

Développement de Taylor des programmes informatiques

Christine TASSON
tasson@pps.jussieu.fr

Laboratoire Preuves Programmes Systèmes - Université Paris Diderot

Rencontres Mathématiques de Cachan 2007
13 décembre 2007



Les mains dans le cambouis.

Taylor et
l'informatique

On considère le programme qui calcule la fonction :

$$(x, n) \mapsto x^n + 1$$

Modéliser

Programmes...

...et maths

Réseaux diff.

Langage

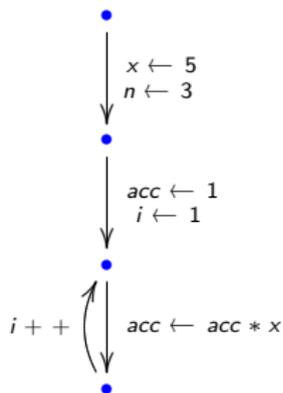
Calcul.

Développement
de Taylor

```

public class Puissance{
  public static void main(String[] args){
    int n=args[0];
    int x=args[1];
    println(puissance(n,x)+1);
  }
  public static int puissance(int n, int x){
    int acc=1;
    for (i=1 ; i<=n ; i++){
      acc = acc * x;
    }
    return acc;
  }
}

```



Questions :

- Comment le résultat est-il calculé ?
- Combien de fois utilise-t-on chacun des arguments ?



Les programmes sont modélisés par des fonctions :

$$[Prog] : A \rightarrow B$$

Le modèle vectoriel :

- arguments, résultats : espaces vectoriels
- programmes : fonctions linéaires



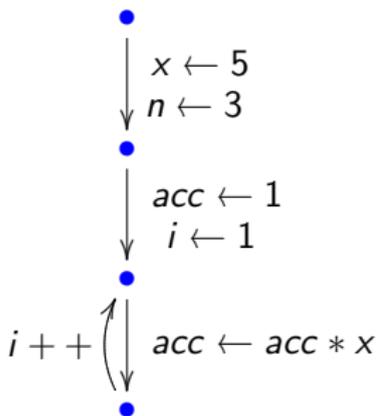
Linéarité, une analogie

Taylor et
l'informatique

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.
Langage
Calcul.
Développement
de Taylor

- Une fonction est dite linéaire si son résultat est proportionnel à son argument.
- Un programme est dit linéaire s'il utilise une *seule* fois son argument au cours de son évaluation.



Comment coder un programme
qui n'est pas linéaire ?

On le décompose en :

- une partie linéaire \rightarrow
- une partie exponentielle : !

[Puissance] : $N \times !X \rightarrow R$



Comment faire une approximation linéaire d'un programme ?

En mathématiques, le calcul différentiel nous permet d'approximer certaines fonctions par des fonctions linéaires :

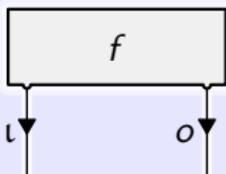
$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} f(0) + f'(0)x$$

On peut même décomposer les fonctions analytique en une somme de fonctions n -linéaires :

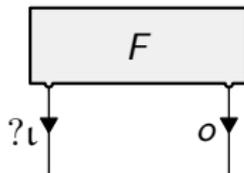
$$f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



Fonction linéaire :

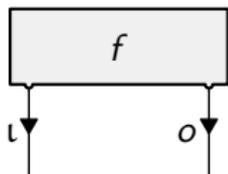


Fonction analytique :

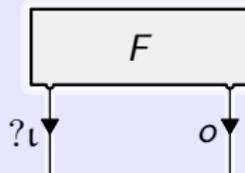




Fonction linéaire :



Fonction analytique :





Définitions des réseaux différentiels (1/3)

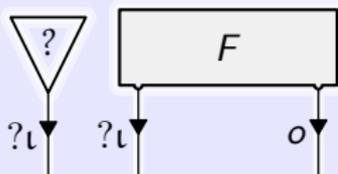
Taylor et l'informatique

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

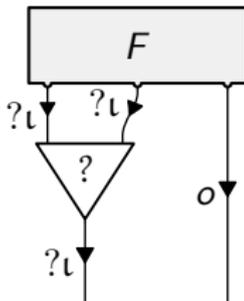
Langage
Calcul.
Développement
de Taylor

$$G : x, y \mapsto F(x)$$



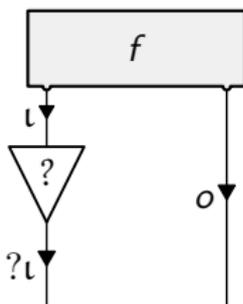
Affaiblissement

$$G : x \mapsto F(x, x)$$



Contraction

$$G : x \mapsto f(x) + \sum 0 \times \frac{x^n}{n!}$$



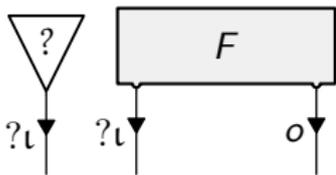
Déréliction



Définitions des réseaux différentiels (1/3)

