Ehrhard dans [8]. Pour commencer, on introduit la notion de foncteur stable qui a été utilisée par les deux auteurs dans la description du modèle. Puis on compare les foncteurs analytiques aux foncteurs stables. On verra notamment que tout foncteur analytique est stable mais que la réciproque est fausse. Dans un deuxième temps on remarquera que les foncteur analytiques peuvent remplacer les foncteurs stables dans le modèle décrit par A. Bac et T. Ehrhard.

3.1 Foncteurs stables ou foncteur analytiques ?

3.1.1 Foncteurs stables

On note **INJ** la catégorie des ensembles quelconques munis des injections et **Inj** la catégorie des ensembles finis munis des injections.

Définition 3.1.1. Un foncteur $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ est dit stable lorsque sa restriction à **INJ** ($F_{|\mathbf{INJ}} : \mathbf{INJ} \to \mathbf{INJ}$) préserve les colimites filtrées, les produits fibrés et les inclusions.

On remarque que F étant défini sur **Set**, il transforme les injections en injections. En effet dans **Set**, ι est une injection si et seulement si il existe s tel que $s \circ \iota = id$; comme F est un foncteur $F(\iota) \circ F(s) = F(id) = id$.

Proposition 3.1.2. *Soit $F : \mathbf{Inj} \to \mathbf{Inj}$ un foncteur qui préserve les inclusions, les colimites filtrées dans* **Inj** *et les produits fibrés dans* **Inj**. *On peut définir son extension $F : \mathbf{INJ} \to \mathbf{INJ}$ par les formules :*

$$\forall X \in \mathbf{INJ},\ F(X) = \underset{S \subset X}{colim}\ F(S)$$

$$\forall f \in \mathbf{INJ}(X, Y),\ F(f) = \underset{S \subset X}{colim}\ F(f_S)$$

Le foncteur ainsi défini est stable.

Démonstration. La fonction $\underset{S\subset X}{colim}\ 2^{2^{f_S}}$ est définie comme l'unique solution du problème universel suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(S) \arrow[rr, "F(f_{|S})"] \arrow[dr] & & F(T) \arrow[dr] & \\
& F(X) \arrow[rr, "colim\ F(f_{|S})"'] & & F(Y) \\
F(S') \arrow[rr, "F(f_{|S'})"] \arrow[ur] & & F(T') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- *F préserve les inclusions dans* **INJ** *:* Si $X \subset Y$, alors $\forall S \subset X, S \subset T$ donc $\underset{S\subset X}{\cup} F(S) \subset \underset{S\subset Y}{\cup} F(S)$. On a montré que $F(X) \subset F(Y)$.
- *F préserve les colimites filtrées dans* **INJ** *:* On considère la colimite filtrée suivante :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[dd, hook, "\alpha_{ij}"'] \arrow[dr, hook, "\eta_i"] & \\
& colim\ X_i \\
X_j \arrow[ur, hook, "\eta_j"] &
\end{tikzcd}$$

On remarque tout d'abord que si $S_i \subset X_i$, alors $\eta_i(S_i) \subset colim\ X_i$ est fini. On en déduit que $\cup F(\eta_i) : F(X_i) = \underset{S_i\subset X_i}{\cup} F(S_i) \hookrightarrow \underset{S\subset \underset{i}{colim}\ X_i}{\cup} F(S)$. On peut à présent considérer le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F(X_i) \arrow[dd, hook, "F(\alpha_{ij})"'] \arrow[dr, hook, "\mu_i"] \arrow[drr, hook, bend left, "\cup F(\eta_i)"] & & \\
& \underset{i}{colim} \underset{S\subset X_i}{\cup} F(S) \arrow[r, dashed, "\exists! h"] & \underset{S\subset colim\ X_i}{\cup} F(S) \\
F(X_j) \arrow[ur, hook, "\mu_j"] \arrow[urr, hook, bend right, "\cup F(\eta_j)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il nous suffit de montrer que h est une bijection.
Tout d'abord, montrons la surjectivité de h. On remarque que pour toute partie finie $S \subset colim\ X_i$, il existe i_0 et $S_{i_0} \subset X_{i_0}$ tels que $S = \eta_{i_0}(S_{i_0})$ (car la colimite est filtrée). Soit $x \in \underset{S\subset colim\ X_i}{\cup} F(S)$, alors il existe $S \subset colim\ X_i$ telle que $x \in F(S)$. Ainsi, il existe i et S_i tels que $F(S) = F(\eta_i)(S_i)$, donc il existe $x_i \in S_i$ tels que $x = F(\eta_i)(x_i)$. Comme le diagramme précédent commute, on en déduit que $h(\mu_i(x_i)) = x$. Montrons l'injectivité de h. Soient $x, y \in \underset{i}{colim} \underset{S\subset X_i}{\cup} F(S)$ tels que $h(x) = h(y)$. Comme la colimite est filtrée, il existe i et $s, t \in \underset{S_i\subset X_i}{\cup} F(S_i)$ tels que $x = \mu_i(s)$ et $y = \mu_i(t)$. Par commutativité

du diagramme précédent, $h(x) = F(\eta_i)(s) = F(\eta_i)(t) = h(y)$. Comme $F(\eta_i)$ est une injection, on a $s = t$ et donc $x = y$.

F préserve les produit fibré dans **INJ** *:* Soit P le produit fibré de deux injections f et g. Soient $S_A \subset A$ et $S_B \subset B$ deux ensembles finis et S_P le produit fibré des injections $f_{|S_A}$ et $g_{|S_B}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(S_P) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook] & & F(S_A) \arrow[d, hook, "\subset"'] \arrow[dddr, bend left, "f_{|S_A}"] & \\
& F(D) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & F(A) \arrow[d, hook, "f"] & \\
F(S_B) \arrow[r, hook, "\subset"] \arrow[drrr, hook, bend right, "g_{|S_B}"'] & F(B) \arrow[r, hook, "g"'] & F(C) & \\
& & & F(S_C) \arrow[ul, hook', "\subset"]
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, on se sert de l'expression des produits fibrés dans **INJ** : $S_P = \{(a,b)|a \in S_a,\ b \in S_b,\ g(a) = g(b)\}$, et le produit fibré P_F de $F(f)$, et $F(g)$ est donné par $P_F = \{(a,b)|a \in A,\ b \in B,\ f(a) = g(b)\} = \underset{S_A,S_B}{\cup} S_P$. Comme $S_P \subset F(D)$ fini, on a $P_F \subset F(D)$. On est donc dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
F(D) \arrow[drr, hook, bend left] \arrow[ddr, hook, bend right] \arrow[dr, shift left, "\exists! h"] & & \\
& P_F \arrow[ul, hook, shift left, "\subset"] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & F(A) \arrow[d, hook, "F(f)"] \\
& F(B)g \arrow[r, hook, "F"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

Donc $P_F \subset F(D) \hookrightarrow P_f$, d'où $P_F = F(D)$ et $F(D)$ est bien le produit fibré de f et g.

□

3.1.2 Deux notions différentes

Proposition 3.1.3. *Tout foncteur analytique qui préserve les inclusions est un foncteur stable.*

Démonstration. Soit F un foncteur analytique qui préserve les inclusions. Alors par la caractérisation des foncteurs analytiques, F préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles sur **Set**.

On remarque que toute famille filtrée dans **Inj** est aussi une famille filtrée dans **Set** et que les colimites dans ces deux catégories coïncident. Ainsi, $F_{|\mathbf{Inj}}$ préserve les colimites filtrées dans **Inj**. Montrons tout d'abord que, dans **Inj**, les produits fibrés faibles sont tous des produits fibrés forts. Soit W un produit fibré faible dans **Inj** de deux injections f et g. Alors W est solution du problème :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, hook] \arrow[drr, bend left, hook] \arrow[ddr, bend right, hook] & & \\
& W \arrow[r, hook, "p"] \arrow[d, hook, "q"'] & A \arrow[d, hook, "f"] \\
& B \arrow[r, hook, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

On suppose qu'il existe deux fonctions $h, k : X \hookrightarrow W$ qui font commuter le diagramme précedent. Alors, $p \circ h = p \circ k$. Comme p est injectif, on en déduit $h = k$. Ainsi, W est un produit fibré fort dans **Inj**. Montrons que les produits fibrés de deux injections dans **Inj** et dans **Set** coïncident : On considère le produit fibré P dans **Set** des deux injections f et g :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & A \arrow[d, hook, "f"] \\
B \arrow[r, hook, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

Montrons que p et q sont des injections. Soient $x, y \in P$ tels que $p(x) = p(y)$. Alors, $f(p(x)) = f(p(y))$, puis $g(q(x)) = g(q(y))$ et par injectivité de g, $q(x) = q(y)$. Or, dans **Set**, on sait exprimer les produits fibrés faibles : $P = \{(a, b) \mid f(a) = g(b)\}$. Ainsi, $x = (p(x), q(x))$, $y = (p(y), q(y))$. On en déduit que $x = y$. Donc P est aussi le produit fibré de f et g dans les **Inj**.
Comme F préserve les produits fibrés faibles, on en déduit que $F(P)$ est un produit fibré faible dans **Set** de $F(f)$ et $F(g)$. $F(f)$ et $F(g)$ sont des injections, donc $F(P)$ est un produit fibré faible dans **Inj**, c'est donc un produit fibré fort dans les **Inj**. Ainsi, $F_{|\mathbf{Inj}}$ préserve les produits fibrés dans **Inj**. □

Remarque 3.1. Les notions de foncteurs stables et analytiques ne coïncident pas. La première est plus générale que la seconde. Le foncteur d'extension continue de la proposition suivante prouve ce fait.

