Foncteurs analytiques et logique linéaire

Stage de M2

Christine Tasson

Sous la direction de P.-L. Curien et de T. Ehrhard

MPRI

13 septembre 2006

Introduction

- Pour éviter les bugs, les programmes bien typés.
- Pour comprendre les programmes et leur type, la sémantique.
- Pour abstraire les modèles, les catégories.

Opérateur de structure

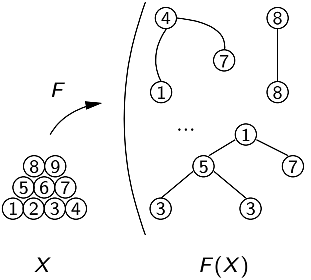
Opérateur de renommage

Exemple : Arbres enracinés.

Introduction : Foncteurs et structures de données

Opérateur de structure

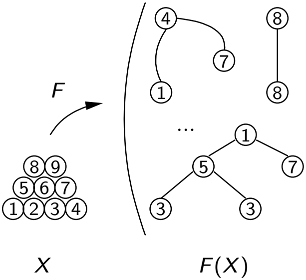
Opérateur de renommage



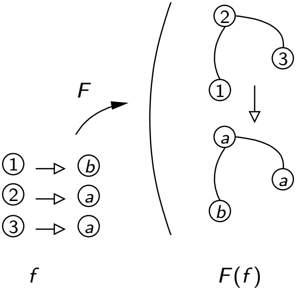
Exemple : Arbres enracinés.

Introduction : Foncteurs et structures de données

Opérateur de structure



Opérateur de renommage



Exemple : Arbres enracinés.

Historique

- La combinatoire (A. Joyal)

  Séries génératrices $\longrightarrow$ Foncteurs analytiques [Joy86]

- La sémantique dénotationnelle (J.-Y. Girard)
  - Foncteurs normaux $\longrightarrow$ termes du λ-calcul [Gir88]
  - Foncteurs stables $\longrightarrow$ types du Système F [Gir86]

$\boxed{\text{Foncteurs normaux}} \subsetneq \boxed{\text{Foncteurs analytiques}} \subsetneq \boxed{\text{Foncteurs stables}}$

Historique

- La combinatoire (A. Joyal)

  Séries génératrices $\longrightarrow$ Fonceurs analytiques [Joy86]

- La sémantique dénotationnelle (J.-Y. Girard)
  - Foncteurs normaux $\longrightarrow$ termes du λ-calcul [Gir88]
  - Foncteurs stables $\longrightarrow$ types du Système F [Gir86]

Foncteurs normaux $\subsetneq$ Foncteurs analytiques $\subsetneq$ Foncteurs stables

Historique

- La combinatoire (A. Joyal)

  Séries génératrices $\longrightarrow$ Foncteurs analytiques [Joy86]

- La sémantique dénotationnelle (J.-Y. Girard)
  - Foncteurs normaux $\longrightarrow$ termes du λ-calcul [Gir88]
  - Foncteurs stables $\longrightarrow$ types du Système F [Gir86]

Fonceurs normaux $\subsetneq$ Foncteurs analytiques $\subsetneq$ Foncteurs stables

Historique

- La combinatoire (A. Joyal)

  Séries génératrices $\longrightarrow$ Foncteurs analytiques [Joy86]

- La sémantique dénotationnelle (J.-Y. Girard)
  - Foncteurs normaux $\longrightarrow$ termes du λ-calcul [Gir88]
  - Foncteurs stables $\longrightarrow$ types du Système F [Gir86]

$\boxed{\text{Foncteurs normaux}} \subsetneq \boxed{\text{Foncteurs analytiques}} \subsetneq \boxed{\text{Foncteurs stables}}$

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Définition des foncteurs analytiques

Les séries génératrices

Une série génératrice est une fonction qui peut s'écrire sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_n a_n \cdot x^n$$

$a_n =$ cardinal d'un ensemble construit à partir de n éléments.

Exemple : nombres de Catalan.

Définition des foncteurs analytiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_n a_n \cdot x^n$$

Définition

Un foncteur F : **Set** $\rightarrow$ **Set** est dit *analytique* s'il peut s'écrire sous la forme :

$$\forall X \in \mathbf{Set},\ F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n$$

Notations :

- $F[n]$ ensemble construit à partir de n éléments
- X^n ensemble des fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans X
- $/\mathfrak{S}_n$ quotient par les permutations de $\{1, \ldots, n\}$

Définition des foncteurs analytiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_n a_n \cdot x^n$$

Définition

Un foncteur F : **Set** $\to$ **Set** est dit *analytique* s'il peut s'écrire sous la forme :

$$\forall X \in \mathbf{Set},\ F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n$$

Notations :