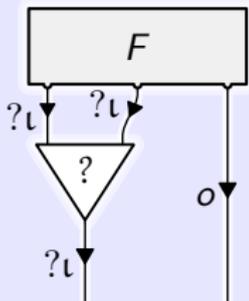
Taylor et l'informatique

$$G : x, y \mapsto F(x)$$



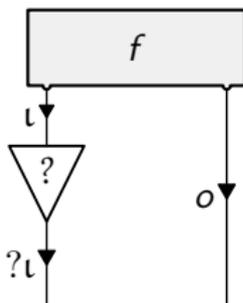
Affaiblissement

$$G : x \mapsto F(x, x)$$



Contraction

$$G : x \mapsto f(x) + \sum 0 \times \frac{x^n}{n!}$$



Déréliction

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

Langage

Calcul.
Développement
de Taylor



Définitions des réseaux différentiels (1/3)

Taylor et l'informatique

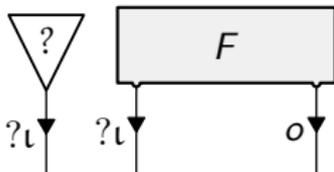
Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

Langage

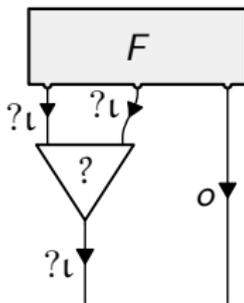
Calcul.
Développement
de Taylor

$$G : x, y \mapsto F(x)$$



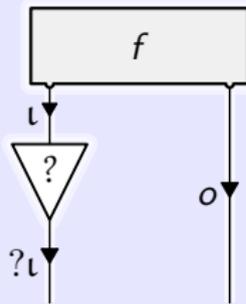
Affaiblissement

$$G : x \mapsto F(x, x)$$



Contraction

$$G : x \mapsto f(x) + \sum 0 \times \frac{x^n}{n!}$$



Déréliction



Définitions des réseaux différentiels (2/3)

Taylor et
l'informatique

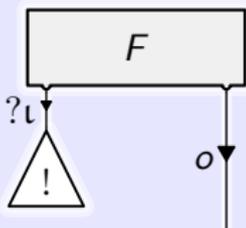
Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

Langage

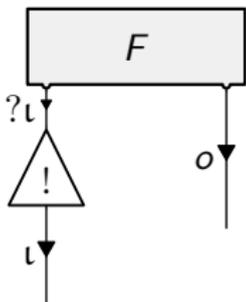
Calcul.
Développement
de Taylor

$$G : x \mapsto F(0)$$

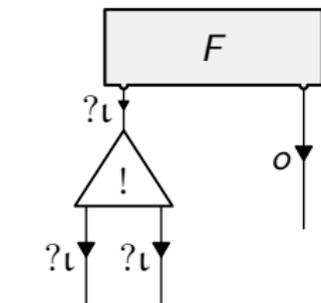


Co-affaiblissement

$$g : x \mapsto F'(0) * x$$



$$G : x, y \mapsto F(x + y)$$



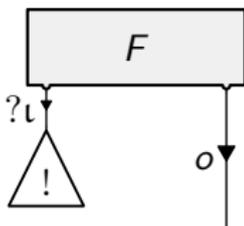
Co-contraction



Définitions des réseaux différentiels (2/3)

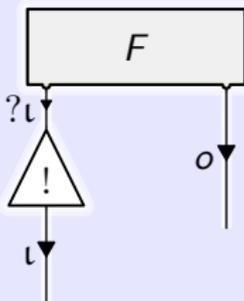
Taylor et l'informatique

$$G : x \mapsto F(0)$$



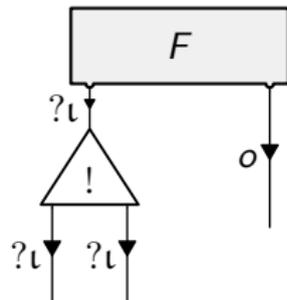
Co-affaiblissement

$$g : x \mapsto F'(0) * x$$



Co-déréliction

$$G : x, y \mapsto F(x + y)$$



Co-contraction

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

Langage

Calcul.
Développement
de Taylor



Définitions des réseaux différentiels (2/3)