Notation. On notera dans la suite **Fin** la catégorie des ensembles finis dont les morphismes sont les fonctions. On remarque que cette catégorie est une sous-catégorie pleine de **Set**.

Définition 3.1.4. Soit $2^- : \mathbf{Fin} \to \mathbf{Fin^{op}}$ le foncteur qui à un ensemble associe ses parties et à une fonction associe la fonction image réciproque :

$$\forall X \in \mathbf{Fin}, \quad 2^X = \{p : X \to \{1, 2\}\} = \mathcal{P}(X)$$

$$\begin{array}{lcrcl} \forall f : X \to Y, \quad 2^f = f^* & : & 2^Y & \to & 2^X \\ & & p & \mapsto & p \circ h \\ & & Z \subset Y & \mapsto & f^{-1}(Z) \end{array}$$

On note $2^- : \mathbf{Fin^{op}} \to \mathbf{Fin}$ le foncteur qui agit de la même façon mais dont les domaines et codomaines ont été interchangés.
On considère alors le foncteur $2^{2^-} : \mathbf{Fin} \to \mathbf{Fin}$ qui est le composé des deux foncteurs précédent.

Définition 3.1.5. On définit le foncteur d'extension continue 2^{2^-} : **Set** $\to$ **Set** par les formules suivantes :

$$\forall X \in \mathbf{Set},\ 2^{2^X} = \underset{S \subset X}{colim}\ 2^{2^S}$$

$$\forall f \in \mathbf{Set}(X,Y),\ 2^{2^f} = \underset{S \subset X}{colim}\ 2^{2^{f_S}}$$

Remarque 3.2. On remarque que si $S \subset T$ sont finis, alors $2^{2^S} \subset 2^{2^T}$. Comme la famille $(2^{2^S})_{S \subset X}$ est filtrée on sait calculer sa colimite dans **Set** :

$$2^{2^X} = \underset{S \subset X}{colim}\ 2^{2^S} = \underset{S \subset X}{\cup} 2^{2^S}$$

De plus, si T est fini, alors $2^{2^T} = \underset{S \subset T}{\cup} 2^{2^S}$.

Proposition 3.1.6. *Le foncteur 2^{2^-} est un foncteur stable, mais il n'est pas analytique.*

Démonstration. On va montrer dans les lemmes qui suivent que ce foncteur préserve les inclusions, les colimites filtrées et les produits fibrés sur **Inj** (cf.3.1.2), mais qu'il ne préserve pas les produits fibrés faibles dans **Set**. □

Lemme 3.1.7. *Le foncteur 2^{2^-} préserve les inclusions dans* **Inj**.

Démonstration. Si $X \subset Y$, alors les parties de X (2^X) sont incluses dans celles de Y. De même, $2^{2^X} \subset 2^{2^Y}$. □

Lemme 3.1.8. *Le foncteur d'extension continue défini en 3.1.5 préserve les colimites filtrées.*

Démonstration. On considère la colimite filtrée :

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[dd, "\alpha_{ij}"'] \arrow[dr, "\eta_i"] & \\
 & colim\ S_i \\
S_j \arrow[ur, "\eta_j"] &
\end{tikzcd}$$

On considère ensuite le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
2^{2^{S_i}} \arrow[dd, hook, "2^{2^{\alpha_{ij}}}"'] \arrow[dr, hook, "2^{2^{\eta_i}}"] \arrow[drr, hook, bend left, "\mu_i"] & & \\
 & 2^{2^{colim\ S_i}} \arrow[r, hook, "\exists ! h"'] & X \\
2^{2^{S_j}} \arrow[ur, hook, "2^{2^{\eta_j}}"] \arrow[urr, hook, bend right, "\mu_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

On veut montrer l'existence d'une unique injection h.
On commence par l'unicité et on suppose que h existe. Soit $\alpha : 2^{2^{colim}} \to \{0,1\}$. Comme $colim\ S_i$ est finie, elle ne possède qu'un nombre fini de parties. Comme la colimite est filtrée, il existe i tel que pour tout $x \subset colim\ S_i$ il existe $x_i \subset S_i$ telle que $x = \eta_i(x_i)$. Comme de plus η_i est injective, ce x_i est unique, c'est $x_i = \eta_i^{-1}(x)$. On choisit i le plus petit indice vérifiant ces propritétés. Si on pose $\beta_i : x_i \mapsto \alpha(\eta_i(x_i))$, on a $\alpha = 2^{2^{\eta_i}}(\beta)$. L'unique fonction h qui convient (si elle existe) vérifie $h(\alpha) = \mu_i(\beta_i)$.
On pose donc $h : \alpha \mapsto \mu_i(\beta_i)$ et on vérifie qu'elle convient en utilisant le fait que le diagramme ci-dessus commute. □

Dans les lemmes qui suivent, on va montrer que F préserve les produits fibrés dans **Inj**.

Notation. Soit $f \in \mathbf{Fin}(X, Y)$. On note $\exists f : 2^X \to 2^Y$ la fonction qui à une partie de X associe son image directe par f ($\exists f : Z \subset X \mapsto f(Z)$)

Lemme 3.1.9. *Soient f une fonction quelconque, g une injection et P le produit fibré de ces deux fonctions :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook, "k"'] & A \arrow[d, hook, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 2^D \arrow[d, hook, "\exists k"'] & 2^A \arrow[l, "h^*"'] \arrow[d, hook, "\exists g"] \\ 2^B & 2^C \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $x \subset A$. Alors, $\exists k \circ h^*(x) = k(h^{-1}(x))$ et $f^* \circ \exists g(x) = f^{-1}(g(x))$. On pose $y = h^{-1}(x)$, alors $\exists k \circ h^*(x) = k(y)$ et $f^* \circ \exists g(x) = f^{-1}(g \circ h(y))$. Comme $f \circ k = g \circ h$, on a $k(y) = f^{-1}(g \circ h(y))$ d'où $\exists k \circ h^*(x) = f^* \circ \exists g(x)$. □

Corollaire 3.1.10. *Si $m : A \hookrightarrow B$ est une injection, alors $m^* \circ \exists m = id$.*

Démonstration. On considère le produit fibré de m et m :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook, "m"] \\ A \arrow[r, hook, "m"'] & B \end{tikzcd}$$

On sait que $D \simeq \{(a, a') \in A^2 \mid m(a) = m(a')\}$. Comme m est injective, $D \simeq \{(a, a) \mid a \in A\} \simeq A$. Donc A est le produit fibré dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal, "id"] \arrow[d, equal, "id"'] & A \arrow[d, hook, "m"] \\ A \arrow[r, hook, "m"'] & B \end{tikzcd}$$

En appliquant le lemme précédent, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
2^A \arrow[d, "id"'] & 2^A \arrow[l, "id"'] \arrow[d, "\exists m"] \\
2^A & 2^A \arrow[l, "m^*"']
\end{tikzcd}$$

On en déduit $m^* \circ \exists m = id$. $\square$

Lemme 3.1.11. *Soient f et g deux injections et P le produit fibré de ces deux fonctions :*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, hook, "k"'] & A \arrow[d, hook, "g"] \\
B \arrow[r, hook, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

alors, dans le diagramme suivant, 2^C est une somme amalgammée dans **Set** *:*

$$\begin{tikzcd}
2^D & 2^A \arrow[l, hook', "h^*"] \\
2^B \arrow[u, hook, "k^*"'] & 2^C \arrow[l, hook', "f^*"] \arrow[u, hook, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On se place dans les hypothèses du lemme et on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Z & & \\
& 2^D \arrow[ul, dashed, "\delta"] & 2^A \arrow[l, hook', "h^*"] \arrow[ull, bend right, "\beta"'] \\
& 2^B \arrow[u, hook, "k^*"'] \arrow[uul, bend left, "\alpha"] & 2^C \arrow[l, hook', "f^*"] \arrow[u, hook, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

On veut montrer l'existence d'un unique $\delta : 2^D \to Z$ qui fasse commuter le diagramme précédent.
On suppose qu'une telle fonction existe. Elle doit vérifier les propriétés suivantes :

$$\delta \circ k^* = \alpha$$

On utilise le corollaire 3.1.10. Comme k est une injection, on a $k^* \circ \exists k = id$. Donc, (si elle existe) $\delta = \alpha \circ \exists k$. Elle est unique.
On pose $\delta = \alpha \circ \exists k$ et on vérifie qu'elle fait commuter le diagramme :

$$\delta \circ h^* = \alpha \circ \exists k \circ h^*$$

D'après le lemme précédent, $\exists k \circ h^* = f^* \circ \exists g$, d'où :

$$\delta \circ h^* = \alpha \circ f^* \circ \exists g = \beta \circ g^* \circ \exists g = \beta$$

On a donc bien les deux égalités :

$$\delta \circ h^* = \beta \quad \text{et} \quad \delta \circ k^* = \alpha$$

□

Lemme 3.1.12. *Le foncteur* 2^- : $\mathbf{Fin} \to \mathbf{Fin^{op}}$ *est adjoint à gauche de* 2^- : $\mathbf{Fin^{op}} \to \mathbf{Fin}$.