- $F[n]$ ensemble construit à partir de n éléments
- X^n ensemble des fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans X
- $/\mathfrak{S}_n$ quotient par les permutations de $\{1, \ldots, n\}$

Définition des foncteurs analytiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_n a_n \cdot x^n$$

Définition

Un foncteur F : **Set** $\to$ **Set** est dit *analytique* s'il peut s'écrire sous la forme :

$$\forall X \in \mathbf{Set},\ F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n$$

Notations :

- $F[n]$ ensemble construit à partir de n éléments
- X^n ensemble des fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans X
- $/\mathfrak{S}_n$ quotient par les permutations de $\{1, \ldots, n\}$

Définition des foncteurs analytiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_n a_n \cdot x^n$$

Définition

Un foncteur F : **Set** $\rightarrow$ **Set** est dit *analytique* s'il peut s'écrire sous la forme :

$$\forall X \in \mathbf{Set}, \; F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n$$

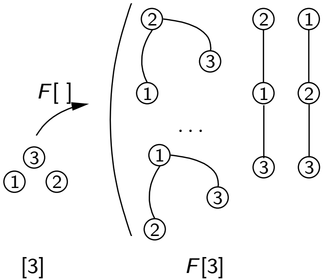
Notations :

- $F[n]$ ensemble construit à partir de n éléments
- X^n ensemble des fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans X
- $/\mathfrak{S}_n$ quotient par les permutations de $\{1, \ldots, n\}$

Description de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$

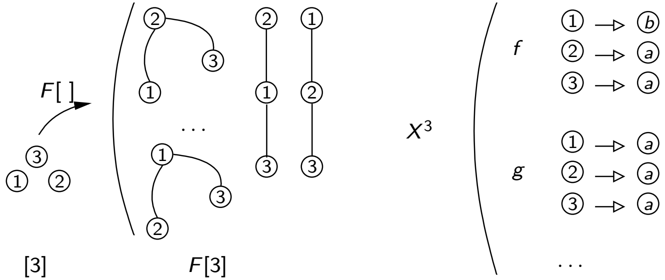
Forme normale = édifice avec étiquettes distinctes



Description de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$

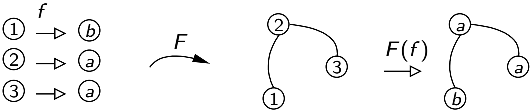
Tout édifice est obtenu par renommage d'un édifice sous forme normale.



Description de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$

Tout édifice est obtenu par renommage d'un édifice sous forme normale.



Théorème de forme normale

Théorème

Un foncteur F est analytique si et seulement s'il préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles.

Dans ce cas, il vérifie une propriété de forme normale :

$\forall x \in F(X),\ \exists! n, \exists z \in F(n)$ normal, $\exists f \in X^n,$ tels que $x = F(f)(z)$.

- Couple : $C(X) = X^2$

$$\begin{array}{ccc} (1,2) & \longrightarrow & (a,a) \\ (1,2) & \longrightarrow & (a,b) \end{array}$$

- Liste : $LIST(X) = \sum X^n$

$$[1,2,3,4,5] \longrightarrow [d,a,b,c,a]$$

Théorème de forme normale

Théorème

Un foncteur F est analytique si et seulement s'il préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles.

Dans ce cas, il vérifie une propriété de forme normale :

$\forall x \in F(X),\ \exists! n, \exists z \in F(n)$ normal, $\exists f \in X^n$, tels que $x = F(f)(z)$.

- Couple : $C(X) = X^2$

$$\begin{array}{ccc} (1,2) & \longrightarrow & (a,a) \\ (1,2) & \longrightarrow & (a,b) \end{array}$$

- Liste : $LIST(X) = \sum X^n$

$$[1,2,3,4,5] \longrightarrow [d,a,b,c,a]$$

Théorème de forme normale

Théorème

Un foncteur F est analytique si et seulement s'il préserve les colimites filtrées et les produits fibrés faibles.

Dans ce cas, il vérifie une propriété de forme normale :

$\forall x \in F(X),\ \exists! n, \exists z \in F(n)$ normal, $\exists f \in X^n,$ tels que $x = F(f)(z)$.

- Couple : $C(X) = X^2$

$$\begin{array}{ccc} (1,2) & \longrightarrow & (a,a) \\ (1,2) & \longrightarrow & (a,b) \end{array}$$

- Liste : $LIST(X) = \sum X^n$

$$[1,2,3,4,5] \longrightarrow [d,a,b,c,a]$$

Pourquoi le quotient par $\mathfrak{S}_n$?

- Foncteurs normaux : J.-Y. Girard [Gir88]

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n}$$

- Les multi-ensembles : $EXP(X) = \sum_n X^n / \mathfrak{S}_n$

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{a,a,b,b,c\} \\ \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{a,b,c\} \end{array}$$

Il n'existe pas de foncteur normal associé.

