Une version *algébrique* de la totalité

Groupe de travail sémantique de PPS

Christine Tasson

6 mai 2008

Un peu d'histoire.

La logique linéaire est née de la décomposition de $X \Rightarrow Y$ en deux opérateurs $!X \multimap Y$ dans le modèle des espaces de cohérence.

Son nom provient de l'analogie entre les fonctions linéaires (algèbre linéaire) et les programmes linéaires.

Les intuitions provenant de l'algèbre linéaire ont été renforcées par le développement de la logique linéaire différentielle.

Modèles et algèbre linéaire.

- MALL : Espaces vectoriels de dimension finie.

$$\begin{array}{rcll} X \mathbin{\&} Y,\, X \oplus Y & \rightsquigarrow & [X] \oplus [Y] & \textit{Somme directe} \\ X \parr Y,\, X \otimes Y & \rightsquigarrow & [X] \otimes [Y] & \textit{Produit tensoriel} \\ X^{\perp} & \rightsquigarrow & [X]' & \textit{Dual} \\ X \multimap Y & \rightsquigarrow & \mathcal{L}([X], [Y]) & \textit{Fonctions linéaires} \end{array}$$

  Le modèle des espaces vectoriels et le modèle relationnel sont reliés par la *base*.

- MELL : Dans le modèle relationnel, l'exponentielle est interprété par un ensemble infini.

$$!X \quad \rightsquigarrow \quad \text{Espace vectoriel de dimension infinie.}$$

Différentes tentatives.

Avec les espaces de dimension infinie, on rencontre plusieurs problèmes :

- Quelle notion de base ?
- Comment assurer la réflexivité ($X^{\perp\perp} = X$) ?

Pour les résoudre, on introduit de la topologie, comme dans

[Blute] *Linear Lauchli semantics*, Annals of Pure and Applied Logici, 1996

[Girard] *Coherent Banach spaces*, Theoretical Computer Science, 1999

[Ehrhard] *On Köthe sequence spaces and linear logic*, Mathematical Structures in Computer Science, 2002

[Ehrhard] *Finiteness spaces*, Mathematical Structures in Computer Science, 2005

Sommaire.

Un raffinement du modèle relationnel.

Definition

Soit $|X|$ un ensemble dénombrable, pour tout $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(|X|)$, on pose

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{u' \subseteq |X| \,|\, \forall u \in \mathcal{F},\ u \cap u' \text{ finie}\}\,.$$

Un *espace de finitude* est un couple $X = (|X|, \mathcal{F}(X))$ tel que $\mathcal{F}(X)^{\perp\perp} = \mathcal{F}(X)$.

Exemple : Les entiers naturels.

Expressivité

Les espaces de finitude permettent d'interpréter

- le *système* T (Logique linéaire + entiers + itérateur)
- mais pas le *point fixe*.

Des espaces vectoriels topologiques.

Pour tout $x \in \mathbf{k}^{|X|}$, le *support* de x est $|x| = \{a \in |X| \,|\, x_a \neq 0\}$.

Definition

L'*espace vectoriel* associé à $X = (|X|, \mathcal{F}(X))$ est :

$$\mathbf{k}\langle X\rangle = \{x \in \mathbf{k}^{|X|} \,|\, |x| \in \mathcal{F}(X)\}.$$

Il est muni d'une *topologie* définie par la base $\{V_J \,|\, J \in \mathcal{F}^{\perp}\}$ où

$$V_J = \{x \in \mathbf{k}\langle X\rangle \,|\, |x| \cap J = \emptyset\}.$$

Exemple : Les entiers naturels.

Un modèle de la logique linéaire.

$$X^\perp \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{k}\langle X\rangle' \qquad \Rightarrow \text{Réflexivité}$$

$$0 \quad \rightsquigarrow \quad \{0\}$$

$$\left.\begin{array}{c} X \& Y \\ X \oplus Y \end{array}\right\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{k}\langle X\rangle \oplus \mathbf{k}\langle Y\rangle$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightsquigarrow & \mathbf{k} \\ X \multimap Y & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_c(X, Y) \\ X \otimes Y & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle X\rangle \otimes \mathbf{k}\langle Y\rangle \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} !X \\ ?X \end{array}\right\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{k}\langle !X\rangle \qquad \Rightarrow \text{Dimension infinie}$$

où
$$\begin{array}{rcl} |!X| & = & \mathcal{M}_{fin}(|X|) \\ \mathcal{F}(!X) & = & \{A \subseteq \mathcal{M}_{fin}(|X|) \mid \bigcup_{m\in A}|m| \in \mathcal{F}X\} \end{array}$$

La totalité dans le monde.