Démonstration. On a les isomorphismes naturels suivant :

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Fin^{op}}(2^X, Y) & \simeq & \mathbf{Fin}(Y, 2^X) & \text{definition de } -^{op} \\ & \simeq & \mathbf{Fin}(X \times Y, 2) & \text{par adjonction du produit cartésien} \\ & \simeq & \mathbf{Fin}(X, 2^Y) & \text{et de l'exponentielle} \end{array}$$

□

Lemme 3.1.13. *Soient f et g deux injections et P le produit fibré de ces deux fonctions :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, hook, "k"'] & A \arrow[d, hook, "g"] \\ B \arrow[r, hook, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

alors dans le diagramme suivant 2^{2^D} est un produit fibré faible :

$$\begin{tikzcd} 2^{2^D} \arrow[r, hook, "h^{**}"] \arrow[d, hook, "k^{**}"'] & 2^{2^A} \arrow[d, hook, "g^{**}"] \\ 2^{2^B} \arrow[r, hook, "f^{**}"'] & 2^{2^C} \end{tikzcd}$$

Démonstration. On se place sous les hypothèses de ce lemme. D'après le lemme précédent, 2^D est une somme amalgamée dans **Fin** du diagramme :

$$\begin{tikzcd} 2^D & 2^A \arrow[l, hook', "h^*"'] \\ 2^B \arrow[u, hook, "k^*"] & 2^C \arrow[l, hook', "f^*"] \arrow[u, hook, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi, 2^D est un produit fibré dans $\mathbf{Set^{op}}$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 2^D \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & 2^A \arrow[d, hook] \\ 2^B \arrow[r, hook] & 2^C \end{tikzcd}$$

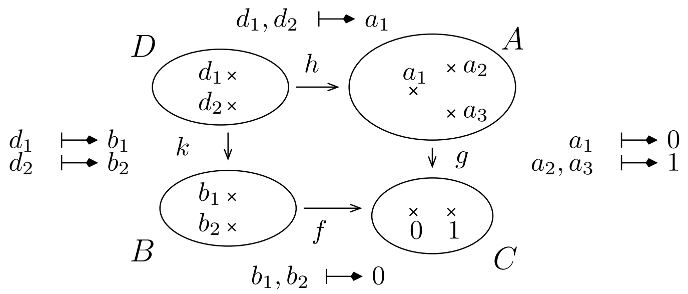
Comme 2^- : $\mathbf{Fin^{op}} \to \mathbf{Set}$ admet un adjoint à gauche, ce foncteur transforme les produits fibrés faibles de $\mathbf{Fin^{op}}$ en produits fibrés faibles de **Fin** (par [6] p.118, les produits fibré forts sont transformés en dex produits fibrés forts et les surjections en surjections cf.A.4). Ainsi, 2^{2^D} est un produit fibré faible dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 2^{2^D} \arrow[r, hook, "h^{**}"] \arrow[d, hook, "k^{**}"'] & 2^{2^A} \arrow[d, hook, "g^{**}"] \\ 2^{2^B} \arrow[r, hook, "f^{**}"'] & 2^{2^C} \end{tikzcd}$$

On a donc montré que le foncteur 2^{2^-} préserve les produits fibrés faibles dans **Inj**. $\square$

Le contre-exemple suivant montre que 2^{2^-} ne préserve pas les produits fibrés faibles dans **Set** :

Contre-Exemple 3.1.1. On considère le produit fibré faible suivant :



On veut montrer que 2^{2^D} n'est pas un produit fibré faible dans le diagramme suivant où P désigne le produit fibré fort :

$$\begin{tikzcd} 2^{2^D} \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[drr, bend left, "h^{**}"] \arrow[ddr, bend right, "k^{**}"'] & & \\ & P \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"'] & 2^{2^A} \arrow[d, "g^{**}"] \\ & 2^{2^B} \arrow[r, "f^{**}"] & 2^{2^C} \end{tikzcd}$$

Pour cela, il suffit de montrer que s n'est pas surjective.
On choisit :

$$\begin{array}{cccc} \alpha & : & 2^A & \to \{0,1\} \\ & & \emptyset & \mapsto \quad 0 \\ & & A, \{a1\}, \{a_2, a_3\} & \mapsto \quad 0 \\ & & \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\} & \mapsto \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \beta & : & 2^B & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Alors, (α, β) est dans le produit fibré fort P. Pourtant il n'admet pas d'antécédent dans 2^{2^D}. En effet, si on suppose l'existence d'un tel antécédent $\delta : 2^D \to \{0,1\}$, on aurait : $\alpha = h^{**}(\delta) = \delta \circ h^*$ et $\beta = k^{**}(\delta) = \delta \circ k^*$,c'est-à-dire :

$$\delta(D) = \delta(h^*(\{a_1, a_2\}) = \alpha(\{a_1, a_2\}) = 1 \quad \text{et} \quad \delta(D) = \delta(k^*(B)) = \beta(B) = 0$$

On aboutit ainsi à une contradiction. (On rappelle que h^* est la fonction image réciproque par h.)

3.2 Le modèle relationnel du second ordre

Dans le premier paragraphe, on va décrire la logique linéaire du second ordre.
Ensuite, on adapte le modèle relationnel de T. Ehrhard et A. Bac en remplaçant les foncteurs stables par les foncteurs analytiques dans la catégorie $\mathbf{Rel^{(n)}}$.
Enfin, on décrit l'interprétation dans ce modèle des formules puis des preuves de la logique linéaire du second ordre.
On remarquera en conclusion que ce modèle n'est pas compatible avec l'élimination des coupures, ce n'est donc pas tout à fait un modèle...

3.2.1 La logique linéaire du second ordre

La syntaxe de la logique linéaire du second ordre est formée des formules construites en utilisant les variables du second ordre : $\{X, Y, \ldots\}$ et les différents connecteurs :

- La négation linéaire ($\perp$),
- Les connecteurs multiplicatifs : le *ou multiplicatif* ($⅋$) et le *et multiplicatif* ($\otimes$) que l'on appelle respectivement *par* et *tenseur*,
- Les connecteurs additifs : le *ou additif* ($\oplus$) et le *et additif* ($\&$) que l'on appelle respectivement *plus* et *avec*,
- Les connecteurs unaires exponentiels : l'*infinité de ressources* (!) et l'*incertitude de ressource* (?) que l'on appelle respectivement *bien sûr* et *pourquoi pas*,
- Les quantificateurs du second ordre : le *pour tout* ($\forall$) et le *il existe* ($\exists$).

La notion de preuve en logique linéaire est définie par le calcul des séquents cidessous. Dans ce calcul, l'élimination des coupures est vraie. Malheureusement notre modèle ne la modélise pas correctement.
Les règles sont divisées en plusieurs groupes :

- Groupe identité :

$$\frac{}{\vdash X, X^\perp}\ \text{Axiome}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{Coupure}$$

- Groupe structurel :

$$\frac{\vdash A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(1)}}{\vdash A_1, \ldots, A_n}\ \text{Echange}$$

- Groupe logique :
  - Règles multiplicatives

$$\frac{}{\vdash 1} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}$$

  - Règles additives

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}$$

– Règles exponentielles

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{Affaiblissement} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{Contraction}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{Déréliction} \qquad \frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ \text{Promotion}$$

– Règles du second ordre

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall X.A} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A[B/X]}{\vdash \Gamma, \exists X.A}$$

3.2.2 Le modèle relationnel

Cette partie est tirée de l'article [8] dans lequel on a remplacé les foncteurs stables par les foncteurs analytiques.

Définition 3.2.1 (Parties Invariantes)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$ un foncteur analytique. Une *partie invariante* de F est un sous-ensemble $x \subseteq F(\mathcal{I}^n)$ qui est invariant sous l'action du groupe $\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$:

$$\forall a \in x,\ \forall \vec{\sigma} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{I}}, \quad F(\vec{\sigma})(a) \in x$$

On note $x : F$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La définition suivante généralise la catégorie des ensembles et relations.

Définition 3.2.2 (Catégorie $\mathbf{Rel^{(n)}}$)**.** Les objets de la catégorie $\boldsymbol{Rel^{(n)}}$ sont les foncteurs analytiques de $\mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$.
Etant donnés deux foncteurs analytiques F et G, les morphismes $\mathbf{Rel^{(n)}}(F,G)$ sont les parties invariantes de $F \times G$.
Le morphisme identité de F est donné par l'ensemble diagonal $Id_F = \{(a,a) \mid a \in F(\mathcal{I}^n))$ qui est une partie invariante.

3.2.3 Interprétation des formules

Proposition 3.2.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. La catégorie $\mathbf{Rel^{(n)}}$ est monoïdale, close et symétrique.*

La catégorie $\mathbf{Rel^{(n)}}$ est donc un modèle de la logique linéaire du premier ordre dans lequel les formules sont interprétées par des foncteurs analytiques de $\mathbf{Set^n}$ dans $\mathbf{Set}$ et dont les preuves sont interprétées par des parties invariantes.
Soient A et B deux formules de la logique linéaire du second ordre. On note $\vec{\zeta}$ la liste de longueur n, sans répétition des variables du second ordre, qui

contient toutes les variables libres de A et B. On définit alors par induction sur la longueur des formules le foncteur analytique $[A]^{\vec{\zeta}} : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$ par les constructions suivantes.