Pourquoi le quotient par $\mathfrak{S}_n$?

- Foncteurs normaux : J.-Y. Girard [Gir88]

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n}$$

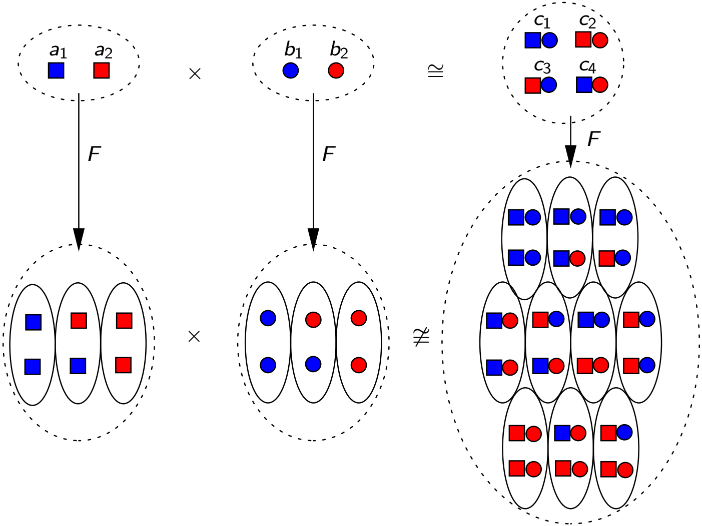
- Les multi-ensembles : $EXP(X) = \sum_n X^n / \mathfrak{S}_n$

$$\begin{array}{rcl} \{1, 2, 3\} & \longrightarrow & \{a, a, b, b, c\} \\ \{1, 2, 3\} & \longrightarrow & \{a, b, c\} \end{array}$$

Il n'existe pas de foncteur normal associé.

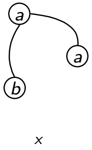
Pourquoi le quotient par $\mathfrak{S}_n$?

Le foncteur $F(X) = X^2/\mathfrak{S}_2$ n'est pas un foncteur normal :



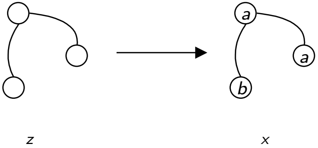
Interprétation de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$



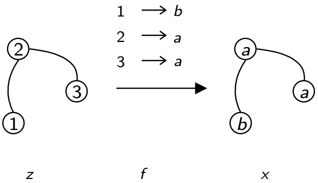
Interprétation de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$



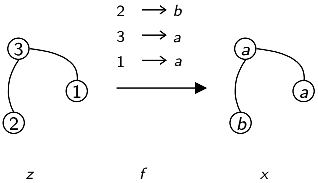
Interprétation de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$



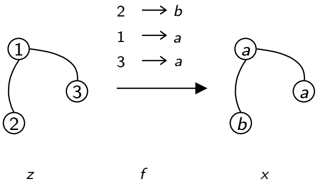
Interprétation de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$



Interprétation de la formule

$$\boxed{F(X) = \sum_n F[n] \times X^n / \mathfrak{S}_n}$$



Le modèle relationnel

- Les types sont interprétés par des ensembles :

$$\boxed{[A] \in \textbf{Set}}$$

Exemples :

- Le type entier *int* est interprété par $\mathbb{N} = \{1, \ldots, n, \ldots\}$
- Le type couple d'entiers est interprété par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- Les termes sont interprétés par des relations entre ensembles : si t de type $A \to B$,

$$\boxed{[t] \subseteq [A] \times [B]}$$

Le modèle relationnel

- Les types sont interprétés par des ensembles :

$$\boxed{[A] \in \mathbf{Set}}$$

  Exemples :
  - Le type entier *int* est interprété par $\mathbb{N} = \{1, \dots, n, \dots\}$
  - Le type couple d'entiers est interprété par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- Les termes sont interprétés par des relations entre ensembles : si t de type $A \to B$,

$$\boxed{[t] \subseteq [A] \times [B]}$$

Le polymorphisme

Définition

Un programme est dit polymorphe lorsqu'il utilise le même algorithme pour traiter des données de types différents.

Définition

On appelle type paramétré un ensemble de types de même structure.

Exemples :

- En CAML, *miroir* est un programme polymorphe
- Le type *liste* est un type paramétré

Le polymorphisme

Définition

Un programme est dit polymorphe lorsqu'il utilise le même algorithme pour traiter des données de types différents.

Définition

On appelle type paramétré un ensemble de types de même structure.