La totalité permet d'interpréter plus précisément les preuves.

Totalité dans les espaces de cohérence

Espace de cohérence $X = (|X|, \mathcal{C}(X))$ tel que $\mathcal{C}(X)^{\perp\perp} = \mathcal{C}(X)$ où :

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{c' \in \mathcal{P}(|X|) \,|\, \forall c \in \mathcal{C},\ \#(c \cap c') \leq 1\}\,.$$

Espace de totalité $(|X|, \Theta(X))$ tel que $\Theta(X)^{\bullet\bullet} = \Theta(X)$ où :

$$\Theta^{\bullet} = \{c' \in \mathcal{P}(|X|) \,|\, \forall c \in \Theta,\ \# c \cap c' = 1\}\,.$$

- [Girard] *The system F of variable types, fifteen years later*, Theoretical Computer Science, 1986
- [Loader] *Linear Logic, Totality and Full Completness*, Logic in Computer Science, 1994

La totalité algébrique.

Definition

Un espace de finitude avec totalité est un couple $(X, \mathcal{T}(X))$ où X est un espace de finitude et $\mathcal{T}(X)$ est une partie de $\mathbf{k}\langle X\rangle$ telle que $\mathcal{T}(X)^{\bullet\bullet} = \mathcal{T}(X)$ où

$$\mathcal{T}^{\bullet} = \{x' \in \mathbf{k}\langle X\rangle' \,|\, \forall x \in \mathcal{T},\ \langle x', x\rangle = 1\}.$$

Proposition

Soit $\mathcal{T}$ une partie de $\mathbf{k}\langle X\rangle$.

$$\mathcal{T}^{\bullet\bullet} = \mathcal{T} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \mathcal{T} \text{ est un sous-espace affine fermé} \\ \text{et } 0 \notin \mathcal{T} \end{cases}$$

Expressivité :

Le *sytème T*, la fonction de *Gustave*, mais pas le *por*.

Le modèle.

$$
\begin{array}{cccc}
X^{\perp} & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle X\rangle' & \mathcal{T}(X)^{\bullet} \\
\\
0 & \rightsquigarrow & \{0\} & \emptyset \\
X \& Y & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle X\rangle \oplus \mathbf{k}\langle Y\rangle & \mathcal{T}(X) \times \mathcal{T}(Y) \\
X \oplus Y & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle X\rangle \oplus \mathbf{k}\langle Y\rangle & \overline{\mathrm{aff}}(\mathcal{T}(X) \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathcal{T}(Y)) \\
\\
1 & \rightsquigarrow & \mathbf{k} & \{1\} \\
X \multimap Y & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_c(X, Y) & \{f \mid f(\mathcal{T}(X)) \subseteq \mathcal{T}(Y)\} \\
X \otimes Y & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle X\rangle \otimes \mathbf{k}\langle Y\rangle & \overline{\mathrm{aff}}(\mathcal{T}(X) \otimes \mathcal{T}(Y)) \\
\\
!X & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle !X\rangle & \overline{\mathrm{aff}}(x^{!} \mid x \in \mathcal{T}(X)) \\
?X & \rightsquigarrow & \mathbf{k}\langle !X\rangle & \{z \mid \forall x' \in \mathcal{T}(X)^{\bullet},\ \langle x', z\rangle = 1\}
\end{array}
$$

Lefschetz et les autres.

Les espaces munis d'une topologie linéarisée ont été introduits par S. Lefschetz en 1942.

On les retrouve en logique linéaire chez :

- [Barr] *$\star$-autonomous Categories*, Lecture Notes in Mathematics, 1979
- [Blute] *Linear Lauchli semantics*, Annals of Pure and Applied Logici, 1996
- [Ehrhard] *Finiteness spaces*, Mathematical Structures in Computer Science, 2005

Les espaces de Lefschetz.

Definition

Soit E un **k**-espace vectoriel muni d'une topologie $\mathcal{T}$.
E est un *espace de Lefschetz* lorsque :

- k est muni de la topologie discrète.
- Il existe une filtre $\mathcal{V}$ de sous-espaces vectoriels qui engendre $\mathcal{T}$.
- $\bigcap \mathcal{V} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad$ la topologie est Hausdorff.