- $[A^\perp]^{\vec{\zeta}} = [A]^{\vec{\zeta}}$
- $[A \otimes B]^{\vec{\zeta}} = [A \parr B]^{\vec{\zeta}} = [A]^{\vec{\zeta}} \times [B]^{\vec{\zeta}}$
- $[A \oplus B]^{\vec{\zeta}} = [A \& B]^{\vec{\zeta}} = [A]^{\vec{\zeta}} + [B]^{\vec{\zeta}}$
- $[!A]^{\vec{\zeta}} = [?A]^{\vec{\zeta}} = EXP \circ [A]^{\vec{\zeta}}$
- $[\forall \xi A]^{\vec{\zeta}} = [\exists A]^{\vec{\zeta}} = \mathcal{T}[A]^{\vec{\zeta},\xi}$

3.2.4 Construction d'opérations

Pour interpréter les preuves de la logique linéaire du second ordre, nous avons besoin de certaines constructions qui sont décrites dans ce paragraphe.

Le foncteur substitution de type

Lemme 3.2.4. *Soient $F : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$ un foncteur analytique, $x \subset F(\mathcal{I})$ une partie invariante de F et $\vec{X}$ un n-uplet d'ensembles. Si $a \in F(\vec{X})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une injection $\vec{f} : \mid a \mid_F \to \vec{I}$ telle que $F(\vec{f})(a) \in x$.*
2. *Pour toute injection $\vec{f} : \mid a \mid_F \to \vec{I}$ telle que $F(\vec{f})(a) \in x$.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que puisque $\mid a \mid_F$ est fini et $\vec{\mathcal{I}}$ est infini, il existe toujours des injections de $\mid a \mid_F$ dans $\vec{\mathcal{I}}$. Pour prouver l'équivalence, on utilise l'invariance de x. □

Définition 3.2.5 (Instanciation des ensembles invariants)**.** Soient $F : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$ un foncteur analytique et $x \subset F(\mathcal{I})$ une partie invariante de F. Pour tout n-uplet d'ensembles $\vec{X}$, on définit $x_{\vec{X}}$ comme l'ensemble des $a \in F(\vec{X})$ qui vérifient l'une des propriétés *1*. ou *2*. (i.e. qui s'envoient dans x par une injection) :

$$\begin{aligned} x_{\vec{X}} &= \{a \in F(\vec{X}) \mid \exists \vec{f} : \mid a \mid_F \to \vec{I},\ F(\vec{f})(a) \in x\} \\ &= \{a \in F(\vec{X}) \mid \forall \vec{f} : \mid a \mid_F \to \vec{I},\ F(\vec{f})(a) \in x\} \end{aligned}$$

Proposition 3.2.6 (Propriétés des instanciations des ensembles invariants)**.** *Soient $F, G, H : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$ trois foncteurs analytiques, $x \subset F(\mathcal{I})$ une partie invariante de F et $\vec{X}$ un n-uplet d'ensembles.*

- *L'instanciation $x_{\vec{X}} \subset F(\vec{X})$ est invariante sous l'action du groupe $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_{X_i}$ à travers le foncteur F. Ainsi, si $L : \mathbf{Set^p} \to \mathbf{Set^n}$ est analytique, alors $x_{L(\vec{I})}$ est une partie invariante de $F \circ L$.*
- *$Id \in \mathbf{Rel^{(n)}}(F, F)$ étant le morphime identité associé à F, l'instanciation $Id_{\vec{X}} \subseteq F(\vec{X}) \times F(\vec{X})$ est l'ensemble diagonal : $Id_{\vec{X}} = \{(a, a) \mid\ a \in F(\vec{X})\}$.*
- *Soient $s \in \mathbf{Rel^{(n)}}(F, G)$ et $t \in \mathbf{Rel^{(n)}}(G, H)$, alors*

$$(t \circ s)_{\vec{X}} \supseteq t_{\vec{X}} \circ s_{\vec{X}}$$

et cette inclusion est une égalité si et seulement si $\vec{X}$ est un n-uplet formé d'ensembles finis.

Définition 3.2.7 (Substitution de types)**.** Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $H : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set^p}$ un foncteur analytique. Alors il existe un foncteur *lax* $H^* : \mathbf{Rel^{(p)}} \to \mathbf{Rel^{(n)}}$: Ce foncteur envoie $F \in \mathbf{Rel^{(p)}}$ sur $F \circ H \in \mathbf{Rel^{(n)}}$ et $s \in \mathbf{Rel^{(p)}}(F, G)$ sur $s_{H(\vec{\mathcal{I}})}$.

Le foncteur H^* est *lax* car il ne vérifie qu'une version faible de la propriété de composition des foncteurs. On n'a pas toujours égalité dans l'équation suivante :

$$H^*(t \circ s) \supseteq H^*(t) \circ H^*(s)$$

Le foncteur projection

Définition 3.2.8 (Projection)**.** On appelle *projection* ou foncteur *oubli* le foncteur analytique $P : \mathbf{Set^{n+1}} \to \mathbf{Set^n}$:
- $P(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) = (X_1, \ldots, X_n)$
- $P(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) = (f_1, \ldots, f_n)$

Par pré-composition, ce foncteur induit un foncteur lax P^*. En fait, ce foncteur est un vrai foncteur (i.e. $P^*(t \circ s) = P^*(t) \circ P^*(s)$).

Proposition 3.2.9. • *$P^* : \mathbf{Rel^{(n)}} \to \mathbf{Rel^{(n+1)}}$ est un foncteur.*
Soient $F, G \in \mathbf{Rel^{(n)}}$.
- *$P^*(F) = F \circ P$*
- *Si $s \in \mathbf{Rel^{(n)}}(F, G)$ (i.e. $s \subseteq F(\vec{I^n}) \times G(\vec{I^n})$ partie invariante), alors $P^*(s) = s_{\vec{\mathcal{I}^n}} = s \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}(P^*F, P^*G)$*

De plus, $P^*(F) : \mathbf{Set^{n+1}} \to \mathbf{Set}$ est un foncteur analytique, i.e. $P^*(F) \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}$.

Définition 3.2.10 (Introduction)**.** Soient $F \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}$, $G \in \mathbf{Rel^{(n)}}$ et $t \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}(G \circ P, F)$ (i.e. $t \subseteq G(\vec{I}) \times F(\vec{I}, I)$ invariant par permutation). On définit $\Lambda(t) \subseteq G(\vec{I}) \times \mathcal{T}F(\vec{I})$ par :

$$\Lambda(t) = \{(\gamma, (a)^F_I) \mid (\gamma, a) \in t\}$$

Proposition 3.2.11. *Soient $F \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}$, $G \in \mathbf{Rel^{(n)}}$ et $t \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}(G \circ P, F)$. Alors $\Lambda(t) \subseteq G(\vec{I}) \times \mathcal{T}F(\vec{I})$ est une partie invariante de $G \times \mathcal{T}F$, c'est-à-dire $\Lambda(t) \in \mathbf{Rel^{(n)}}(G, \mathcal{T}F)$.*

On utilisera cette opération pour interpréter la règle d'introduction du quantificateur du second ordre.

Définition 3.2.12 (Elimination)**.** Soit $F \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}$. On définit $\varepsilon^F \subseteq \mathcal{T}F(\vec{\mathcal{I}}) \times F(\vec{\mathcal{I}, I})$ par :

$$\varepsilon^F = \{((a)^{\vec{I}}_{\mathcal{T}F}, a) \mid a \in F(\vec{\mathcal{I}, I})\}$$

Proposition 3.2.13. *Soit $F \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}$. Alors ε^F est une partie invariante de $\mathcal{T}F \times F$. C'est-à-dire :*

$$\varepsilon^F \in \mathbf{Rel^{(n)}}(P^*\mathcal{T}F, F)$$

Cette opération sera utilisée pour interpréter la règle d'élimination du quantificateur universel du second ordre et la règle d'introduction du quantificateur existentiel du second ordre.

Proposition 3.2.14 (Egalités)**.** *Les équations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \Lambda(t) \circ s &= \Lambda(t \circ P^*(s))) \\ \varepsilon^F \circ P^*(\Lambda(t)) &= t \\ \Lambda(\varepsilon^F) &= Id \end{aligned}$$

Proposition 3.2.15. *L'opération de quantification de second ordre définit un foncteur $\mathcal{T} : \mathbf{Rel^{(n+1)}} \to \mathbf{Rel^{(n)}}$ dont l'action sur les morphismes $s \in \mathbf{Rel^{(n+1)}}(F, F')$ est définie par $\mathcal{T}s = \Lambda(s \circ \varepsilon^F) \in \mathbf{Rel^{(n)}}(\mathcal{T}F, \mathcal{T}F')$.*

Proposition 3.2.16. *Le foncteur $\mathcal{T}$ est adjoint à droite du foncteur P^*. C'est-à-dire qu'il existe une bijection naturelle entre $\mathbf{Rel^{(n)}}(G, \mathcal{T}F)$ et $\mathbf{Rel^{(n+1)}}(P^*G, F)$.*

3.2.5 Interprétation des preuves

Proposition 3.2.17. *La catégorie $\mathbf{Rel^{(n)}}$ munie des opérations Λ, P^*, $\mathcal{T}$, de ε^F et de la substitution des types permet de modéliser les preuves de la logique linéaire du second ordre.*

Remarque 3.3. Comme l'opération de substitution des types met en jeu des foncteurs lax, notre interprétation des preuves n'est pas stable par élimination des coupures. Par contre, la substitution de type (précomposition par un foncteur analytique H) préserve les connecteurs logiques et les opérations sur les preuves :

- $H^*(F \times G) = H^*(F) \times H^*(G)$
- $H^*(F + G) = H^*(F) + H^*(G)$
- $H^*(EXP \circ F) = EXP \circ H^*(F)$
- $H^*(\mathcal{T}F) = \mathcal{T}H^*(F)$