Exemples :

- En CAML, *miroir* est un programme polymorphe
- Le type *liste* est un type paramétré

Modèle de la logique linéaire du second ordre

- Les types paramétrés sont interprétés par les foncteurs analytiques :

$$\boxed{[A] : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}}$$

Exemple : $LIST(X) = \sum_n X^n$

- Les termes sont interprétés par des relations entre ensembles : si t de type paramétré $A \longrightarrow B$ pour chaque ensemble S, on interprète t par

$$\boxed{[t]_S \subseteq [A](S) \times [B](S)}$$

Exemple : $[miroir]_{int} \subseteq LIST(\mathbb{N}) \times LIST(\mathbb{N})$

Modèle de la logique linéaire du second ordre

- Les types paramétrés sont interprétés par les foncteurs analytiques :

$$\boxed{[A] : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}}$$

Exemple : $LIST(X) = \sum_n X^n$

- Les termes sont interprétés par des relations entre ensembles : si t de type paramétré $A \to B$ pour chaque ensemble S, on interprète t par

$$\boxed{[t]_S \subseteq [A](S) \times [B](S)}$$

Exemple : $[miroir]_{int} \subseteq LIST(\mathbb{N}) \times LIST(\mathbb{N})$

La quantification du second ordre

Exemple : *miroir* est de type $\forall a.LIST(a) \rightarrow LIST(a)$

$$\begin{tikzcd} A_{\alpha,\beta} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "{[\,]}"] & \forall\alpha.A_{\alpha,\beta} \arrow[d, "{[\,]}"] \\ F(X,Y) \arrow[r, dashed] & \mathcal{T}F(Y) \end{tikzcd}$$

Définition (L'opérateur $\mathcal{T}$)

Soient $F : \mathbf{Set}^2 \rightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur analytique et $\mathcal{I}$ un ensemble infini dénombrable. On pose :

$$\mathcal{T}F(X) = F(\mathcal{I}, X)/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

La quantification du second ordre

Exemple : *miroir* est de type $\forall a. LIST(a) \rightarrow LIST(a)$

$$\begin{tikzcd} A_{\alpha,\beta} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "{[\ ]}"] & \forall\alpha.A_{\alpha,\beta} \arrow[d, "{[\ ]}"] \\ F(X,Y) \arrow[r, dashed] & \mathcal{T}F(Y) \end{tikzcd}$$

Définition (L'opérateur $\mathcal{T}$)

Soient $F : \mathbf{Set}^2 \rightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur analytique et $\mathcal{I}$ un ensemble infini dénombrable. On pose :

$$\mathcal{T}F(X) = F(\mathcal{I}, X)/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

La quantification du second ordre

Exemple : *miroir* est de type $\forall a.LIST(a) \to LIST(a)$

$$\begin{tikzcd}
A_{\alpha,\beta} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "{[\ ]}"] & \forall\alpha.A_{\alpha,\beta} \arrow[d, "{[\ ]}"] \\
F(X,Y) \arrow[r, dashed] & \mathcal{T}F(Y)
\end{tikzcd}$$

Définition (L'opérateur $\mathcal{T}$)

Soient $F : \mathbf{Set^2} \to \mathbf{Set}$ un foncteur analytique et $\mathcal{I}$ un ensemble infini dénombrable. On pose :

$$\mathcal{T}F(X) = F(\mathcal{I}, X)/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$$

La quantification du second ordre

$$\boxed{\mathcal{T}F(X) = F(\mathcal{I}, X)/\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}}$$

Théorème

Si $F : \mathbf{Set}^2 \to \mathbf{Set}$ est analytique, alors $\mathcal{T}F$ est analytique :

$$\mathcal{T}F(X) = \sum_n \langle \sum_k F[n,k] \times Part(1,\ldots,k)/\mathfrak{S}_k \rangle \times X^n/\mathfrak{S}_n$$

Conclusion

Le stage :

- Etude de la caractérisation des foncteurs analytiques.
- Liens entre foncteurs normaux, analytiques et stables (contre-exemples).
- Traduction du modèle relationnel de la logique linéaire du second ordre avec les foncteurs analytiques.

Conclusion

Le stage :

- Etude de la caractérisation des foncteurs analytiques.
- Liens entre foncteurs normaux, analytiques et stables (contre-exemples).
- Traduction du modèle relationnel de la logique linéaire du second ordre avec les foncteurs analytiques.

Conclusion

Le stage :

- Etude de la caractérisation des foncteurs analytiques.
- Liens entre foncteurs normaux, analytiques et stables (contre-exemples).
- Traduction du modèle relationnel de la logique linéaire du second ordre avec les foncteurs analytiques.

Bibliographie

J.-Y. Girard.
Normal functors, power series and λ-calculus, 1988

J.-Y. Girard.
The system F of variable types, fifteen years later, 1986

A. Joyal.
Foncteurs analytiques et espèces de structure, 1986