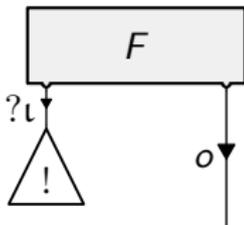
Taylor et l'informatique

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

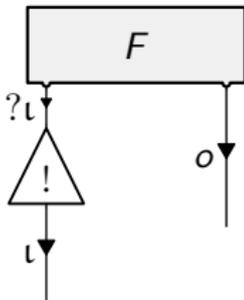
Langage
Calcul.
Développement
de Taylor

$$G : x \mapsto F(0)$$



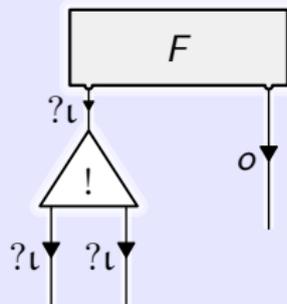
Co-affaiblissement

$$g : x \mapsto F'(0) * x$$



Co-déréliction

$$G : x, y \mapsto F(x + y)$$



Co-contraction



Définitions des réseaux différentiels (3/3)

Taylor et
l'informatique

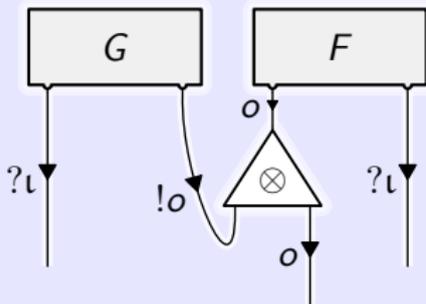
Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

Langage

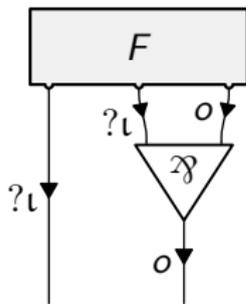
Calcul.
Développement
de Taylor

$$x, y \mapsto F(G(x), y)$$



Tenseur

$$x \mapsto [y \mapsto F(x, y)]$$



Par



Définitions des réseaux différentiels (3/3)

Taylor et
l'informatique

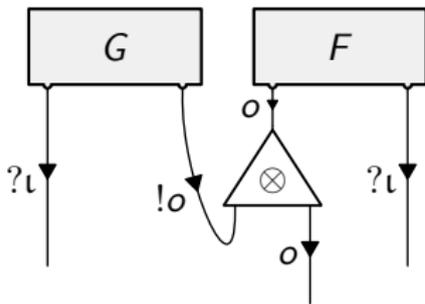
Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.

Langage

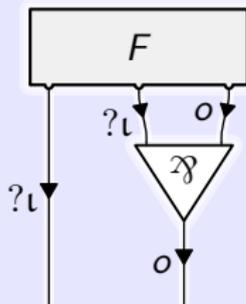
Calcul.
Développement
de Taylor

$$x, y \mapsto F(G(x), y)$$



Tenseur

$$x \mapsto [y \mapsto F(x, y)]$$



Par



Règles de calcul (1/3)

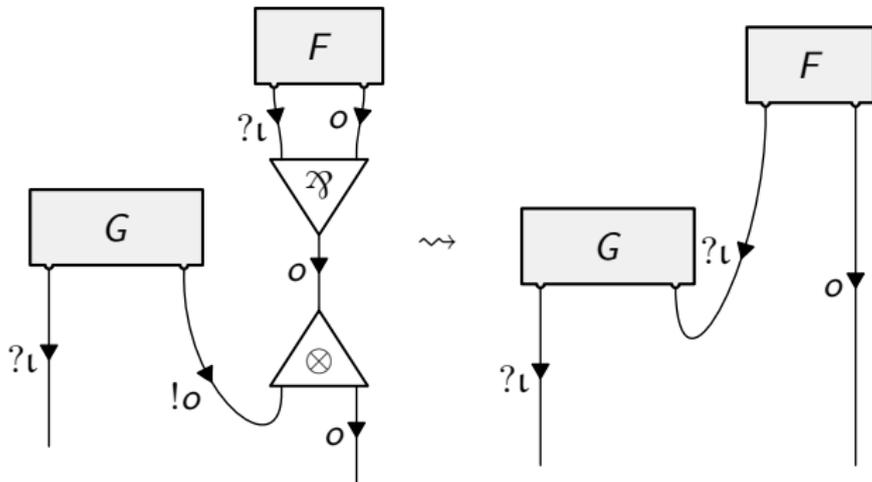
Taylor et
l'informatique

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.
Langage
Calcul.
Développement
de Taylor