Si $\Gamma = (A_1, \ldots, A_p)$ est un contexte dont les variables libres sont toutes dans $\vec{\zeta}$, on définit le foncteur analytique $[\Gamma]^{\vec{\zeta}} : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set}$ par : $[\Gamma]^{\vec{\zeta}} = \prod_{i=1}^{p} [A_i]^{\zeta}$.
Une preuve π d'un séquent $\vdash \Gamma$ est interprétée par une partie invariante $[\pi]^{\vec{\zeta}}$ du foncteur $[\Gamma]^{\vec{\zeta}}$.
On ne va décrire que quelques règles de construction de $[\pi]^{\zeta}$.
On suppose que π termine par une règle de promotion.

$$\cfrac{\cfrac{\vdots \rho}{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_p, B}}{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_p, !B}$$

Alors $[\pi]^{\vec{\zeta}}$ est l'ensemble à $n+1$-couple de la forme $(\sum_{j=1}^{p} m_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^{p} m_j^p, [b_1, \ldots, b_k])$ avec $(m_j^1, \ldots, m_j^p, b_j) \in [\rho]^{\vec{\zeta}}$ pour chaque j.
La règle de coupure est interprétée par la composition. On suppose que π termine par une règle de coupure.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\lambda}{\vdash \Gamma, A} \qquad \dfrac{\vdots\rho}{\vdash A^{\perp}, \Delta}}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

Soit $\vec{\zeta}$ la liste des variables du second ordre qui apparaissent dans Δ et Γ. On note n sa longueur. On a $[\lambda]^{\vec{\zeta}} : [\Gamma]^{\vec{\zeta}} \times [A]^{\vec{\zeta}}$ et $[\rho]^{\vec{\zeta}} : [A]^{\vec{\zeta}} \times [\Delta]^{\vec{\zeta}}$. Alors la preuve π est interprétée par la composition de ces deux parties invariantes : $[\pi]^{\vec{\zeta}} = [\rho]^{\vec{\zeta}} \circ [\lambda]^{\vec{\zeta}}$.
On suppose que π termine par une règle d'introduction du $\forall$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\rho}{\vdash \Gamma, A}}{\vdash \Gamma, \forall\xi A}$$

où ξ n'apparaît pas dans les variables libres $\vec{\zeta}$ de Γ. Alors $[\rho]$ est une partie invariante de $(P^*[\Gamma]^{\vec{\zeta}}) \times [A]^{\vec{\zeta},\xi}$. On pose $[\pi]^{\vec{\zeta}} = \Lambda([\rho]^{\vec{\zeta},\xi})$ qui est bien une partie invariante de $[\Gamma]^{\vec{\zeta}} \times \mathcal{T}[A]^{\vec{\zeta},\xi}$.
On suppose que π termine par une règle d'introduction du $\exists$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\rho}{\vdash \Gamma, A[B/\zeta]}}{\vdash \Gamma, \exists\xi A}$$

où ξ n'apparaît pas dans les variables libres de Γ et de B. Soit $\vec{\zeta}$ l'ensemble des variables libres de la conclusion que l'on peut supposer ne pas contenir ξ, on note n sa longueur. On note $H : \mathbf{Set^n} \to \mathbf{Set^{n+1}}$ le foncteur analytique défini par $H(\vec{X}) = (\vec{X}, [B]^{\vec{\zeta}}(\vec{X}))$. Alors $[A[B/\xi]]^{\vec{\zeta}} = H^*([A]^{\vec{\zeta},\xi})$ (on le prouve par induction sur A).
On peut appliquer H^* à $\varepsilon^{[A]^{\vec{\zeta},\xi}}$ partie invariante de $P^*(\mathcal{T}[A]^{\vec{\zeta},\xi}) \times [A]^{\vec{\zeta},\xi}$. On obtient $H^*(\varepsilon^{[A]^{\vec{\zeta},\xi}})$ partie invariante de $\mathcal{T}[A^{\vec{\zeta},\xi}] \times H^*([A^{\vec{\zeta},\xi}]) = [\exists]^{\vec{\zeta}} \times [A[B/\xi]]^{\vec{\zeta}}$
On pose $[\pi]^{\vec{\zeta}} = [\rho]^{\vec{\zeta}} \circ H^*(\varepsilon^{[A]^{\vec{\zeta},\xi}})$ partie invariante de $[\exists\xi A]^{\vec{\zeta}} \times [\Gamma]^{\vec{\zeta}}$.
A cause de cette dernière règle, quand π se réduit par élimination des coupures à π', on n'a que l'inclusion : $[\pi']^{\vec{\zeta}} \subseteq [\pi]^{\vec{\zeta}}$. L'interprétation est de moins en moins précise au cours de la réduction.

Chapitre 4

Lien avec les faisceaux

Ce chapitre présente un lien entre les faisceaux et les foncteurs stables. C'est un exercice tiré du livre de Mac Lane et Moerdijk [9] qui m'a été proposé par Martin Hyland.

4.1 Cotopologie

Soit $\mathbf{C}$ une petite catégorie.

Définition 4.1.1 (Cocrible)**.** Soit $X \in ob(\mathbf{C})$. Un cocrible de X est un ensemble R de morphismes partant de X stable par composition à gauche :

$$\forall Y, Z \in ob(\mathbf{C})\ \forall f \in \mathbf{C}(X,Y)\ \forall g \in \mathbf{C}(Y,Z), \quad f \in R \Rightarrow g \circ f \in R$$

Définition 4.1.2 (Cocrible engendré)**.** On appelle cocrible sur X engendré par les fonctions $f_i : X \to Y_i$ et on note $< f_i, i \in I >$, le cocrible :

$$\langle f_i, i \in I \rangle = \{g \circ f_i \ \mid\ i \in I,\ g : Y_i \to Z\}$$

Définition 4.1.3 (Cotopologie)**.** Une cotopologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{C}$ est la donnée pour chaque $X \in ob(\mathbf{C})$ d'un ensemble $\mathcal{T}(X)$ de cribles tel que :

1. $\mathbf{C}(X, \_) \ \in\ \mathcal{T}(X)$
2. $\forall R \in \mathcal{T}(X),\ \forall f : X \to Y, \quad R^f = \{g : Y \to Z \ \mid\ g \circ f \in R\} \in \mathcal{T}(Y)$
3. $\forall R \in \mathcal{T}(X),\ \forall R'$ crible de X,
   Si $\forall f : X \to Y \in R,\ R'^f \in \mathcal{T}(Y)$, alors $R' \in \mathcal{T}(X)$

Définition 4.1.4 (Faisceau sur $\mathcal{T}$)**.** Soit un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$. On dit que F est un faisceau sur $\mathbf{T}$ lorsque :
$\forall X \in \mathbf{C}$, $\forall R \in \mathbf{T}(X)$, $\forall (x_h)_{h \in R}$ telle que $x_h \in F(cod(h))$ et $\forall g\ x_{g \circ h} = F(g)(x_h)$.

$$\exists ! x \in F(X) \text{ tel que } \forall h \in R, F(h)(x) = x_h$$

On dit alors que la famille x_h est *compatible.*

4.2 Faisceaux ou foncteurs stables ?

On considère la catégorie **Inj** des ensembles finis munis des injections.

Proposition 4.2.1 (Somme amalgamée dans **Inj**)**.** *La catégorie* **Inj** *admet des sommes amalgamées, i.e. étant donnés* i, j, j', f, f' *il existe* k, g, g' *tels que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f'"'] & j \arrow[d, hook, dashed, "g"] \\ j' \arrow[r, hook, dashed, "g'"] & k \end{tikzcd}$$

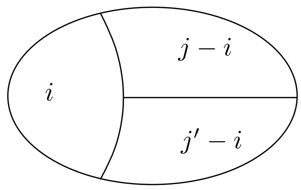
De plus, i *est le produit fibré de* g *et* g' *dans* **Inj**.

Démonstration. On pose $k = i + (j - i) + (j' - i)$. Comme f et f' sont injectives, les ensembles i, $f(i)$ et $f'(i)$ sont en bijection. On peut donc construire les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} f(i) & \hookrightarrow & i \\ j - f(i) & \hookrightarrow & j - i \end{array} \qquad g' : \begin{array}{ccc} f'(i) & \hookrightarrow & i \\ j - f'(i) & \hookrightarrow & j - i \end{array}$$

De plus, i est isomorphe à $\{(x, x') \in (j, j') \mid g(x) = g'(x')\} = \{(f(y), f'(y)) \mid y \in i\}$. □

Remarque 4.1. On peut représenter k par le schéma :



Proposition 4.2.2 (Cotopologie Atomique)**.** *A chaque* $i \in ob(\mathbf{Inj})$*, on associe l'ensemble* $\mathbf{T}(i)$ *des cocribles non vides de* i*, alors* $\mathbf{T}$ *est une cotopologie de* **Inj**. *On l'appelle la cotopologie atomique.*

Démonstration. On doit vérifier les trois points de la définition d'une cotopologie :

1. Pour tout $i \in ob(\mathbf{Inj})$, l'ensemble des injections partant de i : $\mathbf{Inj}(i, \_)$ est un crible non vide.
2. $\forall R \in \mathbf{T}(i)$, $\forall f : i \hookrightarrow j$, $\quad R^f = \{g : j \hookrightarrow k \mid g \circ f \in R\} \in \mathbf{T}(j)$ car c'est un crible non vide. En effet, soit $f' \in R$. On construit la somme amalgamée :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f'"'] & j \arrow[d, hook, dashed, "g"] \\ j' \arrow[r, hook, dashed, "g'"] & k \end{tikzcd}$$

   Alors $g \circ f = g' \circ f' \in R$, d'où $g \in R^f$.