Exemple : Les espaces de finitude munis de la topologie de la base.
Les suites finies $\mathbf{k}^{(\omega)}$ muni de la topologie de la codimension finie.

Une topologie contre-intuitive

- Tous les espaces vectoriels de dimension finie sont discrets.
- Les boules ouvertes sont des sous-espaces affines.
- Les sous-espaces ouverts sont aussi fermés (topologie totalement déconnectée).

Opérations : Le produit.

Definition

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz. Le produit $\prod_{i\in I} E_i$, muni de la topologie produit, est un espace de Lefschetz qui admet comme système fondamental :

$$\left\{\prod_{i\in J} V_i \times \prod_{k\notin J} E_k \,|\, J\subseteq I,\, J \text{ finie and } \forall i\in J,\ V_i\in\mathcal{V}_i\right\}$$

où $\mathcal{V}_i$ est un système fondamental de E_i.

Exemple $\mathbf{k}\langle N^\perp\rangle$ est l'espace des suites $\mathbf{k}^\omega$ muni de la topologie produit.

Opérations : Les fonctions.

Definition

Soient E et F deux espaces de Lefschetz.
$\mathcal{L}_c(E,F)$ espace des fonctions linéaires continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts est un espace de Lefschetz qui admet pour système fondamental :

$$W(K,V_F)=\{f\in\mathcal{L}_c(E,F)|\ f(K)\subseteq V_F\}$$

où $V_F\in\mathcal{V}_F$ et K est linéairement compact dans E.

Opérations : Les fonctions.

Linéairement compact

K un sous-espace de E est linéairement compact ssi
Pour tout filtre $\mathcal{F}$ de sous-espaces affines fermés :

$$(\forall F \in \mathcal{F},\ F \cap K \neq \emptyset) \Rightarrow (K \cap (\cap \mathcal{F}) \neq \emptyset)\ .$$

Exemple : Linéairement compact d'un espace de finitude.

Théorème

K est linéairement compact si et seulement si il est homéomorphe à k^W muni de la topologie produit où W est une famille quelconque.

Exemple : Dans $\mathbf{k}^{(\omega)}$ muni de la topologie de la codimension finie, les linéairement compacts sont les sev de dimension finie.

Opérations : Le dual.

Definition

Soit E un espace de Lefschetz. E' l'espaces des formes linéaires continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compact est un espace de Lefschetz qui admet comme système fondamental :

$$\mathrm{ann}(K) = \{x' \in E' \mid \forall x \in K,\ \langle x', x \rangle = 0\}$$

où K est linéairement compact.

Exemple : Les espaces de finitude.

Proposition

Le dual d'un linéairement compact est discret.

$$\text{A-t-on } X^{\perp\perp} = X, \text{ i.e. } E'' \sim E\,?$$

Contre-exemple :
$k^{(\omega)}$ muni de la topologie de la codimension finie.

On a quand même un **isomorphisme ouvert** entre E et E'' :

$$\iota : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & (\phi_x : x' \mapsto \langle x', x \rangle) \end{array} \right.$$

Théorèmes de séparation.

Théorème

Pour tout F sous-espace affine fermé de E qui ne contient pas 0, il existe $x' \in E'$ tel que pour tout $x \in F$, $\langle x', x \rangle = 1$.

Théorème

Pour tout F' sous-espace affine fermé de E' qui ne contient pas 0, il existe $x \in E$ tel que pour tout $x' \in F'$, $\langle x', x \rangle = 1$.

Corollaire

Soit E un espace de Lefschetz.
Une partie $\mathcal{T}$ de E est égale à sa bipolaire pour

$$\mathcal{T}^{\bullet} = \{x' \in E' \mid \forall x \in \mathcal{T},\, \langle x', x \rangle = 1\}$$

ssi $\mathcal{T}$ est un sous-espace affine fermé qui ne contient pas zéro.

Le concept de totalité existe dans les espaces de Lefschetz.

Conclusion.

- On a construit un modèle algébrique de la totalité, qui repose sur les espaces de finitude.
- On espère trouver les bonnes conditions pour généraliser les espaces de finitude dans les espaces de Lefschetz et s'affranchir des bases.
- On a quelques pistes (Espaces linéairement compactement engendrés).