Tenseur/Par :

$$F(G(X)) = F \circ G(X)$$





Règles de calculs (2/3)

Taylor et
l'informatique

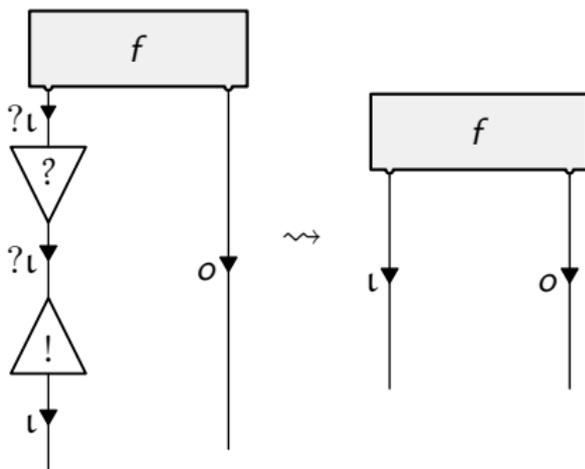
Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.
Langage
Calcul.

Développement
de Taylor

Linéarité :

Si f est linéaire, alors $Df = f$.





Règles de calculs (3/3)

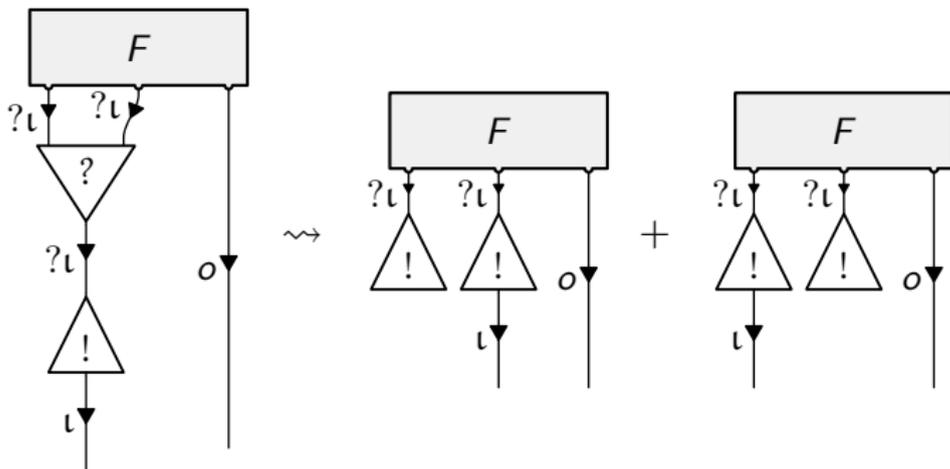
Taylor et
l'informatique

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.
Langage
Calcul.
Développement
de Taylor

Contraction/Codéréliction :

$$D_0(x \mapsto F(x, x)) = \partial_1 F(0, 0) + \partial_2 F(0, 0)$$





Théorème

Tout programme P peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P = \sum_{p \in \mathcal{I}(P)} \frac{1}{m(p)} p$$

Interprétation :

- p est une version de P qui utilise exactement n fois son argument.
- $m(p)$ nombre de façon d'obtenir le terme p .
- $\mathcal{I}(P)$ ensemble des approximations n -linéaires de P .



Résumé :

- Un modèle des programmes.
- Une analogie : la linéarité.
- Création d'un nouveau langage de programmation et des applications inattendues (la concurrence).
- De nouveaux modèles.

Mon problème :

- Le développement de Taylor a été démontré pour une classe restreinte de réseaux. Je dois le démontrer un cadre plus général.



Merci, des questions ?

Taylor et
l'informatique

Modéliser
Programmes...
...et maths

Réseaux diff.
Langage
Calcul.

Développement
de Taylor

One should allow oneself to be led in the direction which the mathematics suggests. . . One must follow up a mathematical idea and see what its consequences are, even though one gets led to a domain which is completely foreign to what one started with. . . Mathematics can lead us in a direction we would not take if we only followed up physical ideas by themselves.

Paul Dirac