3. Finalement,
$\forall R \in \mathbf{T}(i),\ \forall R'$ crible de i, puisque R est non vide, $\exists f : i \hookrightarrow j \in R,\ R'^f \in \mathbf{T}(j)$, alors $R'^f = \{g : j \hookrightarrow k \mid g \circ f \in R\}$ est non vide, R est non vide.

□

Théorème 4.2.3. *Soit un foncteur $F : \mathbf{Inj} \to \mathbf{Set}$ qui préserve les injections. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est un faisceau pour la cotopologie atomique.*
2. *$\forall i, j \in \mathbf{Inj},\ \forall f : i \to j$,*
   $\forall (x_h)_{h \in < f >}$ compatible, $\exists! x \in F(i)$ tel que $\forall h \in < f >, F(h)(x) = x_h$.
3. *$\forall i, j \in \mathbf{Inj},\ \forall f : i \to j$,*
   soit $k = i + 2 \cdot (j - i)$ le pushout de f et f :
$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f"'] & j \arrow[d, hook, "p"] \\ j \arrow[r, hook, "q"'] & k \end{tikzcd}$$
$$\forall y \in F(j) \text{ tel que } F(p)(y) = F(q)(y),\ \exists! x \in F(i) \text{ tel que } y = F(f)(x).$$
4. *F préserve les pullbacks.*

Démonstration. 1 ⇒ 2 En effet, la condition 2 est une restriction de la condition 1 aux cribles engendrés par une seule injection.

2 ⇒ 1 Soit R un crible non vide de i. Soit $(x_h)_{h \in R}$ une famille compatible, alors $\forall f \in R$, on considère le crible $< f >$. $(x_{g \circ f})$ est compatible et d'après la condition 2, il existe $x^f \in F(i)$ tel que $\forall g,\ x_{g \circ f} = F(g \circ f)(x^f)$.
On va voir que ces x^f ne dépendent pas du choix de f. Soient $f, f' \in R$, il existe g, g' tels que $g \circ f = g' \circ f'$ (cf. 4.2.1). La condition de compatibilité impose $x_{g \circ f} = F(g \circ f)(x^f) = x_{g' \circ f'} = F(g' \circ f')(x^{f'})$. Comme $F(g' \circ f')$ et $F(g \circ f)$ sont des injections, $x^f = x^{f'}$. On a donc trouvé x (cette valeur commune à tous les cribles engendrés par une fonction de R), qui vérifie la condition de faisceau.

2 ⇒ 3 Soient $f : i \hookrightarrow j$ et $k = i + 2\dot{(}j - i)$ la somme amalgamée de f et f :
$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f"'] & j \arrow[d, hook, dashed, "p"] \\ j \arrow[r, hook, dashed, "q"] & k \end{tikzcd}$$
Soit $y \in F(j)$ tel que $F(p)(y) = F(q)(y)$. On pose $x_f = y$ et pour tout $g : j \hookrightarrow \_$, $x_{g \circ f} = F(g)(y)$. Par la propriété de la somme amalgammée, si

$g \circ f = g' \circ f$, on a :

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f"'] & j \arrow[d, hook, dashed, "p"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
j \arrow[r, hook, dashed, "q"] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & k \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
 & & l
\end{tikzcd}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x_{g\circ f} &= F(g)(y) = F(r \circ p)(y) \\
&= F(r)(F(p)(y)) \\
&= F(r)(F(q)(y)) \\
&= x_{g'\circ f}
\end{aligned}$$

et la famille $(x_h)_{h\in <f>}$ est bien définie. Elle est compatible : $x_{g\circ(g'\circ f)} = F(g \circ g')(x_f) = F(g) \circ F(g')(x_f) = F(g)(x_{g'\circ f})$. Par la condition 1, il existe un unique $x \in F(i)$ tel que $y = x_f = F(f)(x)$.

$3 \Rightarrow 2$ Soit $(x_h)_{h\in <f>}$ une famille compatible. On considère la somme amalgamée de f et f :

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f"'] & j \arrow[d, hook, dashed, "p"] \\
j \arrow[r, hook, dashed, "q"] & k
\end{tikzcd}$$

Comme $p \circ f = q \circ f$ et $\forall g,\ x_{g\circ f} = F(g)(x_f)$, on a $F(p)(x_f) = F(q)(x_f)$. D'après la condition 2, $\exists! x \in F(i)$ tel que $x_f = F(f)(x)$

$4 \Rightarrow 3$ Soit k la somme amalgmée de f et f :

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "f"'] & j \arrow[d, hook, dashed, "p"] \\
j \arrow[r, hook, dashed, "q"] & k
\end{tikzcd}$$

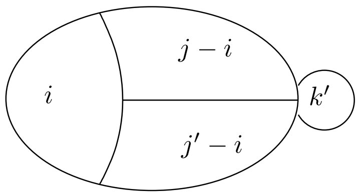
D'après 4.2.1, i est le produit fibré de p et q. D'après la condition 4, $F(i)$ est le pullback de $F(p)$ et $F(q)$. On considère alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "\exists! x"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
 & F(i) \arrow[r, hook, "F(f)"] \arrow[d, hook, "F(f)"'] & F(j) \arrow[d, hook, "F(p)"] \\
 & F(j) \arrow[r, hook, "F(q)"] & F(k)
\end{tikzcd}$$

$3 \Rightarrow 4$ Soit i le produit fibré de g et g' :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, hook, dashed, "f"] \arrow[d, hook, dashed, "f'"'] & j \arrow[d, hook, "g"] \\ j' \arrow[r, hook, "g'"] & k \end{tikzcd}$$

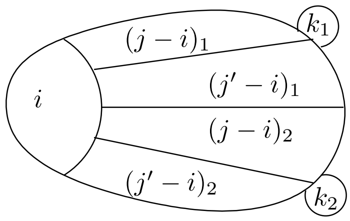
On peut alors identifier k à :



On pose $h = g \circ f = g' \circ f'$. h correspond à l'inclusion de i dans la patate ci-dessus. On considère la somme amalgamée l de h et h :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, hook, "h"'] & k \arrow[d, hook, dashed, "p"] \\ k \arrow[r, hook, dashed, "q"] & l \end{tikzcd}$$

On peut identifier $l = i + 2 \cdot (k - i)$ à la patate suivante où on a indicé les deux copies de $k - i$.

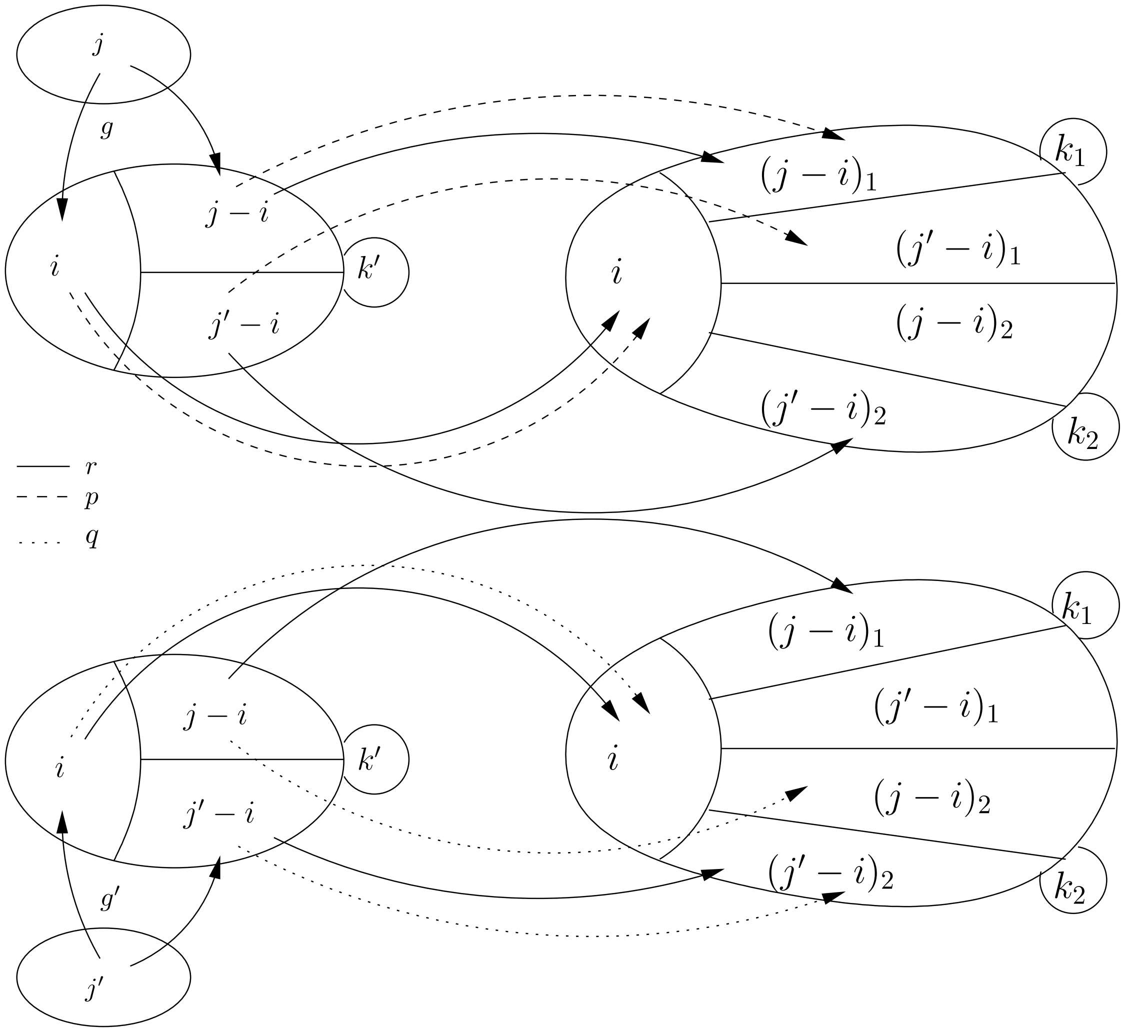


On définit une fonction $r : k \hookrightarrow l$ comme suit :

$$\begin{aligned} r_{|g(j)} &= p \\ r_{|g'(j')} &= q \end{aligned}$$

enfin, r envoie les éléments de k' sur leur copie dans k'_1 (ce dernier choix est arbitraire et n'a aucune d'importance). On vérifie que r est bien défini : Seuls $g(j)$ et $g(j')$ s'intersectent. Soit $x \in g(j) \cup g(j')$ alors $\exists y \in i$ tel que $x = g \circ f(y) = g' \circ f'(y) = h(y)$ car i est le poduit fibré de g et g'. Ainsi, $p(x) = p \circ h(y) = q \circ h(y) = q(x)$ car l est la somme amalgamée de h et h.

On peut résumer les fonctions g, g', p, q, et r par les diagrammes :



On a $p \circ g = r \circ g$ et $q \circ g' = r \circ g'$.
On veut montrer que $F(i)$ est le produit fibré de $F(p)$ et $F(q)$:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, hook, "F(f)"] \arrow[d, hook, "F(f)'"'] & F(j) \arrow[d, hook, "F(g)"] \\
F(j') \arrow[r, hook, "F(g')"] & F(k)
\end{tikzcd}$$

Soient $y \in F(j)$ et $y' \in F(j')$ tels que $F(g)(y) = F(g')(y')$. On cherche un unique $x \in F(i)$ tel que $y = F(f)(x)$ et $y' = F(f')(x')$. Soit $z = F(g)(y) = F(g')(y') \in F(k)$, alors

$$\begin{aligned}
F(p)(z) &= F(p \circ g)(y) = F(r \circ g)(y) = F(r)(F(g)(y)) \\
&= F(r)(F(g')(y')) = F(r \circ g')(y') = F(p \circ g')(y') \\
&= F(q)(z)
\end{aligned}$$

On applique alors la condition 3. Il existe ainsi un unique $x \in F(i)$ tel que $z = F(h)(x)$. Comme $z = F(g)(y) = F(g)F(f)(x)$ et F conserve les injections, on a : $y = F(f)(x)$. De même, $y' = F(f')(x')$.
Pour finir, on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, hook, dashed] \arrow[drr, hook, bend left, "\eta"] \arrow[ddr, hook, bend right, "\eta'"'] & & \\
& F(i) \arrow[r, hook, "F(f)"] \arrow[d, hook, "F(f)'"] & F(j) \arrow[d, hook, "F(g)"] \\
& F(j') \arrow[r, hook, "F(g')"] & F(k)
\end{tikzcd}$$

Pour tout $a \in X$, on pose $y_a = \eta(a)$ et $y'_a = \eta'(a)$. Comme le diagramme précédent commute, les conditions décrites ci-dessus sont réunies, il existe donc un unique $x_a \in F(i)$ tel que la fonction

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & F(i) \\ a & \mapsto & x_a \end{array}$$

est bien définie, injective et fait commuter le diagramme précédent.

$\square$

Conclusion

Pendant ce stage, j'ai pu découvrir la théorie des foncteurs analytiques et comprendre ses liens avec la sémantique dénotationnelle. Grâce aux outils combinatoires (WNF), nous avons mieux compris certaines constructions du modèle relationnel du second ordre. Ainsi, les opérations de quantification du second ordre et de point fixe peuvent s'exprimer directement sur les coefficients des foncteurs analytiques.
Par ailleurs, les foncteurs analytiques semblent être un outil efficace pour remplacer les foncteurs stables dans le modèle relationnel du second ordre, ces derniers étant trop complexes.
Le modèle relationnel du second ordre ne modélise pas bien l'élimination des coupures. Pour résoudre ce problème, on pourra peut-être utiliser les transformations naturelles cartésiennes à la place des objets de type variable.

Annexe A

Rappels catégoriques

A.1 Catégories

Définition A.1.1 (Petites catégories)**.** Une petite catégorie $\mathbf{C}$ la donnée :
- d'un ensemble d'objets $ob(\mathbf{C}$
- pour tous objets $A, B \in ob(\mathbf{C})$, d'un ensemble de morphisme noté $\mathbf{C}(A, B)$.
- d'un morphisme $id_A : A \to A$, pour chaque objet A, appelé identité sur A,
- d'un morphisme $g \circ f : A \to C$ pour toute paire de morphisme $f : A \to B$ et $g : B \to C$, appelé composée de f et g, qui sont tels que
  - la composition est associative : pour tous morphismes $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
  - les identités sont des éléments neutres de la composition : pour tout morphisme $f : A \to B$, $id_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A$.

Les catégories **Set** et **INJ** sont des petites catégories.

Définition A.1.2 (Catégorie slice)**.** Soient $\mathbf{C}$ une petite catégorie et $A \in ob(\mathbf{C})$. On appelle catégorie *slice* et on note $\mathbf{C} \downarrow A$ la catégorie dont :
- les objets sont les couples $\langle f, B\rangle$ où $B \in \mathbf{C}$ et $f : B \to A$.
- les morphismes sont les $h : \langle f, B\rangle \to \langle f', B'\rangle$ où $h : B \to B'$ est tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B' \arrow[dl, "f'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

A.2 Foncteurs

Définition A.2.1. Un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ d'une catégorie $\mathbf{C}$ dans une catégorie $\mathbf{D}$ est la donnée
- d'une fonction qui, à tout objet A de $\mathbf{C}$, associe un objet $F(A)$ de $\mathbf{D}$,
- d'une fonction qui, à tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathbf{C}$, associe un morphisme $F(f) : F(A) \to F(B)$ de $\mathbf{D}$, qui

– respectent les identités : pour tout objet A de $\mathbf{C}$, $F(id_A) = id_{F(A)}$,
– respectent la composition : pour tous objets A, B et C et morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de $\mathbf{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

A.3 Colimites filtrées

Définition A.3.1. Une catégorie $\mathbf{J}$ est dite *filtrée* lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes.
- $ob(\mathbf{J})$ n'est pas vide.
- Pour tous objets $j, j' \in \mathbf{J}$, il existe un objet $k \in ob(\mathbf{J})$ et deux morphismes $j \to k$ et $j' \to k$ dans $\mathbf{J}$
- Pour deux morphismes parallèles $u, u' : i \to j$ dans $\mathbf{J}$, il existe un objet $k \in ob(\mathbf{J})$ et un morphisme $v : j \to k$ tel que $v \circ u = v \circ u'$.

Définition A.3.2. Soient $\mathbf{J}$ et $\mathbf{C}$ des catégories, $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ un foncteur et $C \in ob(\mathbf{C})$. On appelle *cône* τ de base F et de sommet C le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[dr, "\tau_i"'] & F(j) \arrow[r, "F(v)"] \arrow[d, "\tau_j"] & F(k) \arrow[dl, "\tau_k"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

où $u : i \to j$ et $v : j \to k$ dans $\mathbf{J}$.

Définition A.3.3. Soient $\mathbf{J}$ et $\mathbf{C}$ des catégories, $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ un foncteur et $C \in ob(\mathbf{C})$ et τ un cône de base F. On appelle colimite la solution du problème universel suivant.

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[dr, "\rho_j"] \arrow[ddr, bend right, "\tau_i"'] & F(j) \arrow[r, "F(v)"] \arrow[d, "\rho_j"] \arrow[dd, bend right, "\tau_j"'] & F(k) \arrow[dl, "\rho_k"] \arrow[ddl, bend left, "\tau_k"] \\
& \underset{j \in \mathbf{J}}{colim} F(j) \arrow[d, dashed, "\exists !"] & \\
& C &
\end{tikzcd}$$

On dit que la colimite est *filtrée* lorsque la catégorie $\mathbf{J}$ est filtrée.

Proposition A.3.4. *Les catégories* **Set** *et* **INJ** *admettent toutes les colimites.*

Définition A.3.5. On note $\mathbf{N}$ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont définis par : $\forall n \leq m, \mathbf{N}(n, m) = \leq$. Cette catégorie correspond à l'ordre total des entiers naturels. On note aussi :

$$\mathbf{N} = \{0 \to 1 \to 2 \to \cdots\}$$

.

Proposition A.3.6. *Soient* $F : \mathbf{N} \to \mathbf{Set}$ *un foncteur et* $C \in ob(\mathbf{Set})$ *et* τ *un cône de base* F*. La colimite filtrée de* τ *coïncide avec l'union :*

$$\underset{n \in \mathbf{N}}{colim} F(n) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F(n)$$

.

A.4 Produits fibrés

Définition A.4.1. On appelle produit fibré de deux fonctions f et g, la solution P unique à isomorphisme près du problème universel suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left] \arrow[dr, dashed, "\exists ! h"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

Remarque A.1. Dans **Set**, le produit fibré existe toujours et il est isomorphe à :

$$\{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B,\ f(a) = g(b)\}$$

Définition A.4.2. On appelle produit fibré faible de deux fonctions f et g, une solution W du problème suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\exists h"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& W \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Proposition A.4.3. *On se place dans la catégorie* **Set**[1]. *Pour montrer qu'un ensemble W est un produit fibré faible, il suffit de montrer que l'unique fonction s telle que le diagramme suivant commute est surjective.*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "p_1"] \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[ddr, bend right, "p_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Démonstration. En effet, si s est surjective, alors il existe i telle que $s \circ i = id$. Comme P est un produit fibré, il existe un unique k tel que le diagramme suivant

[1] On peut se placer sur n'importe qu'elle caégorie où les épis sont *splitting*

commute :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists ? h"'] \arrow[ddr, bend left, "k"] \arrow[ddrr, bend left, "\alpha"] \arrow[dddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& W \arrow[dr, bend right, "s"'] \arrow[drr, bend left, "p_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2"'] & & \\
& & P \arrow[ul, "i"'] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

On pose $h = i \circ k$ et on vérifie qu'elle convient :

$$p_1 \circ h = p_1 \circ (i \circ k) = (\pi_1 \circ s) \circ i \circ k = \pi_1 \circ k = \alpha$$

$$p_2 \circ h = p_2 \circ (i \circ k) = (\pi_2 \circ s) \circ i \circ k = \pi_2 \circ k = \beta$$

$\square$

Annexe B

Autres définitions des foncteurs analytiques

Nous allons dans cette annexe donner d'autres définitions équivalentes des foncteurs analytiques : une définition (cf. [10]) qui s'exprime en terme d'extension de Kan, et une définition (cf. [1]) qui s'exprime en termes de quotient par des sous-groupes du groupe des permutations. Dans ce paragraphe, nous présentons ces différentes définitions, et nous démontrons leur équivalence.

B.1 Définition via les extensions de Kan

La définition des foncteurs analytiques peut être reformulée grâce aux extensions de Kan :

Proposition B.1.1. *On considère le foncteur* $K : \mathbf{\Sigma}(*) \hookrightarrow \mathbf{Set}$. *Un foncteur* $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ *est analytique si et seulement s'il est l'extension de Kan à gauche d'une espèce de structure* $F[\ ] : \mathbf{\Sigma}(*) \to \mathbf{Set}$ *le long de* K *:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} & \\
\mathbf{\Sigma}(*) \arrow[u, "F[\ ]"] \arrow[r, hook, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Longrightarrow"] & \mathbf{Set} \arrow[ul, dashed, "F(\ )"']
\end{tikzcd}$$

Le foncteur K est défini par : $K : n \in \mathbf{\Sigma}(*) \to [n] = \{1, ..., n\} \in \mathbf{Set}$

Démonstration. On va utiliser la formulation des extensions de Kan par les cofins [6] :

$$\forall A \in \mathbf{Set}, \quad (Lan_K F[\ ])A = \int^{n \in \mathbf{\Sigma}(*)} \mathbf{Set}([n], A) \cdot F[n]$$

Dans **Set**, les copuissances existent, ce sont les produits cartésiens. D'où :

$$\forall A \in \mathbf{Set}, \quad (Lan_K F[\ ])A = \int^n \mathbf{Set}([n], A) \times F[n]$$

La cofin est définie comme la solution du problème universel suivant :
$\forall \sigma : m \to n \in \mathbf{\Sigma}(*)$,

$$\begin{tikzcd}
& A^n \times F[n] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
A^n \times F[m] \arrow[ur, "A^n \times F[\sigma]"] \arrow[dr, "A^\sigma \times F[m]"'] & & \int^n A^n \times F[n] \arrow[r, dashed] & X \\
& A^m \times F[m] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Comme les morphismes dans $\mathbf{\Sigma}(*)$ sont des bijections, X ne s'appuie que sur les wedges de la forme :

$$\begin{tikzcd}
& A^n \times F[n] \arrow[drr, bend left] & & \\
A^n \times F[n] \arrow[ur, "A^n \times F[\sigma]"] \arrow[dr, "A^\sigma \times F[n]"'] & & & X \\
& A^n \times F[n] \arrow[uu, dotted, "A^{\sigma^{-1}} \times F[\sigma]"] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Tous les éléments d'une orbite de $A^n \times F[n]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ (cf.Def 1.1.1) sont envoyés sur le même élément dans X. On peut donc factoriser le cône par le quotient :

$$\begin{tikzcd}
& A^n \times F[n] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
A^n \times F[n] \arrow[ur, "A^n \times F[\sigma]"] \arrow[dr, "A^\sigma \times F[n]"'] & & A^n \times F[n]/\mathfrak{S}_n \arrow[r, dashed] & X \\
& A^n \times F[n] \arrow[uu, dotted, "A^{\sigma^{-1}} \times F[\sigma]"] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

On prend la somme de chacun des wedges :

$$\begin{tikzcd}
A^n \times F[n] \arrow[loop above, "\sigma"] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& \sum_n A^n \times F[n]/\mathfrak{S}_n \arrow[r, dashed] & X \\
A^m \times F[m] \arrow[loop below, "\sigma'"] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

La somme que l'on vient de construire est solution du même problème universel que la cofin. On a alors :

$$\int^n A^n \times F[n] = \sum_n A^n \times F[n]/\mathfrak{S}_n$$

$\square$

B.2 Définition via les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$

Voici une troisième définition équivalente de foncteur analytique qui est utilisée dans le papier de Ryu Hasegawa [1].

Proposition B.2.1. *Un foncteur F est analytique si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme :*

$$F(A) = \sum_{n,\circ} \mathbf{Set}(n, A)/G_{n,\circ}$$

où $G_{n,\circ}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Soit F un foncteur analytique :

$$\forall A \in \mathbf{Set}, \quad F(A) = \sum_n A^n \times F[n]/\mathfrak{S}_n$$

Pour tout n, on peut écrire $F[n]$ comme l'union disjointe de ses orbites par l'action de $\mathfrak{S}_n$:

$$F[n] = \sum_\circ F_\circ[n] \simeq \sum_\circ \mathfrak{S}_n/G_{n,\circ}$$

où $G_{n,\circ}$ est le stabilisateur d'un élément de $F_\circ[n]$. En utilisant le fait que les coproduits commutent aux quotients et aux produits cartésiens (cf. paragraphe suivant), on obtient :

$$F(A) = \sum_n \sum_\circ A^n \times (\mathfrak{S}_n/G_\circ)/\mathfrak{S}_n$$

Reste à montrer que : $[A^n \times (\mathfrak{S}_n/G_{n,\circ})]/\mathfrak{S}_n \simeq A^n/G_{n,\circ}$.
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} A^n/G_\circ & \to & [A^n \times (\mathfrak{S}_n/G_\circ)]/\mathfrak{S}_n \\ [p] & \mapsto & [p,(1)] \end{array}$$

Cette fonction est bien définie : soit $\sigma \in G_\circ$ alors

$$[p,(1)] = [p,(\sigma)] = [\sigma \cdot (p \circ \sigma^{-1},(1))] = [p \circ \sigma^{-1},(1)]$$

Cette fonction est surjective : soit $[p,(\sigma)] \in [A^n \times (\mathfrak{S}_n/G_\circ)]/\mathfrak{S}_n$ alors,

$$[p,(\sigma)] = [p \circ \sigma^{-1},(1)]$$

Cette fonction est injective : soient $[p,(1)] = [p',(1)]$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $p \circ \sigma^{-1} = p'$ et $(\sigma) = (1) \in \mathfrak{S}_n/G_\circ$. De cette dernière égalité, on déduit que $\sigma \in G_\circ$ et $[p] = [p'] \in A^n/G_\circ$.

La réciproque peut se montrer en utilisant les WNF comme dans la preuve de 2.1.1. En effet, les foncteurs de la forme $\sum_i \mathbf{Set}(n,-)/G_{n_i}$ où G_{n_i} est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ préservent les produits fibrés faibles et les colimites filtrées. $\square$

Bibliographie

[1] Hasegawa (R.). « Two applications of analytic functors ». 2006.

[2] Girard (J.-Y.), « The system F of variable types, fifteen years later », *Theoretical Computer Science*, vol. 45, 1986, p. 159–192.

[3] Joyal (A.), « Foncteurs analytiques et espèces de structure », dans *Combinatoire Enumérative*, vol. 1234 (coll. *Lecture Notes in Mathematics*), p. 126–159. Springer Verlag, 1986.

[4] Girard (J.-Y.), « Normal functors, power series and λ-calculus », *Annals of Pure and Applied logic*, vol. 37, 1988, p. 129–177.

[5] Bergeron (F.) et Gilbert Labelle (P. L.), *Combinatorial species and tree-like structures*, vol. 67 (coll. *Encyclopedia of Mathematis and its Applications*). Cambridge University Press, 1997.

[6] MacLane (S.), *Categories for the Working Mathematician*, vol. 5 (coll. *Graduate Texts in Mathematics*). Springer Verlag, 1971.

[7] Bac-Bruasse (A.), *Logique linéaire indexée du second ordre.* Thèse de doctorat, 2001.

[8] Bac-Bruasse (A.) et Ehrhard (T.). « The relational (not quite a) model of second-order linear logic ». 2006.

[9] MacLane (S.) et Moerdijk (I.), *Sheaves in geometry and logic, a first introduction to topos theory*, coll. « Universitext ». Springer Verlag, 1992.

[10] Gambino (N.). « Generalised species of structures », Déc. 2005. Paris.